Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.526

О ПАРАМЕТРАХ ВТОРОГО ПОРЯДКА, ВЛИЯЮЩИХ НА ОТРЫВ ПРОСТРАНСТВЕННОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

Г. М. Бам-Зеликович

(Москва)

Показывается, что влияние вторичного течения на отрыв пространственного пограничного слоя характеризуется параметрами, составленными из коэффициентов при членах второго порядка малости в разложении переменных, характеризующих внешний поток в окрестности исследуемого сечения пограничного слоя. Выводятся выражения соответствующих величин, которые должны дополнительно войти в критерий отрыва.

При выводе критериев отрыва плоского и пространственного пограничного слоя принято использовать систему определяющих параметров, включающую в себя коэффициенты при членах первого порядка малости разложения величин, описывающих внешний поток в окрестности точки отрыва. Многочисленные эксперименты по двумерному пограничному слою показывают, что пренебрежение влиянием членов второго порядка хорошо оправдано в очень широком классе практически интересных случаев. Однако при отрыве трехмерного пограничного слоя могут быть случаи, когда влияние некоторых параметров второго порядка становится существенным.

1. Рассмотрим число и физический смысл определяющих параметров, входящих в выражение критерия отрыва, выведенное в работе [1], а также параметров, задающих поток в окрестности точки с точностью до величин второго порядка малости.

Пусть начало декартовой системы координат помещено в рассматриваемой точке обтекаемой поверхности, оси x и y расположены в касательной плоскости к поверхности, а ось z — по нормали к ней. Предположим для простоты выкладок, что энтропия во всем потоке вне пограничного слоя постоянна и движение безвихревое. Будем отмечать индексом нуль величины в рассматриваемой точке поверхности. Тогда уравнения, описывающие поток вне пограничного слоя, могут быть записаны в следующем виде [2]:

$$\begin{aligned}(1.1)\qquad & \rho\,(\partial u / \partial x + \partial v / \partial y + \partial w / dz) = \\ & = -(u\partial\rho / \partial x + v\partial\rho / \partial y + w\partial\rho / \partial z)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(1.2)\qquad & u\partial u / \partial x + v\partial u / \partial y + w\partial u / \partial z + (1 / \rho)\,\partial p / \partial x = 0 \\ & u\partial v / \partial x + v\partial v / \partial y + w\partial v / \partial z + (1 / \rho)\,\partial p / \partial y = 0 \\ & u\partial w / \partial x + v\partial w / \partial y + w\partial w / \partial z + (1 / \rho)\,\partial p / \partial z = 0\end{aligned}$$

$$(1.3)\qquad \frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} = 0, \qquad \frac{\partial v}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial y} = 0$$

$$(1.4)\qquad p / \rho^{\varkappa} = p_0 / \rho_0^{\varkappa}$$

В нулевом приближении для задания потока вне пограничного слоя в данной точке надо задать

$$p_0,\ \rho_0,\ u_0,\ v_0\ (w_0 = 0) \tag{1.5}$$

На процессы в пограничном слое влияет поведение внешнего потока только на границе слоя. Для задания в малой окрестности точки внешнего потока на границе пограничного слоя в первом приближении необходимо и достаточно задать производные всех величин по x и по y в рассматриваемой точке. Из (1.4) видно, что производные плотности выражаются через производные давления

$$(\partial\rho / \partial x)_0 = (\rho_0 / \varkappa p_0)(\partial p / \partial x)_0 \qquad (\partial\rho / \partial y)_0 = (\rho_0 / \varkappa p_0)(\partial p / \partial y)_0 \tag{1.6}$$

Первые два уравнения (1.2) и первое уравнение (1.3) дают

$$\begin{gathered} u_0 (\partial u / \partial x)_0 + v_0 (\partial u / \partial y)_0 = -(\partial p / \partial x)_0 / \rho_0 \\ u_0 (\partial v / \partial x)_0 + v_0 (\partial v / \partial y)_0 = -(\partial p / \partial y)_0 / \rho_0 \\ (\partial u / \partial y)_0 - (\partial v / \partial x)_0 = 0 \end{gathered} \tag{1.7}$$

