Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.5

УДАР КРУГЛОГО ДИСКА О ЖИДКОСТЬ МАЛОЙ ГЛУБИНЫ

М. И. Чебаков

(Ростов-на-Дону)

Рассматривается задача об ударе абсолютно твердого диска о поверхность идеальной жидкости в случае малой глубины. Решение получено путем сведения [1] возникающих в задаче парных интегральных уравнений к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений. Получены формулы для определения импульсных давлений, присоединенной массы и присоединенного момента инерции. Приводится условие безотрывности удара.

В случае большой глубины задача рассматривалась в работе [2].

1. Постановка задачи. Начало декартовых (x, y, z) и цилиндрических (r, θ, z) координат выберем на свободной поверхности жидкости в центре диска, ось z направим перпендикулярно свободной поверхности в глубь жидкости.

В случае центрального удара потенциал скоростей, приобретенных частицами жидкости [2]

$$\varphi(r, z) = \int_0^\infty f(\alpha) \frac{\operatorname{ch} \alpha (h - z)}{\operatorname{ch} \alpha h} J_0(\alpha r)\, \alpha\, d\alpha \tag{1.1}$$

Здесь h — глубина жидкости, $J_0(\alpha r)$ — функция Бесселя первого рода нулевого порядка, а $f(\alpha)$ находится из следующего парного интегрального уравнения (U — скорость диска, a — радиус диска):

$$\int_0^\infty f(\alpha)\, \alpha^2 K(\alpha) J_0(\alpha r)\, \alpha\, d\alpha = -U, \quad r \leqslant a \tag{1.2}$$

$$\int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r)\, \alpha\, d\alpha = 0, \quad r > a \qquad \left(K(\alpha) = \frac{\operatorname{th} \alpha h}{\alpha}\right)$$

Чтобы получить потенциал скоростей в случае нецентрального удара, нужно к потенциалу $\varphi(r, z)$ добавить следующую функцию [2]:

$$\psi(r, z) = \frac{\partial}{\partial x} \Phi(r, z) = \frac{\partial}{\partial x} \int_0^\infty F(\alpha) J_0(\alpha r) \frac{\operatorname{ch} \alpha (h - z)}{\operatorname{ch} \alpha h}\, \alpha\, d\alpha \tag{1.3}$$

Здесь $F(\alpha)$ — решение парного интегрального уравнения, отличающегося от (1.2) заменой — U на $^1/_2\, \omega r^2 + c$, где ω — угловая скорость поворота диска, c — произвольная постоянная. Считаем, что ось x проходит через точку, в которой наносится удар.

2. Решение парных интегральных уравнений. Рассмотрим более общее парное интегральное уравнение

$$(2.1)\qquad \int\limits_0^\infty Q(\alpha)K(\alpha)J_n(\alpha r)\alpha\, d\alpha = J_n(\varepsilon r), \quad r \leqslant a$$

$$\int\limits_0^\infty Q(\alpha)J_n(\alpha r)\alpha\, d\alpha = 0, \quad r > a$$

$$(2.2)\qquad K(\alpha) = A\frac{P_1(\alpha^2)}{P_2(\alpha^2)} = A\prod_{n=0}^\infty\left(1+\frac{\alpha^2}{\delta_n^2}\right)\left(1+\frac{\alpha^2}{\gamma_n^2}\right)^{-1}$$

Здесь $J_n(x)$ — функции Бесселя первого рода n-го порядка, $i\delta_n$ и $i\gamma_n$ — счетное множество нулей и полюсов функции $K(\alpha)$, лежащих в верхней полуплоскости. Будем предполагать, что кратных нулей и полюсов нет и $\delta_n \neq \gamma_m$ $(n, m = 1, 2, \ldots)$. Пусть также δ_n и γ_n монотонно возрастают по модулю с ростом номера, обеспечивая сходимость бесконечного произведения (2.2), а на любой правильной системе контуров C_n $(C_n \subset C_{n+1})$ имеет место оценка при $n \to \infty$

$$(2.3)\qquad K(\alpha) = O(|\alpha|^p), \quad p \leqslant 0$$

Используя соотношение (2.2) и

$$(2.4)\qquad L_x J_n(x\alpha) = \alpha^2 J_n(x\alpha), \quad L_x = \frac{n^2}{x^2} - \frac{1}{x}\frac{d}{dx} - \frac{d^2}{dx^2}$$

парное уравнение (2.1) можно привести к виду [1]

$$(2.5)\qquad AP_1(L_r)q(r) = P_2(L_r)J_n(\varepsilon r), \quad r \leqslant a, \quad q(r) = 0, \quad r > a$$

$$(2.6)\qquad q(r) = \int\limits_0^\infty Q(\alpha)J_n(\alpha r)\alpha\, d\alpha$$

Здесь $P_1(L_r)$ и $P_2(L_r)$ — дифференциальные операторы по r бесконечного порядка.

