

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ ОКОЛОЗВУКОВЫЕ ТЕЧЕНИЯ С КОСЫМ СКАЧКОМ УПЛОТНЕНИЯ

А. П. Цветков

(Саратов)

Околозвуковые атомодельные течения с ударной волной в виде обобщенной параболы $\bar{x} / \bar{y}^{-n} = \text{const}$ (\bar{x} , \bar{y} — декартовы координаты, n — показатель атомодельности течения) впервые изучались в [1, 2].

Ниже рассматриваются условия, при которых ударная волна прямолинейна. Наряду с прямым скачком (такие примеры построены в [3, 4]) возможен косой скачок, где свойство перпендикулярности ударной волны и линии тока в каждой точке не выполняется. В качестве примера построено семейство течений, обобщающих результаты [4].

Значение проекций вектора скорости при условии, что скорость потока мало отличается от звуковой, можно представить в виде [5]

$$(1) \quad \bar{v}_x = a_* (1 + \varepsilon v_x), \quad \bar{v}_y = a_* \varepsilon^{1/2} v_y, \quad \bar{x} = x, \quad \bar{y} = \varepsilon^{-1/2} y$$

Здесь ε — малая величина; a_* — критическая скорость звука, v_x , v_y — безразмерные компоненты возмущения звукового потока, которые удовлетворяют уравнениям

$$(2) \quad -v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial v_x}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial x} = 0$$

Автомодельные решения системы (2) имеют вид [6]

$$(3) \quad v_x = |y|^{2(n-1)} f(\xi), \quad v_y = |y|^{2(n-1)} g(\xi), \quad \xi = x |y|^{-n} \operatorname{sgn} y$$

После подстановки (3) в (1) получаются два обыкновенных дифференциальных уравнения [7]

$$(4) \quad f \frac{df}{d\xi} + n\xi \frac{dg}{d\xi} = 3(n-1)g, \quad n\xi \frac{df}{d\xi} + \frac{dg}{d\xi} = 2(n-1)f$$

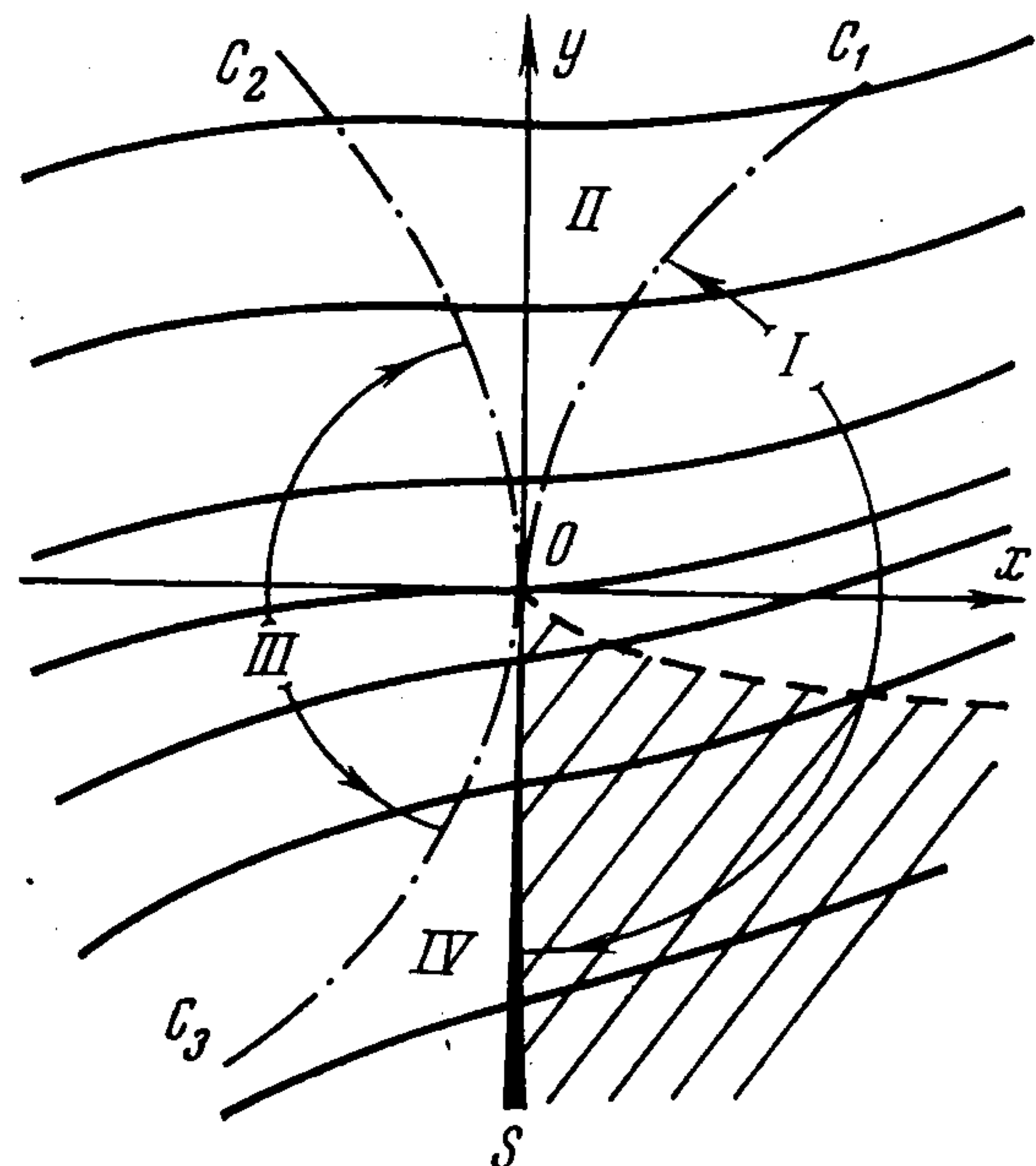
На скачке уплотнения должны удовлетворяться условия [2]

