Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 538.4 + 532.529

МОДЕЛЬ ВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ ЖИДКОСТИ С УЧЕТОМ ЭФФЕКТОВ ПОЛЯРИЗАЦИИ И НАМАГНИЧИВАНИЯ

А. Г. Цыпкин, А. А. Штейн

(Москва)

На основании вариационного уравнения [1] дается замкнутая система уравнений, описывающая поведение вязкой сжимаемой многокомпонентной жидкости. В число определяющих параметров наряду с плотностью, энтропией и массовыми концентрациями компонент входят векторы поляризации и намагниченности отдельных компонент. В соответствии с подходом, развитым в работах [2-4], смесь рассматривается как одна сплошная среда, причем наличие различных компонент приводит к появлению дополнительных внутренних степеней свободы, характеризующих данную среду. Предполагается, что между компонентами смеси отсутствуют химические взаимодействия и фазовые переходы [1].

1. Основные предположения и определяющие параметры модели. Рассмотрим модель среды, состоящей из N материальных континуумов, которые в дальнейшем будем называть компонентами смеси, заполняющих один и тот же объем евклидова трехмерного пространства. Положим, что с каждой компонентой смеси связана своя сопутствующая система координат, вмороженная в среду, в которой координаты точки будем обозначать через ξ_i^β (здесь и далее принято, что греческие индексы пробегают значения 1, 2, 3, а латинские строчные индексы означают принадлежность отмеченной величины к соответствующей компоненте смеси и пробегают значения 0, 1, 2, 3, . . ., N — 1). В системе координат наблюдателя с векторами базиса $э_\alpha$ и ковариантными компонентами метрического тензора, обозначаемыми через $g_{\alpha\beta}$, координаты точки обозначим через x^α. Тогда закон движения i-й компоненты смеси задается функциями: $x^\alpha = x^\alpha(\xi_i^\beta, t)$. где t — абсолютное время. Компоненты векторы скорости i-й компоненты v_i^α и плотность i-й компоненты смеси ρ_i определим равенствами

$$v_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha(\xi_i^\beta, t)}{\partial t}\bigg|_{\xi_i^\beta=\text{const}} \tag{1.1}$$

$$\rho_i = \frac{\omega_i(\xi_i^\beta)}{\sqrt{g_i\hat{}}}, \quad g_i\hat{} = \det\|g_{\hat{i\alpha\beta}}\|$$

$g_{\hat{i\alpha\beta}}$ — компоненты метрического тензора в сопутствующей системе координат, связанной с i-й компонентой смеси. Предполагается, что химические

[1] Модель вязкой многокомпонентной жидкости с учетом диффузии и химических реакций с использованием базисного вариационного уравнения подробно рассмотрена в работе авторов «Модели сплошных сред в ньютоновской механике». Отчет НИИ механики МГУ № 1468, 1973 г.

реакции или фазовые переходы между компонентами отсутствуют. В противном случае параметры ω_i нельзя было бы полагать функциями только сопутствующих координат.

Плотность ρ и компоненты вектора скорости v^α для смеси в целом определяются формулами

$$\rho = \sum_{i=0}^{N-1} \rho_i, \qquad v^\alpha = \sum_{i=0}^{N-1} c_i v_i^\alpha \tag{1.2}$$

где $c_i = \rho_i / \rho$ — массовая концентрация i-й компоненты.

В дальнейшем будет использоваться также система координат, сопутствующая для смеси в целом, которую можно ввести посредством дифференциальных соотношений

$$v^\alpha = \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{\xi^\beta=\mathrm{const}} = \sum_{i=0}^{N-1} c_i \left.\frac{\partial x^\alpha}{\partial t}\right|_{\xi_i^\beta=\mathrm{const}} \tag{1.3}$$

Константы интегрирования ξ^β системы уравнений (1.3) по определению являются сопутствующими координатами для смеси в целом.