Остальные четыре уравнения системы (1.1) — (1.3) содержат производные $\partial u / \partial z$, $\partial v / \partial z$ и три производные w, т. е. пять неизвестных величин, поэтому они не могут быть использованы для определения производных u и v по x и y. Таким образом, для задания потока в первом приближении на границе пространственного пограничного слоя, кроме проекции grad p, на касательную плоскость (т. е. кроме $\partial p / \partial x$ и $\partial p / \partial y$) должна быть задана еще одна какая-либо комбинация производных u и v по x и y. Логично задать, как это сделано в [1], величину $(\partial\alpha / \partial n)_0$, где α — угол линии тока с фиксированным направлением в касательной плоскости, а n — расстояние вдоль нормали к линии тока (тоже в касательной плоскости). Примем за α угол линии тока с осью x, тогда

$$\begin{gathered} \operatorname{tg}\alpha = v / u, \quad dx / dn = -\sin\alpha, \quad dy / dn = \cos\alpha \\ \frac{\partial\alpha}{\partial n} = -\sin\alpha\cos^2\alpha\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{v}{u}\right) + \cos^3\alpha\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{v}{u}\right) \\ V_0 = (u_0^2 + v_0^2)^{1/2}, \quad \sin\alpha_0 = v_0 / V_0, \quad \cos\alpha_0 = u_0 / V_0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Производя дифференцирование, получим после преобразований

$$\begin{gathered} (\partial\alpha / \partial n)_0 = (1 / V_0^3)\,[u_0^2 (\partial v / \partial y)_0 + v_0^2 (\partial u / \partial x)_0 - \\ - u_0 v_0 (\partial v / \partial x + \partial u / \partial y)_0] \end{gathered} \tag{1.9}$$

Разрешая систему уравнений (1.7), (1.9) относительно производных коростей, находим

$$\begin{gathered} \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 = \frac{1}{\rho_0 V_0^4}\left[-u_0^2 (V_0^2 + v_0^2)\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 + u_0^2 v_0\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0\right] + \frac{v_0^2}{V_0}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 = \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0 V_0^4}\left[v_0^3\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 + u_0^3\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0\right] - \frac{u_0 v_0}{V_0}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right)_0 \\ \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = \frac{1}{\rho_0 V_0^4}\left[u_0 v_0^2\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0 - v_0 (V_0^2 + u_0^2)\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0\right] + \frac{u_0^2}{V_0}\left(\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right)_0 \end{gathered} \tag{1.10}$$

Параметр $(\partial\alpha / \partial n)_0$ характеризует сгущение или разрежение линий тока вблизи рассматриваемой точки. Это сгущение или разрежение само может являться следствием двух причин: пространственности потока и действия сил давления. Действительно, используя уравнения (1.7), уравнение неразрывности (1.1) и соотношение (1.6), получим из (1.9)

$$\left(\frac{\partial\alpha}{\partial n}\right)_0 = -\frac{1}{V_0}\left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 + (1 - M_0{}^2)\frac{\pi_0 \cos\varphi_0}{\rho_0 V_0{}^2} \tag{1.11}$$

$$\pi_0 = [(\partial p / \partial x)_0{}^2 + (\partial p / \partial y)_0{}^2]^{1/2} \tag{1.12}$$

Здесь M_0 — число M в рассматриваемой точке, φ_0 — угол между вектором скорости и проекцией вектора grad p на касательную плоскость. Первый член в (1.11) зависит от распределения параметров потока по нормали к обтекаемой поверхности, второй — только от значения параметров на самой поверхности. Таким образом, при отсутствии градиента давления может быть расхождение или сближение линий тока на поверхности вследствие отличия от нуля $(\partial w / \partial z)_0$ (например при обтекании конуса без угла атаки). С другой стороны, даже при плоском внешнем потоке, когда $(\partial w / \partial z)_0 = 0$, величина $(\partial\alpha / \partial n)_0$ также может быть отлична от нуля (например на плоских боковых стенках диффузорного или конфузорного канала с прямой осью). Растекание или сгущение линий тока внешнего потока приводит к соответствующему растеканию или утолщению пространственного пограничного слоя, что, очевидно, и влияет на величину параметра отрыва.