$$(5) \quad f_1 + f_2 = 2n^2 \xi^2, \quad g_2 - g_1 = -n\xi (f_2 - f_1), \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi$$

Индексы 1 и 2 относятся к величинам по разные стороны ударного фронта. Анализ соотношений (5) показывает, что возможны скачки следующих типов: 1) искривленный ($\xi \neq 0$, $n \neq 1$), 2) прямолинейный: а) $\xi = 0$, $g_1 = g_2 = 0$ — прямой скачок; б) $\xi = 0$, $g_1 = g_2 \neq 0$ или $\xi \neq 0$, $n = 1$ — косой скачок.

Можно предположить, что скачок уплотнения, замыкающий местную сверхзвуковую зону, которая возникает на профиле при больших дозвуковых скоростях, является косым. Используя схему течения, предложенную в [4], рассмотрим множество течений такого типа. Для этого иссле-

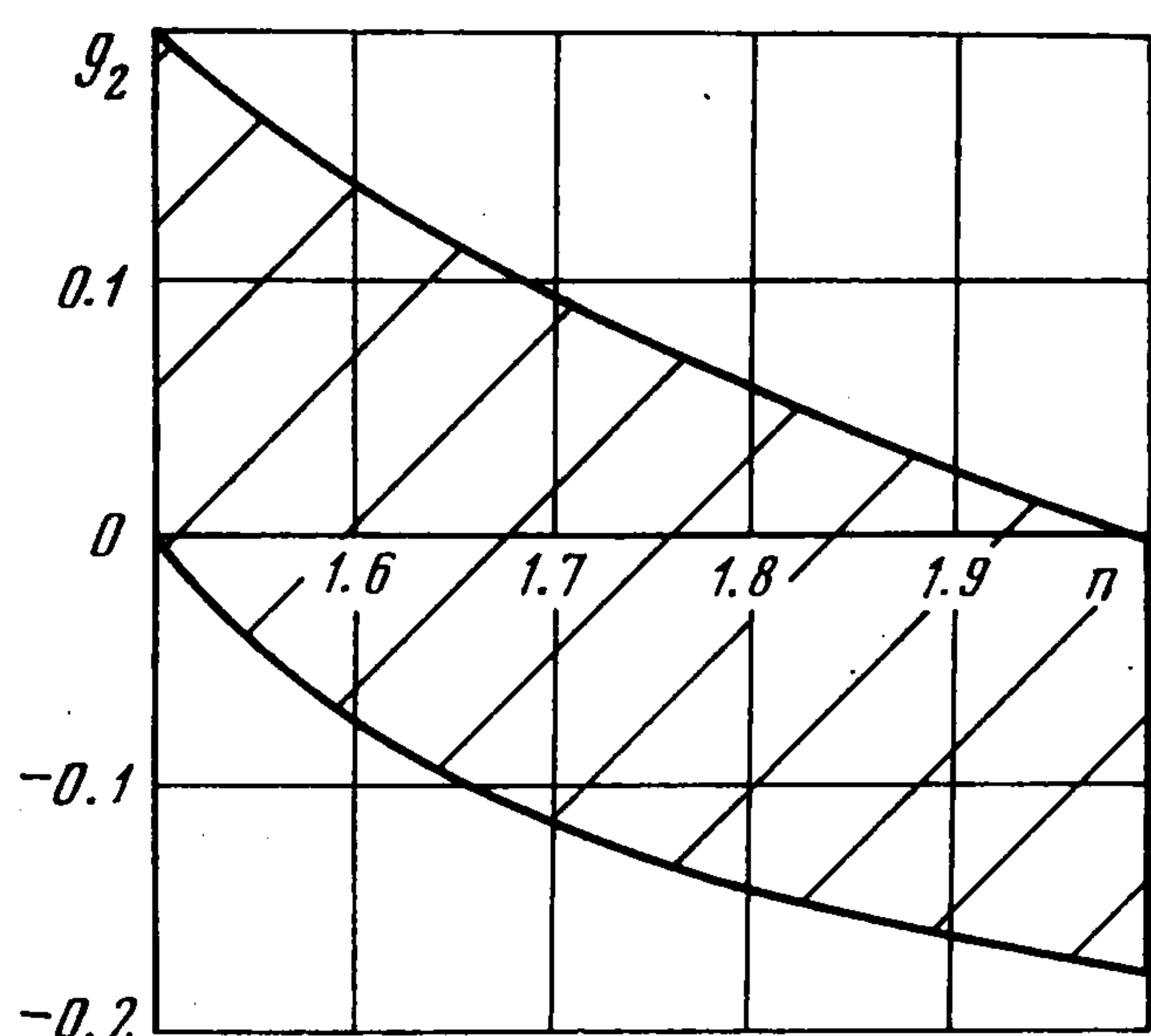
дую некоторую автомодельную задачу Коши для системы (4). Начальные данные будем задавать на задней стороне ударного фронта, т. е. f_2 при $\xi_2 = 0$ можно положить равным некоторому, постоянному для всех случаев значению, например $-0,5$. Значение показателя автомодельности n и