Решение дифференциального уравнения из (2.5) относительно $q(r)$ можно представить в виде [1]

$$(2.7)\qquad q(r) = K^{-1}(\varepsilon)J_n(\varepsilon r) + \sum_{k=1}^\infty [C_k J_n(i\delta_k r) + D_k N_n(i\delta_k r)], \quad r \leqslant a$$

($N_n(x)$ — функция Бесселя второго рода; C_k, D_k — постоянные). Считая, что $q(r)$ ограничено при $r \to 0$, положим $D_k = 0$ $(k = 1, 2 \ldots)$.

Учитывая обращение преобразования Ханкеля и второе соотношение (2.5), имеем

$$(2.8)\qquad Q(\alpha) = K^{-1}(\varepsilon)\int\limits_0^a J_n(\varepsilon r)J_n(\alpha r)r\, dr + \sum_{k=1}^\infty C_k\int\limits_0^a J_n(i\delta_k r)J_n(\alpha r)r\, dr$$

Постоянные C_k будем определять из условия удовлетворения парного уравнения (2.1) решением (2.8). Заметим, что мероморфную функцию $K(\alpha)$ при сделанных относительно нее предположениях, можно представить в виде суммы главных значений

$$K(\alpha) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{\alpha^2 + \gamma_m^2}, \qquad b_m = 2i\gamma_m \{[K^{-1}(i\gamma_m)]'\}^{-1} \tag{2.9}$$

Подставим теперь (2.8) и (2.9) в первое соотношение (2.1). Учитывая соотношения

$$\int_0^\infty \frac{1}{u^2+\gamma_m^2} J_n(ux) J_n(uy)\, u\, du = \begin{cases} I_n(x\gamma_m) K_n(y\gamma_m), & x<y \\ I_n(y\gamma_m) K_n(x\gamma_m), & y<x \end{cases}$$

$$\int_0^a I_n(\delta_k y) K_n(\gamma_m y)\, y\, dy = a \frac{\gamma_m I_n(\delta_k a) K_{n-1}(\gamma_m a) + \delta_k I_{n-1}(\delta_k a) K_n(\gamma_m a)}{\delta_k^2 - \gamma_m^2}$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m (\delta_n^2 + \gamma_m^2)^{-1} = K(i\delta_n) = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots$$

и приравнивая нулю коэффициенты при линейно-независимых функциях $J_n(i\gamma_m r)$, получим бесконечную алгебраическую систему для определения коэффициентов C_k $(k = 1, 2\ldots)$ разложения (2.7)

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\infty} C_k (\delta_k^2 - \gamma_m^2)^{-1} [\gamma_m I_n(\delta_k a) K_{n-1}(\gamma_m a) + \delta_k I_{n-1}(\delta_k a) K_n(\gamma_m a)] = \\ &= i^{-n} K^{-1}(\varepsilon)(\varepsilon^2 + \gamma_m^2)^{-1} [\gamma_m J_n(\varepsilon a) K_{n-1}(\gamma_m a) + \varepsilon J_{n-1}(\varepsilon a) K_n(\gamma_m a)] \\ &m = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{2.10}$$

($I_n(x)$ и $K_n(x)$ — соответственно функции Бесселя мнимого аргумента и функции Макдональда).

Система (2.10) изучена в работе [3], где она путем точного обращения главной сингулярной части приведена к системе второго рода, для которой обоснован метод последовательных приближений при больших δ_k и γ_m $(k, m = 1, 2 \ldots)$ или больших a.