Этот эффект соответствует тому, что получается при расчетах трехмерного пограничного слоя, в которых не учитывается вторичное течение. В этом случае, как известно, система уравнений сводится к виду, аналогичному уравнениям пограничного слоя на осесимметричных телах. При этом основное отличие от плоского случая и заключается в растекании или утолщении пограничного слоя при изменении радиуса тела.

2. Вторичное течение может оказывать существенное влияние на течение вблизи стенки, т. е. на ту зону пограничного слоя, которая играет наибольшую роль в возникновении отрыва. Как следует из предыдущего, параметры, описывающие внешний поток в первом приближении вблизи рассматриваемого сечения пограничного слоя, по-видимому, не дают возможности охарактеризовать вторичные токи и связанное с ними возможное изменение критериев отрыва пограничного слоя. Поэтому необходимо обратиться к описанию внешнего потока в окрестности рассматриваемой точки во втором приближении.

Для возможности четко выделить параметры, связанные со вторичным течением, рассмотрим случай, когда поток вне трехмерного пограничного слоя плоский, т. е. его характеристики не зависят от z. Такое течение, например, наблюдается при обтекании цилиндрических препятствий, установленных на пластине. Вообще говоря, все изложенное ниже с достаточной степенью точности справедливо в более общем случае, когда характеристики внешнего потока не сильно зависят от z, т. е. производными компонент скорости по z можно пренебречь в уравнениях (1.1) — (1.3) по сравнению с производными по другим координатам. Так будет и в районе отрыва, где производные по направлению, лежащему в касательной плоскости, обычно велики. Если производными по z можно пренебречь, то $(\partial\alpha / \partial n)_0$ уже не является независимым параметром, а, как легко получить из (1.11), выражается через значения скорости и производных давления

$$(2.1) \qquad (\partial\alpha / \partial n)_0 = (1 - M_0^2)\,[u_0 (\partial p / \partial x)_0 + v_0 (\partial p / \partial y)_0] / \rho_0 V_0^3$$

Чтобы получить параметры, определяющие во втором приближении внешний поток в окрестности заданной точки поверхности, продифференцируем уравнения (1.1) — (1.4) по x и y (с учетом того, что производными по z пренебрегаем). Из (1.4) получаем

$$(2.2) \qquad \begin{aligned} &(\partial^2\rho / \partial x^2)_0 = (\rho_0 / \varkappa p_0)\,[(\partial^2 p / \partial x^2)_0 - (\varkappa - 1)\,(\partial p / \partial x)_0^2 / \varkappa p_0] \\ &(\partial^2\rho / \partial y^2)_0 = (\rho_0 / \varkappa p_0)\,[(\partial^2 p / \partial y^2)_0 - (\varkappa - 1)\,(\partial p / \partial y)_0^2 / \varkappa p_0] \\ &(\partial^2\rho / \partial x\partial y)_0 = (\rho_0 / \varkappa p_0)\,[(\partial^2 p / \partial x\partial y)_0 - (\varkappa - 1)\,(\partial p / \partial x)_0 (\partial p / \partial y)_0 / \varkappa p_0] \end{aligned}$$

Эти соотношения дают однозначное выражение вторых производных плотности через производные давления. Дифференцируя по x и по y уравнение (1.1), первые два уравнения (1.2) и первое уравнение (1.3), получаем семь линейно независимых уравнений (легко показать, что восьмое будет их комбинацией). Учитывая (1.6), запишем их в такой форме:

$$(2.3) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_0 = -\frac{1}{\varkappa p_0}\left[\frac{\partial u}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \right. \\ &\left. + u\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} - \frac{u}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + v\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} - \frac{v}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right]_0 \\ &\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 = -\frac{1}{\varkappa p_0}\left[\frac{\partial u}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{\partial p}{\partial y} + \right. \\ &\left. + u\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y} - \frac{u}{p}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + v\frac{\partial^2 p}{\partial y^2} - \frac{v}{p}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]_0 \end{aligned}$$