Тогда массовая плотность смеси в целом представима в виде $\rho = f(\xi^\beta) g^{\wedge -1/2}$, $g^\wedge = \det \| g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}} \|$. Здесь $g_{\hat{\alpha}\hat{\beta}}$ — компоненты метрического тензора, относящиеся к системе координат, сопутствующей смеси в целом, а $f(\xi^\beta)$ — функция лишь координат, сопутствующих смеси в целом.

С учетом определения скорости смеси (1.2) и определений (1.1) смещения i-й компоненты $d_i x^\alpha$ и среды в целом dx^α, рассматриваемые в одной и той же точке эйлерова пространства с координатами x^α в один и тот же момент времени t, связаны соотношениями

$$dx^\alpha = \sum_{i=0}^{N-1} c_i d_i x^\alpha \tag{1.4}$$

В силу соотношений (1.4) и очевидного равенства

$$d_i x^\alpha = dx^\alpha + (v_i^\alpha - v^\alpha)\, dt$$

для дифференциала любой тензорной функции с компонентами $\chi(x^\alpha, t)$, определенными в системе координат наблюдателя и рассматриваемой в одной и той же точке эйлерова пространства, в один и тот же момент времени t имеет место равенство

$$d_i \chi(x^\alpha, t) = d\chi + \nabla_\alpha \chi\, (v_i^\alpha - v^\alpha)\, dt$$

При построении модели смеси, состоящей из N компонент, каждая из которых может в разной степени поляризоваться и намагничиваться, в качестве характеристик этих процессов (которые в дальнейшем будем считать обратимыми) используем трехмерные векторы поляризации $\mathbf{P}_i^*$ и намагниченности $\mathbf{M}_i^*$, рассчитанные на единицу объема i-й компоненты. Эти векторы вводим в собственной инерциальной системе координат, относящейся к i-й компоненте смеси, с контравариантными компонентами

$P_i^{*\alpha}$ и $M_i^{*\alpha}$ (здесь и далее под «собственной» системой координат понимается инерциальная система координат в смысле работы [1]). Векторы и тензоры (а также их компоненты), вводимые в этой системе координат, будем обозначать звездочкой. Кроме того, будем считать, что одна из компонент смеси (например, отвечающая номеру $i = 0$) может иметь объемный электрический свободный заряд с плотностью ρ_{e0} и в этой компоненте могут течь токи проводимости, характеризуемые вектором объемной плотности электрического тока проводимости i_0. Отметим, что для плотности свободного электрического заряда нулевой компоненты смеси ρ_{e0} справедливо уравнение неразрывности, которое в системе координат наблюдателя имеет вид

$$\frac{\partial \rho_{e0}}{\partial t} + \nabla_\alpha (i_0{}^\alpha + \rho_{e0} v^\alpha) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь ∇_α — оператор ковариантного дифференцирования в системе координат наблюдателя (в последнем равенстве и в дальнейшем будем полагать, что по верхним и нижним совпадающим греческим индексам проводится суммирование). Для остальных компонент по определению положим ρ_{ek}, $i_k = 0$ (при $k \neq 0$). Положим, что как скорости среды в целом, так и скорости отдельных компонент смеси достаточно малы по сравнению со скоростью света в вакууме, т. е. в дальнейшем будем пренебрегать членами порядка v / c и v_i / c.

В качестве характеристик электромагнитного поля в смеси, рассматриваемой как единая среда, возьмем вектор электрической напряженности **E** и вектор магнитной индукции **B** в системе координат наблюдателя с контравариантными компонентами E^α и B^α соответственно. В дальнейшем также будем пользоваться контравариантными компонентами векторов $\mathbf{P}_i^*$, $\mathbf{M}_i^*$, вычисленными относительно системы координат наблюдателя, которые будем обозначать через $P_i{}^\alpha$, $M_i{}^\alpha$, причем эти компоненты связаны с контравариантными компонентами $P_i^{*\alpha}$, $M_i^{*\alpha}$ обычными формулам преобразований компонент векторов, что является следствием предположения о малости членов порядка v_i / c.