Ограничимся главным членом ассимптотики решения системы (2.10). при δ_k, $\gamma_m \to \infty$, $(k, m = 1, 2 \ldots)$. Для этого введем новые неизвестные

$$C_k = 2X_n K_n(\delta_k a)\delta_k a \tag{2.11}$$

и совершим предельный переход при δ_k, $\gamma_m \to \infty$. Придем к бесконечной системе

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{X_k}{\delta_k - \gamma_m} = i^{-n} K^{-1}(\varepsilon) \frac{\gamma_m J_n(\varepsilon a) + \varepsilon J_{n-1}(\varepsilon a)}{\varepsilon^2 + \gamma_m^2}, \qquad m = 1, 2, \ldots \tag{2.12}$$

Решение этой системы представляется в виде [3]

$$X_k = \frac{i\,[J_n(\varepsilon a) + iJ_{n-1}(\varepsilon a)]}{2K_+(\varepsilon)(\delta_k + i\varepsilon) K_+'(-i\delta_k)} + \frac{i\,[J_n(\varepsilon a) - iJ_{n-1}(\varepsilon a)]}{2K_-(\varepsilon)(\delta_k - i\varepsilon) K_+'(-i\delta_k)} \tag{2.13}$$

$$K(\alpha) = K_+(\alpha) K_-(\alpha)$$

Здесь $K_+(\alpha)$ и $K_-(\alpha)$ — регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскости функции.

Если правая часть первого соотношения парного уравнения (2.1) есть r^{2k} и в (2.1) $n = 0$, то решением такого уравнения будет функция

$$Q^*(\alpha) = \lim_{\varepsilon\to 0} L_\varepsilon^k Q(\alpha), \tag{2.14}$$

где L_ε^k обозначает k-кратное действие оператора L_ε по переменной ε.

Преобразуем теперь первое соотношение в (1.2), подействовав на него оператором $L^{-1}{}_r$, обратимым к L_r. Считая φ ограниченной при $r=0$, имеем (полагаем $a = 1$)

$$\int_0^\infty f(\alpha) K(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha = U\left(\frac{r^2}{4} - c_1\right), \quad r \leqslant 1 \tag{2.15}$$

$$\int_0^\infty f(\alpha) J_0(\alpha r)\alpha\, d\alpha = 0, \quad r > 1$$

Аналогично в случае нецентрального удара правая часть первого соотношения имеет вид

$$-\omega\left({}^1/_{32}\, r^4 + {}^1/_4\, cr^2 + c_2\right)$$

Здесь c_1 и c_2 — постоянные интегрирования.

На основании соотношений (2.8), (2.11), (2.13) и (2.14) можно теперь построить главные члены асимптотики решения преобразованных парных интегральных уравнений при $\delta_k,\ \gamma_m \to \infty$ $(k,\ m = 1, 2 \ldots)$, но так как для рассматриваемой задачи

$$\delta_k = \frac{\pi k}{h}, \qquad \gamma_m = \frac{\pi}{h}\left(m - \frac{1}{2}\right) \tag{2.16}$$

то, следовательно, при $h \to 0$.

3. Вычисление импульсного давления, присоединенной массы и присоединенного момента инерции. Имеем при $z = 0$

$$\varphi(r, 0) = \lim_{\varepsilon\to 0} U\left[{}^1/_4 L_\varepsilon q(r) - c_1 q(r)\right] \tag{3.1}$$

$$\Phi(r, 0) = -\lim_{\varepsilon\to 0} \omega\left[{}^1/_{32} L_\varepsilon^2 q(r) + {}^1/_4 c L_\varepsilon q(r) + c_2 q(r)\right]$$

Здесь $q(r)$ — преобразование Ханкеля (2.6) решения уравнения (2.1) при $n = 0$, представляемое в виде (2.7). Опуская громоздкие выкладки, выпишем результат

$$q(r)\,|_{\varepsilon=0} = h^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} C_k{}^\circ I_0(\delta_k r) \tag{3.2}$$

$$L_\varepsilon q(r)\,|_{\varepsilon=0} = \frac{r^2}{h} - \frac{4h}{3} + \sum_{k=1}^{\infty} B_k{}^\circ I_0(\delta_k r)$$

$$L_\varepsilon^2 q(r)\,|_{\varepsilon=0} = \frac{r^4}{h} - \frac{16 r^2 h}{3} - \frac{64 h^3}{45} + \sum_{k=1}^{\infty} D_k{}^\circ I_0(\delta_k r)$$