$$(\partial^2 u / \partial x\partial y)_0 - (\partial^2 v / \partial x^2)_0 = 0, \quad (\partial^2 u / \partial y^2)_0 - (\partial^2 v / \partial x\partial y)_0 = 0$$

$$u_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_0 + v_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_0 + \frac{1}{\varkappa p_0\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0^2$$

$$\begin{aligned} &u_0\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + v_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 = \\ &= -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + \frac{1}{\varkappa p_0\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)_0\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0 \end{aligned}$$

$$u_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right)_0 + v_0\left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}\right)_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0^2 = -\frac{1}{\rho_0}\left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_0 + \frac{1}{\varkappa p_0\rho_0}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)_0^2$$

Умножая первое уравнение (2.3) на $-u_0$, второе на $-v_0$ и складывая с пятым и седьмым уравнениями, получим соотношение, не содержащее вторых производных от компонент скорости. Простыми преобразованиями, используя (1.10), (1.11) и то, что $(\partial w / \partial z)_0 = 0$, его можно привести к виду

$$(2.4) \qquad \begin{aligned} &\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\right)_0\left(1 - \frac{\rho_0 u_0}{\varkappa p_0}\right) + \left(\frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)_0\left(1 - \frac{\rho_0 v_0^2}{\varkappa p_0}\right) - 2\left(\frac{\partial^2 p}{\partial x\,\partial y}\right)_0\frac{\rho_0 u_0 v_0}{\varkappa p_0} = \\ &= -(\pi_0^2 / \rho_0 V_0^2)\,[2 - 2M_0^2\cos^2\varphi_0 + (1 + \varkappa)\,M_0^4\cos^2\varphi_0] \end{aligned}$$

Из первых же шести уравнений (2.3) вторые производные компонент скорости однозначно выражаются через вторые производные давления и величины нулевого и первого порядка. Действительно, определитель этой системы шести линейных уравнений относительно вторых производных компонент скорости, равен $u_0^2 + v_0^2 = V_0^2$, т. е. отличен от нуля во всех точках, где модуль скорости не равен нулю.

Таким образом из уравнений (2.2) — (2.4) следует, что все параметры внешнего потока в окрестности рассматриваемой точки будут известны, если задать какие-либо две независимые комбинации вторых производных давления. Иначе говоря, что в рассматриваемом случае плоского (или квазиплоского внешнего потока) существует всего два независимых параметра второго порядка. Однако из предыдущего формального вывода нельзя ничего заключить о физическом смысле этих параметров и об их связи со вторичным течением в пограничном слое. Поэтому рассмотрим подробнее влияние различных факторов на профиль скорости в пограничном слое и формирование вторичного течения.

3. Значение критерия отрыва зависит, по существу, от величины и характера распределения в пограничном слое проекции скорости на направление градиента давления.

В двумерном пограничном слое профиль скорости в точке отрыва, как показывают многочисленные эксперименты, имеет вполне определенную форму, что приводит к определенному значению критерия отрыва. В трехмерном пограничном слое форма профиля скорости может изменяться за счет двух причин: во-первых, за счет растекания или сгущения линий тока (об этом уже говорилось выше) и, во-вторых, в пристеночной области к искажению профиля скорости может приводить вторичное течение.

Рассмотрим возможное изменение формы профиля скорости за счет течения в направлении, перпендикулярном градиенту давления, называя всюду в дальнейшем это течение поперечным (во избежание путаницы в терминологии, так как обычно вторичным течением называется течение в направлении, перпендикулярном линии тока внешнего потока). Профиль скорости в направлении градиента давления будем называть основным.