Вводя векторный и скалярный потенциалы электромагнитного поля в среде, для компонент векторов E^α и B^α можно записать равенства

$$E_\alpha = -\frac{1}{c}\frac{\partial A_\alpha}{\partial t} - \nabla_\alpha \varphi, \qquad B^\alpha = \varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta A_\gamma \tag{1.6}$$

Здесь $\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}$ — контравариантные компоненты антисимметричного по всем индексам тензора Леви — Чивита. Из определений (1.6) следует, что векторы **E** и **B** удовлетворяют второй паре уравнений Максвелла, которые необходимо добавлять к полученной ниже системе уравнений

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma} \nabla_\beta E_\gamma = -\frac{1}{c}\frac{\partial B^\alpha}{\partial t}, \qquad \nabla_\alpha B^\alpha = 0 \tag{1.7}$$

2. Вариационное уравнение. Введем вариации функций

$$x^\alpha (\xi^\mu, t),\ A_\alpha (\xi^\mu, t),\ \varphi (\xi^\mu, t),\ S (\xi^\mu, t),\ \xi_i{}^\alpha (\xi^\mu, t)$$

обозначаемые через δx^α, δA_α, $\delta\varphi$, δS, $\delta\xi_i{}^\alpha$ (символом δ будем обозначать вариации величин, являющихся функциями сопутствующих координат смеси в целом и времени). Для любой функции $\psi(\xi^\mu, t)$ справедливо следующее определение вариации:

$$\delta\psi(\xi^\mu, t) = \psi'(\xi^\mu, t) - \psi(\xi^\mu, t) \tag{2.1}$$

где штрихом обозначено значение варьированной функции. Определим вариации функций, связанных с сопутствующей системой координат i-й компоненты $x^\alpha(\xi_i{}^\mu, t)$, $\hat{P}_i{}^\alpha(\xi_i{}^\mu, t)$ и $\hat{M}_i{}^\alpha(\xi_i{}^\mu, t)$ равенствами

$$\begin{aligned} &\delta_i x^\alpha = x^{\alpha\prime}(\xi_i{}^\mu, t) - x^\alpha(\xi_i{}^\mu, t) \\ &\delta_i \hat{P_i}{}^\alpha = \hat{P_i}{}^{\alpha\prime}(\xi_i{}^\mu, t) - \hat{P_i}{}^\alpha(\xi_i{}^\mu, t) \\ &\delta_i \hat{M_i}{}^\alpha = \hat{M_i}{}^{\alpha\prime}(\xi_i{}^\mu, t) - \hat{M_i}{}^\alpha(\xi_i{}^\mu, t) \end{aligned} \tag{2.2}$$

Между различным образом определенными вариациями координат (см. формулы (2.1) и (2.2)) имеет место зависимость, следующая из их определений

$$\delta_i x^\alpha = \delta x^\alpha - \delta\eta_i{}^\alpha \qquad \left(\delta\eta_i{}^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial\xi_i{}^\mu}\,\delta\xi_i{}^\mu\right)$$

а вариации $\delta\xi_i{}^\alpha$ связаны соотношениями

$$\sum_{i=0}^{N-1} c_i\delta\eta_i{}^\alpha = 0$$

Используя приведенные выше вариации указанных функций, нетрудно получить вариации функций $E^\alpha(\xi^\mu, t)$, $B^\alpha(\xi^\mu, t)$ (учитывая соотношения (1.6)), а также вариации плотностей $\rho_i(\xi^\mu, t)$, концентраций $c_i(\xi^\mu, t)$ и компонент векторов скоростей $v^\alpha(\xi^\mu, t)$ и $v_i{}^\alpha(\xi^\mu, t)$.