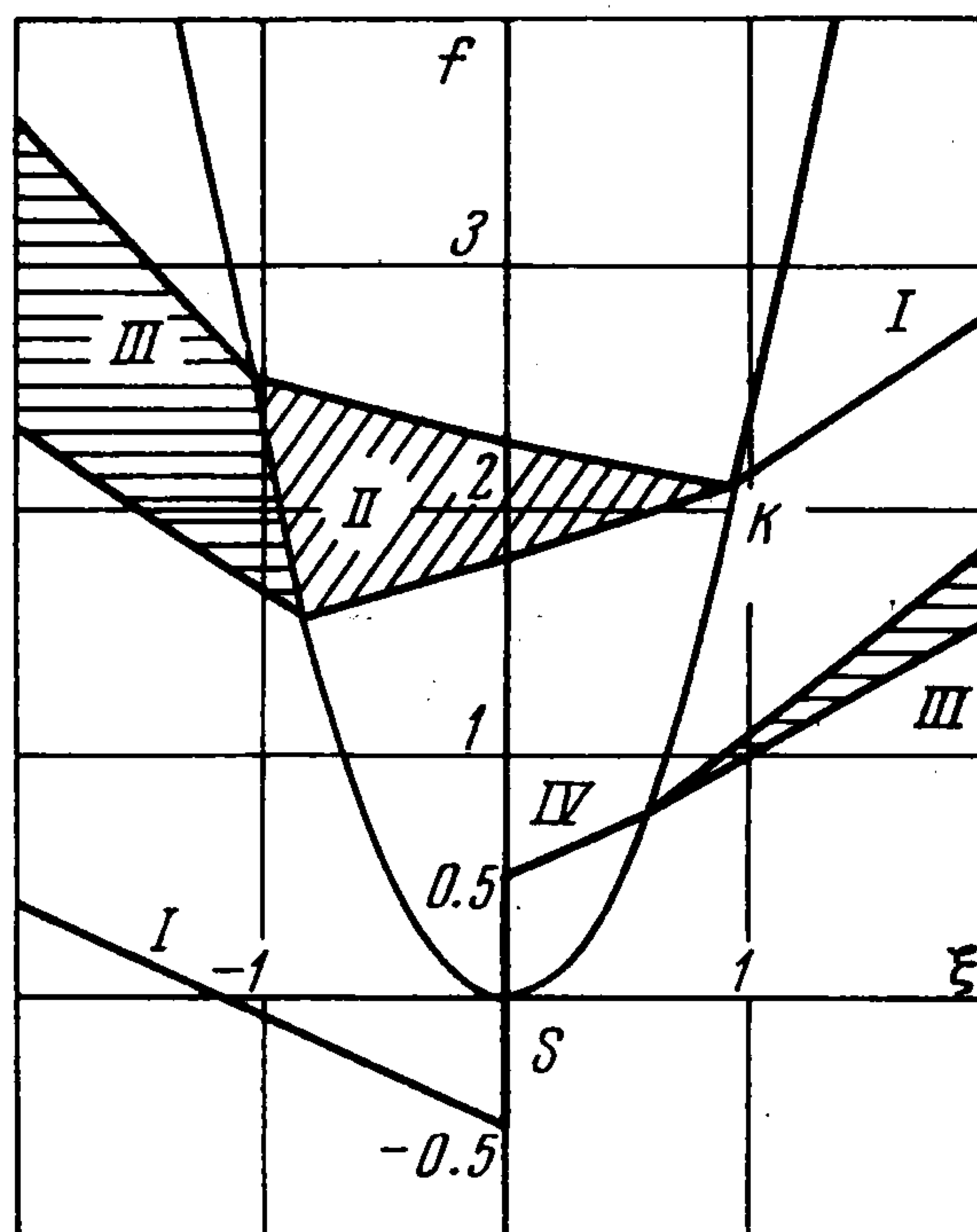
Фиг. 1

g_2 должны удовлетворять условию отсутствия предельных линий в областях I и IV (см. фиг. 1, где сплошными линиями показаны линии тока; область, в которой число Маха $M < 1$, заштрихована). Решения в областях II и III строятся с учетом последующей склейки вдоль предельных характеристик C_i ($i = 1, 2, 3$). На фиг. 2 заштрихованной областью показано множество допустимых значений n, g_2 . Примеру Ф. И. Франкля [4] отвечает точка $n = 3/2, g_2 = 0$ этой области. Отрезок $g_2 = 0$ ($3/2 \leq n < 2$) соответствует течениям с прямым скачком уплотнения. При $g_2 > 0$ касательная составляющая скорости на ударной волне направлена к точке пересечения скачка со звуковой линией. Это означает, что в точке O

происходит затухание скачка уплотнения (фиг. 1). Отрицательные значения g_2 , наоборот, соответствуют случаю возникновения скачка на звуковой линии; при этом в отличие от фиг. 1 звуковая линия расположена в первом квадранте и касается ударной волны.



Фиг. 2



Фиг. 3

На предельных характеристиках течение неаналитично. Заметим, что только при $n = 3/2$ задание начальных данных f_2, g_2 однозначно определяет течение в окрестности начала координат. При других значениях n оно однозначно определено лишь в областях I и IV.

На фиг. 3 показаны результаты расчета множества рассматриваемых течений при $n = 1.55$ и $g_2 = 0.1$. Совокупность интегральных кривых, описывающих возможные течения в области II, ограничена кривыми, которые в окрестности точки K (образ предельной характеристики C_1 для нижней границы (фиг. 3) и C_2 для верхней) определяются асимптотическим разложением вида [8]

$$f = n^2 + d_1 (\xi - \xi_k)^2 + d_2 (\xi - \xi_k)^2 + \dots$$