Если бы все параметры не изменялись в направлении, перпендикулярном градиенту давления, то скорость поперечного течения была бы постоянной. При этом никакого влияния на профиль скорости в направлении градиента давления поперечное течение не оказывало бы, так как на место уходящих частиц приходило бы столько же частиц и с такими же параметрами. Так обстоит дело, например, при образовании пограничного слоя на косо обтекаемых цилиндрических телах бесконечного размаха.

Если параметры в направлении, перпендикулярном градиенту давления, не остаются постоянными, то имеются две причины, по которым поперечное течение может приводить к существенному изменению профиля скорости основного течения.

Во-первых, скорость поперечного течения может быть не постоянной. При этом к данному сечению пограничного слоя может с одной стороны приходить больше частиц, чем уходит в другую сторону, или же наоборот — оттекать от данного сечения больше частиц, чем притекает. Так как поперечное течение по отношению к основному играет большую роль в пристеночной области пограничного слоя, то в первом случае будет как бы вдув газа в пристеночную область в рассматриваемом сечении, во втором же случае — отсос из пристеночной области. Это может приводить к тому, что профиль скорости в пограничном слое в направлении градиента давления в первом случае будет становиться менее наполненным, во втором же — более наполненным.

Другое влияние поперечного течения может проявиться тогда, когда сильно изменяется характер профиля скорости в пограничном слое при движении по нормали к градиенту давления (например, когда $\partial\pi / \partial N$ большое, где **N** — вектор в касательной плоскости к поверхности, ортогональный вектору grad p).

Пусть поперечное течение происходит в направлении **N** и $\partial\pi / \partial N < 0$. Это значит, что частицы, приносимые поперечным течением, приходят из зоны, где основной профиль в пограничном слое менее наполненный, чем в рассматриваемом сечении. Поэтому на место уносимых поперечным течением частиц будут приходить частицы, обладающие меньшей кинетической энергией, что может приводить к более раннему отрыву пограничного слоя. Если же $\partial\pi / \partial N > 0$, то приходящие частицы имеют большую кинетическую энергию и отрыв может затягиваться.

Рассмотрим, от каких же параметров, определяющих внешний поток в окрестности рассматриваемой точки, зависит неравномерность поперечного течения и неравномерность наполненности профиля при движении по нормали к градиенту давления. Так как по нормали к градиенту давления не действуют никакие силы, кроме сил вязкости, то естественно предположить, что интенсивность поперечного течения в первом приближении определяется величиной проекции вектора скорости внешнего потока на направление вектора **N**. При движении вдоль **N** эта проекция может изменяться как вследствие изменения модуля скорости V, так, в особенности, из-за изменения угла φ между векторами **V** и grad p. Эффект отсоса или вдува в пристеночной области из-за поперечного течения будет тем ощутимее, чем больше величина поперечного течения по отношению к основному потоку. Таким образом, относительную интенсивность отсоса или вдува можно считать в первом приближении пропорциональной изменению в направлении **N** величины $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) / V \cos\varphi = \operatorname{tg}\varphi$, т. е. $\partial \operatorname{tg}\varphi / \partial N$. Этот эффект должен зависеть также от степени наполненности профиля основного течения. Действительно, если расход у стенки в основном течении мал (профиль скорости близок к отрывному), то достаточно небольшого отсоса или вдува, чтобы существенно повлиять на форму профиля. Если же расход у стенки велик (профиль основного течения наполненный), то малый отсос или вдув не приведет к сколько-нибудь ощутимым результатам. Так как наполненность профиля основного течения зависит прежде всего от величины градиента давления (точнее от безразмерного параметра пропорционального grad p), то можно заключить, что эффект отсоса или вдува вследствие неравномерности поперечного течения будет характеризоваться следующей комбинацией:

$$B = \pi_0 (\partial \operatorname{tg}\varphi / \partial N)_0 \tag{3.1}$$

Изменение наполненности профиля при движении по нормали к градиенту давления будет зависеть в первую очередь от величины $\partial\pi / \partial N$. Влияние же этого фактора на основное течение будет тем больше, чем интенсивнее перенос частиц от сечения к сечению, т. е. чем больше относительная интенсивность поперечного течения. Таким образом, влияние изменения наполненности профиля основного течения по нормали к grad p должно быть в первом приближении пропорционально произведению