В основу построения модели смеси, состоящей из N компонент, положим вариационное уравнение, взятое в виде

$$\delta\int_{V_4}\Lambda d\tau_4 + \delta W^* + \delta W = 0, \qquad \Lambda = \Lambda_1 + \Lambda_2 \tag{2.3}$$

Здесь Λ — суммарный лагранжиан электромагнитного поля и среды, δW^* — некоторый задаваемый функционал, о способе выбора и виде которого будет сказано ниже, δW — функционал, определяемый по заданным Λ и δW^* на трехмерной границе Σ_3 произвольного четырехмерного объема V_4. Для лагранжиана электромагнитного поля в среде Λ_1 примем выражение

$$\begin{aligned} \Lambda_1 = &\frac{1}{8\pi}\left(E^\alpha E^\beta g_{\alpha\beta} - B^\alpha B^\beta g_{\alpha\beta}\right) + \\ &+ E^\alpha \sum_{i=0}^{N-1} P_i{}^\beta g_{\alpha\beta} + B^\alpha \sum_{i=0}^{N-1} M_i{}^\beta g_{\alpha\beta} \end{aligned}$$

Лагранжиан среды Λ_2 в дальнейшем будем полагать равным $\rho(K - U)$, где U — внутренняя энергия единицы массы среды, K — кинетическая энергия единицы массы среды, равная сумме кинетических энергий макроскопических движений отдельных компонент

$$K = \sum_{i=0}^{N-1} \frac{c_i v_i^2}{2}$$

Принятый вид кинетической энергии, выражающий собой ее аддитивность, во многих случаях оказывается недостаточно общим или может быть упрощен (например, в ряде случаев в качестве кинетической энергии единицы массы можно выбирать величину $v^2 / 2$). Дальнейшие результаты без труда обобщаются на случай произвольной зависимости лагранжиана Λ_2 от соответствующих аргументов (таким образом могут быть учтены, например, мелкомасштабные движения отдельных компонент). Отметим, что принятый в данной работе вид кинетической энергии приводит к наиболее естественному виду уравнений импульсов для отдельных компонент.

В дальнейшем предполагается, что плотность внутренней энергии смеси, рассматриваемой как среды в целом, является функцией плотностей отдельных компонент ρ_i, энтропии S, контравариантных компонент векторов поляризации π_i^α и намагниченности m_i^α, рассчитанных на единицу массы i-й компоненты смеси. (Компоненты векторов π_i^α и m_i^α связаны с компонентами векторов P_i^α и M_i^α равенствами $P_i^\alpha = \rho_i\pi_i^\alpha$, $M_i^\alpha = \rho_i m_i^\alpha$). Кроме указанных выше аргументов, функция плотности внутренней энергии среды зависит от компонент метрического тензора в системе координат наблюдателя $g_{\alpha\beta}$ и некоторых постоянных K_B, характеризующих физические свойства смеси (вместо аргументов ρ_i в качестве аргументов внутренней энергии можно брать величины c_i и ρ).

В данной работе вид зависимости функции плотности внутренней энергии от указанного набора аргументов не фиксируется. В частности, ее можно выбирать квадратичной формой компонент векторов поляризации и намагниченности, причем эти векторы могут входить только через суммарные (для смеси в целом) векторы поляризации и намагниченности. Коэффициенты таких форм могут являться функциями плотностей компонент (или плотности смеси в целом и концентраций c_i). Как отмечено выше, в число определяющих параметров плотности внутренней энергии смеси входит энтропия S, рассчитанная на единицу массы смеси в целом. В данной модели энтропия, приходящаяся в единице массы смеси в целом на долю i-й компоненты, в число определяющих параметров модели не включается. Это связано с тем, что в рассматриваемой модели смеси вводится единственная температура T, а температуры компонент T_i считаются по определению равными температуре смеси в целом в той же точке пространства и в тот же момент времени.