Здесь

$$B_k^\circ = C_k^\circ (d_0 + d_1\delta_k^{-1} + 4\delta_k^{-2})$$

$$D_k^\circ = {}^8/_3 C_k^\circ (b_0 + b_1\delta_k^{-1} + b_2\delta_k^{-2} + b_3\delta_k^{-3} + 24\delta_k^{-4})$$

$$C_k^\circ = \lim_{\varepsilon\to 0} C_k = 2i\,[K_+(0)\,K_+'(-i\delta_k)]^{-1} K_0(\delta_k)$$

$$d_0 = 1 + 2\pi^{-1}h\ln 4 - {}^2/_3 h^2 + 2\pi^{-2}h^2\ln^2 4$$

$$d_1 = 2 + 4\pi^{-1}h\ln 4$$

$$b_0 = {}^3/_8 + {}^3/_2 a_1 h + h^2(6a_1^2 - 3a_2) + h^3(2a_3 - 12a_1a_2 + 12a_1^3) +$$
$$+ h^4(-a_4 + 8a_1a_3 + 6a_2^3 - 36a_1^2a_2 + 24a_1^4)$$

$$b_1 = {}^3/_2 + 6ha_1 + h^2(12a_1^2 - 6a_2) + h^3(4a_3 + 24a_1^3 - 24a_1a_2)$$

$$b_2 = 6 + 12ha_1 + h^2(24a_1^2 - 12a_2)$$

$$b_3 = 12 + 24ha_1$$

$$a_1 = \pi^{-1}\ln 4, \qquad a_2 = \pi^{-2}\ln^2 4 + {}^1/_3$$

$$a_3 = \pi^{-3}\ln^3 4 + \pi^{-1}\ln 4 + 12\pi^{-3}a_5$$

$$a_4 = \pi^{-4}\ln^4 4 + 2\pi^{-2}\ln^2 4 + 48\pi^{-4}a_5 + {}^{19}/_{15}$$

$$a_5 = 1.2020569$$

Нетрудно убедиться, что ряды (3.2) расходятся при $r = 1$. Поэтому, накладывая на φ и ψ условие ограниченности при $r = 1$, получаем возможность определить постоянные c_1, c_2 и c. Имеем

$$c_1 = \frac{1}{4} + \frac{h\ln 4}{2\pi} - \frac{h^2}{6} + \frac{h^2\ln^2 4}{2\pi^2} = \frac{d_0}{4} \tag{3.3}$$
$$c = -\frac{b_1}{3d_1}, \qquad c_2 = \frac{b_1 d_0}{12 d_1} - \frac{b_0}{12}$$

На основании соотношений (1.4), (3.1) — (3.3) получаем окончательные выражения для потенциала скоростей ($z = 0$, $r \leqslant 1$), приобретенных частицами жидкости в результате удара

$$\varphi(r, 0)|_{r\leqslant 1} = U\left(\frac{r^2-1}{4h} - \frac{\ln 4}{2\pi} - \frac{h\ln^2 4}{2\pi^2} - \frac{h}{6} + \frac{1}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} S_k I_0(\delta_k r)\right) \tag{3.4}$$

$$\psi(r, 0)|_{r\leqslant 1} = -\omega x\left(\frac{r^2}{8h} - \frac{b_1}{6d_1h} - \frac{h}{3} + \frac{1}{6hr}\sum_{k=1}^{\infty} R_k I_1(\delta_k r)\right) \tag{3.5}$$

$$S_k = \frac{[k(\pi + 2h\ln 4) + 2h]\,K_0(\delta_k)}{k\,(2k)!!\,[(2k-1)!!]^{-1}}, \qquad R_k = \frac{(2k-1)!!}{(2k)!!} \times$$
$$\times \left(b_2 - \frac{4b_1}{d_1} + \frac{hb_3}{\pi k} + \frac{b_4h^2}{\pi^2k^2}\right) K_0'(\delta_k)$$

Здесь учтено, что

$$K_+(\alpha) = \sqrt{\frac{h}{\pi}}\,\Gamma\left(\frac{1}{2} - \frac{ih\alpha}{\pi}\right)\Gamma^{-1}\left(1 - \frac{ih\alpha}{\pi}\right), \qquad K_-(\alpha) = K_+(-\alpha)$$

$$\frac{i}{K_+'(-i\delta_k)} = \frac{\pi}{h\sqrt{h}}\,\frac{(2k-1)!!}{2^k(k-1)!}$$

Как известно, импульсное давление $p_t = -\rho(\varphi + \psi)$, где ρ — плотность жидкости. Используя (3.4) и (3.5), получаем формулы для расчета импульсного давления на границе жидкости под диском для малых значений h.