$$C = \operatorname{tg} \varphi_0 (\partial\pi / \partial N)_0 \tag{3.2}$$

Покажем, что параметры B и C являются независимыми параметрами второго порядка. Для этого найдем их выражения через производные давления и другие гидродинамические величины. Если $\mathbf{i}$ и $\mathbf{j}$ — единичные векторы по осям x и y, то вектор $\mathbf{N}$ равен

$$\mathbf{N} = -(\mathbf{i} / \pi)(\partial p / \partial y) + (\mathbf{j} / \pi)(\partial p / \partial x) \tag{3.3}$$

Для скалярного произведения $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N})$, $\cos\varphi$ и производной по направлению $\mathbf{N}$ из (3.3) получаем формулы

$$(\mathbf{V} \cdot \mathbf{N}) = V \sin\varphi = -\frac{u}{\pi}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{v}{\pi}\frac{\partial p}{\partial x} \tag{3.4}$$

$$\cos\varphi = \frac{u}{\pi V}\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{v}{\pi V}\frac{\partial p}{\partial y}$$

$$\partial / \partial N = -(1 / \pi)(\partial p / \partial y)(\partial / \partial x) + (1 / \pi)(\partial p / \partial x)(\partial / \partial y) \tag{3.5}$$

Из (3.1), (3.3) — (3.5) путем ряда преобразований находим

$$B = \frac{\pi_0}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{\partial\varphi}{\partial N}\right)_0 = \frac{1}{\pi_0^2\cos^2\varphi_0}\left[-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2}\left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 + \right. \tag{3.6}$$

$$\left. + 2\frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y}\right]_0 + \frac{\pi_0^2 \operatorname{tg}^2\varphi_0}{\rho_0 V_0^2},$$

Аналогично из (1.12), (3.2) — (3.5) получаем

$$C = \frac{\operatorname{tg}\varphi_0}{\pi_0^2}\left\{\left(-\frac{\partial^2 p}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 p}{\partial y^2}\right)\frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial^2 p}{\partial x \partial y}\left[\left(\frac{\partial p}{\partial x}\right)^2 - \left(\frac{\partial p}{\partial y}\right)^2\right]\right\}_0 \tag{3.7}$$

Определитель D из коэффициентов при вторых производных давления в выражениях (3.6), (3.7) для B и C, а также в формуле (2.4), накладывающей связь на вторые производные давления, которая должна выполняться при любом внешнем течении, равен

$$D = (-1 + M_0^2 \cos^2\varphi_0)(\operatorname{tg}\varphi_0) / \cos^2\varphi_0 \tag{3.8}$$

Из (3.8) следует, что $D = 0$, если $\varphi_0 = 0$ или $M_0^2 \cos^2\varphi_0 = 1$. В первом случае в рассматриваемой точке направления скорости и градиента давления совпадают. При этом параметр C просто равен нулю. В рассматриваемой точке в первом приближении нет поперечного течения, поэтому изменения профиля основного течения при движении по нормали к grad p не оказывают влияния на профиль скорости в рассматриваемой точке. Во втором случае проекция скорости на направление градиента давления равна скорости звука. Такие точки в потоке являются исключительными.

Поэтому из (3.8) следует, что параметры B и C независимы и не выражаются через параметры первого и нулевого порядка всюду, кроме особых точек.

4. Оценим возможную величину безразмерного параметра, образованного из B, по сравнению с параметром отрыва двумерного пограничного слоя ξ [3]. Так как размерность $[B] = [p] / [L]^2$, где L имеет размерность длины, то

$$\beta = Bz_0^2 / \rho_0 V_0^2 \tag{4.1}$$

где z_0 — характерный размер пограничного слоя, будет безразмерным параметром. Рассмотрим для оценки обтекание несжимаемой жидкостью цилиндра, стоящего на пластине. Если поместить начало координат на пластине в центре цилиндра, ось x направить по направлению скорости набегающего потока, ось y перпендикулярно к ней, то для величины модуля скорости потока будет справедливо выражение [2]

$$V^2 = V_\infty^2 [1 + 2R^2 / (x^2 + y^2) + R^2 \ (R^2 - 4 \ x^2) / (x^2 + y^2)^2] \tag{4.2}$$