При приближении g_2 к своему максимальному значению (при данном n) точка K стремится по параболе $f = n^2 \xi^2$ в бесконечность; это означает, что верхняя граница области на фиг. 2 не включается в множество допустимых значений.

Изменение угла наклона линии тока к оси x при переходе через косой скачок определяется формулой

$$\theta_2 - \theta_1 = 2\varepsilon^{1/2} v_x v_y$$

Следует отметить невозможность построения в классе автомодельных решений течения без предельных линий (в примере [3] имеются предельные линии) и с прямолинейной ударной волной при условии, что из конца скачка уходит одна характеристика.

Автор благодарит С. В. Фальковича и И. А. Чернова за ценные советы и указания.

Поступила 20 IX 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. Barisch D. T., Guderley K. Asymptotic forms of shock waves in flows over symmetrical bodies at Mach 1. J. Aeronaut. Sci., 1953, vol. 20, No. 7.
3. Франкль Ф. И. Пример околосзвукового течения газа с областью сверхзвуковых скоростей, ограниченной вниз по течению скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1955, т. 19, вып. 4.
4. Франкль Ф. И. Новый пример плоскопараллельного околосзвукового течения с прямым скачком уплотнения, оканчивающимся внутри течения. ПММ, 1959, т. 23, вып. 3.
5. Karman Th. Von. The similarity law of transonic flow. J. Math. and Phys., 1947, vol. 26, No. 3.
6. Рыжов О. С. О течениях в окрестности поверхности перехода в соплах Лавалья. ПММ, 1958, т. 82, вып. 4.
7. Лифшиц Ю. Б., Рыжов О. С. Об асимптотическом типе плоскопараллельного течения в окрестности центра сопла Лавалья. Докл. АН СССР, 1964, т. 154, № 2.
8. Рыжов О. С. Исследование трансзвуковых течений в соплах Лавалья. М., Изд-во ВЦ АН СССР, 1965.