Полный ударный импульс P и полный момент импульсных давлений M, действующих на диск, даются соотношениями

$$(3.6)\qquad P = -2\pi\rho\int_0^1 r\varphi(r,0)\,dr = \rho U\left(\frac{\pi}{8\pi} + \frac{\ln 4}{2} + \frac{h\ln^2 4}{2\pi} + \frac{\pi h}{6} - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}S_k I_1(\delta_k)\right)$$

$$(3.7)\qquad M = -\rho\int_0^{2\pi}\int_0^1 x\psi(r,0)\,r\,d\theta\,dr = \pi\rho\omega\left(\frac{1}{48h} - \frac{b_1}{24d_1h} - \frac{h}{12} + \frac{6}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} k^{-1}R_k I_2(\delta_k)\right)$$

Формулы (3.4) — (3.7) справедливы для малых h.

В таблице приведены безразмерные значения импульсного давления

h	p^*		P^*		M^*	
1	2	3	4	5	6	7
1.5			1.408	1.365	0.2263	0.1780
1.1	0.4985	0.6750	1.448	1.420	0.2004	0.1780
1.0	0.5303	0.6890	1.465	1.461	0.1961	0.1774
0.9	0.5641	0.7133	1.488	1.541	0.1926	0.1756
0.8	0.6019		1.518		0.1902	
0.7	0.7559		1.561		0.1892	
0.6	0.7930		1.624		0.1898	
0.5	0.8518		1.720		0.1933	

в центре диска, присоединенной массы и присоединенного момента инерции

$$(3.8)\qquad p^* = -U^{-1}\varphi(0,0),\quad P^* = (\rho U)^{-1}P,\quad M^* = -(\rho\omega)^{-1}M$$

для разных значений h, подсчитанные соответственно по формулам (3.4), (3.6) и (3.7).

Для сравнения в колонках 3, 5, 7 таблицы приводим значения аналогичных величин, подсчитанных на основании результатов работы [2] и справедливых при $h \geqslant 1.1$ с относительной погрешностью до 6%.

4. Условие безотрывности удара. Координата точки приложения импульса

$$(4.1)\qquad x_0 = M\,/\,P$$

Отрыв диска от поверхности жидкости произойдет, если хотя бы в окрестности точки $x = 1$, $y = 0$ импульсное давление станет отрицательным (считаем, что $\omega > 0$, $U > 0$), т. е.

$$(4.2)\qquad (\varphi + \psi) \geqslant 0 \quad \text{при} \quad z=0,\quad x\to 1,\quad y=0$$

Учитывая (4.1), получаем из (4.2) условие безотрывности удара

$$|x_0| \leqslant -\lim_{r\to 1} \frac{M\varphi}{P\psi} = \beta \quad \text{при } z=0, \quad y=0, \quad 0<x\leqslant 1 \tag{4.3}$$

Используя поведение функций $K_0(x)$, $I_0(x)$, $I_1(x)$, $I_2(x)$ при больших значениях аргумента, найдем асимптотические значения выражений (3.4), (3.5) в окрестности точки $r = 1$ и (3.6), (3.7) при $h \to 0$. Имеем

$$\begin{aligned} &\varphi(r, 0)|_{r\leqslant 1} = U\left[\sqrt{\frac{1-r}{\pi h}} + O(1)\right] \\ &\psi(r, 0)|_{r\leqslant 1} = \omega x\left[\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1-r}{\pi h}} + O(1)\right] \\ &P = \rho U\left[\frac{\pi}{8h} + O(1)\right] \\ &M = -\rho\omega\left[\frac{\pi}{9th} + O(1)\right] \end{aligned} \tag{4.4}$$

Из (4.3) на основании (4.4) получаем $\beta = {}^1/_6$ при $h \to 0$. Окончательно условие безотрывности удара при $h \to 0$

$$|x_0| \leqslant a / 6$$

Как известно [2], в случае $h = \infty$ условие безотрывности удара $|x_0| \leqslant a / 5$. Следовательно, для любых значений h условие безотрывности удара для случая идеальной жидкости будет выглядеть так:

$$|x_0| \leqslant a^*(h), \quad a / 6 \leqslant a^*(h) \leqslant a / 5, \quad 0 < h < \infty$$

$$a^*(h) \to a / 5 \quad \text{при } h \to \infty, \qquad a^*(h) \to a/6 \quad \text{при } h \to 0$$

Автор благодарит В. М. Александрова и В. А. Бабешко за внимание к данной работе.

Поступила 26 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М., Чебаков М. И.* Об одном методе решения парных интегральных уравнений. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.
2. *Ворович И. И., Юдович В. И.* Удар круглого диска о жидкость конечной глубины. ПММ, 1957, т. 21, вып. 4.
3. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1967, т. 31, вып. 1.