где R — радиус цилиндра, V_∞ — значение модуля скорости набегающего потока. При $y = 0$ на оси симметрии направления векторов grad p и $\mathbf{V}$ совпадают, $\cos \varphi_0 = 1$, $\operatorname{tg} \varphi_0 = 0$, $(\partial p / \partial y)_0 = 0$, $(\partial p / \partial x)_0 = \pi_0$ и $B = -(\partial^2 p / \partial y^2)_0$, $C = 0$.

Используя интеграл Бернулли и (4.2), находим, что на оси симметрии

$$B = -2 \ \rho V_\infty^2 R^2 \ (R^2 - 3 \ x^2) / x^6 \tag{4.3}$$

Обтекание цилиндра, стоящего на пластине экспериментально исследовалось в работе [4]. По данным этой работы точка отрыва на оси симметрии находится на расстоянии от центра цилиндра, равном примерно $^5/_3$ R. При этом из (4.2), (4.3) получаем, что

$$BR^2 / \rho V^2 \approx 0.7 \tag{4.4}$$

Длина пластины L от начала до точки отрыва была равной $L \approx 16 \ R$. Число Рейнольдса $Re \approx 4 \cdot 10^6$. При этом в районе отрыва отношение толщины вытеснения турбулентного пограничного слоя к радиусу цилиндра будет порядка 0.1. В таком случае, принимая за характерный размер в формуле (4.1) величину толщины вытеснения δ^*, получим, учитывая (4.4), что $\beta \approx 0.018$. Таким образом, порядок величины β такой же, как и порядок величины критерия отрыва плоского турбулентного награчничного слоя [3]. Последнее подтверждает то, что эффекты, связанные с поперечным течением, могут играть при известных условиях существенную роль при отрыве трехмерного пограничного слоя.

Для ответа на вопрос о том, не играют ли существенную роль и параметры, образованные на основе производных давления более высокого порядка, оценим величину параметра $(\partial^4 p / \partial y^4) \ \delta^{*4} / \rho V^2$ (третья производная $\partial^3 p / \partial y^3$ на оси симметрии равна нулю). Из (4.2) и интеграла Бернулли находим, что на оси симметрии

$$\partial^4 p / \partial y^4 = \rho V_\infty^4 R^2 \ (120 / x^6 - 36 \ R^2 / x^8) \tag{4.5}$$

Принимая, как и раньше, $x = -5R / 3$ и $\delta^* / R = 0.1$, получим из (4.5), что в районе точки отрыва

$$(\partial^4 p / \partial y^4) \ \delta^{*4} / \rho V^2 \approx 0.001$$

т. е. на порядок величины меньше β и ξ. Легко подсчитать, что с увеличением порядка производной величины соответствующих параметров быстро убывают.

Таким образом, в правую часть критерия отрыва, полученного в [1], в общем случае должны входить с некоторыми коэффициентами параметры β и $\gamma = Cz_0^2 / \rho_0 V_0^2$. Ответ на вопрос, сколь велико влияние на отрыв этих параметров, должны дать эксперименты, которых в настоящее время недостаточно. Имеющиеся работы (например, [4]) позволяют только сделать заключение, что значение параметра отрыва в трехмерном случае может быть существенно больше, чем при двумерном отрыве.

Поступила 12 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бам-Зеликович Г. М.* О критериях отрыва трехмерного пограничного слоя. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 4.
2. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. I. Л.— М., Гостехиздат, 1948.
3. *Бам-Зеликович Г. М.* Расчет отрыва пограничного слоя. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 12.
4. *Hornung H. G., Joubert P. N.* The mean velocity profile in three-dimensional turbulent boundary layers. J. Fluid Mech., 1963, vol. 15, pt. 3.