Будем иметь в виду обратимость процессов поляризации и намагничивания, но предполагать, что компоненты смеси могут обладать вязкими свойствами. Считая, что обмен энергией между электромагнитным полем и смесью определяется выделением джоулева тепла в смеси и процессами поляризации и намагниченности, второй закон термодинамики для смеси в целом можно записать в виде

$$\rho T dS = \sum_{i=0}^{N-1} \tau_i^{\alpha\beta} \nabla_\beta v_{i\alpha} dt - \sum_{i=0}^{N-1} G_{i\alpha} J_i^\alpha dt + E_\alpha i_0^\alpha dt + dQ_0 \tag{2.4}$$

$$J_i^\alpha = \rho_i (v_i^\alpha - v^\alpha)$$

Здесь первое слагаемое в правой части — работа вязких напряжений на градиентах перемещений компонент, второй член представляет собой работу внутренних массовых обобщенных сил G_i на относительных смещениях компонент, отвечающих (наряду с обобщенными силами $\tau_i^{\alpha\beta}$) за необратимость процессов, происходящих в среде. Через J_i^α обозначены компоненты векторов диффузии компонент, $dq_0 = \rho^{-1} dQ_0$ — внешний приток тепловой энергии к единице массы в целом и не связанный с переносом энергии в процессе диффузии и с воздействием электромагнитного поля на среду.

В области непрерывного движения в функционал δW^* будем включать:

1. Возможную работу $\delta A^{(e)}$ внешних, по отношению к системе среда — электромагнитное поле, объемных сил с компонентами $F_{i\alpha}$ на возможных перемещениях компонент смеси $\delta_i x^\alpha$.

2. В предположении, что второй закон термодинамики (2.4) выполняется для возможных перемещений и возможных изменений характеристик среды, в выражение для функционала δW^* включается возможный внешний приток энергии к среде (не связанный с притоком энергии за счет процессов диффузии и выделения джоулева тепла).

3. Члены, обусловленные приращением некомпенсированного тепла dQ' за счет диссипативных эффектов, связанных с выделением джоулева тепла в среде.

Учитывая сказанное выше, зададим функционал следующей формулой (описанные выше слагаемые приведены в преобразованном по формулам (2.2) виде):

$$\delta W^* = \int_{V_4} \Big\{ \rho T \delta S - \sum_{i=0}^{N-1} \tau_{i\alpha}{}^\beta \nabla_\beta \delta_i x^\alpha - \sum_{i=0}^{N-1} (F_{i\alpha} + \rho_i G_{i\alpha}) \delta \eta_i^\alpha + \tag{2.5}$$

$$+ \sum_{i=0}^{N-1} F_{i\alpha} \delta x^\alpha + \frac{1}{c} j_0^\alpha \delta_{0L} A_\alpha - \rho_{e0} \delta_{0L} \varphi \Big\} d\tau_4$$

Здесь через $\delta_{0L} A_\alpha$ и $\delta_{0L}\varphi$ обозначены абсолютные вариации компонент векторного и скалярного потенциалов, для которых справедливы соотношения

$$\delta_{0L} A_\alpha = \delta A_\alpha - \nabla_\beta A_\alpha \delta \eta_0^\beta + A_\beta \nabla_\alpha \delta_0 x^\beta$$

$$\delta_{0L} \varphi = \delta \varphi - \nabla_\beta \varphi \delta \eta_0^\beta - \frac{1}{c} A_\beta \frac{\partial \delta_0 x^\beta}{\partial t}$$

причем при замене вариаций на действительные приращения абсолютные приращения компонент векторов приобретают смысл приращений компонент векторов относительной сопутствующей системы координат нулевой компоненты смеси, j_0^α — компоненты полного тока нулевой компоненты смеси в системе координат наблюдателя, которые связаны с током проводимости нулевой компоненты и свободным зарядом нулевой компоненты равенствами

$$j_0^\alpha = i_0^\alpha + \rho_{e0} v_0^\alpha$$

3. Система уравнений, определяющая модель смеси. Из вариационного уравнения (2.3) с учетом сделанных предположений о виде функций плотности внутренней энергии смеси как среды в целом U и плотности кинетической энергии смеси K, а также вида функционала δW^* в предположении произвольности некоторых систем вариаций можно получать замкнутые системы уравнений, определяющие модель смеси, состоящей из N компонент, каждая из которых может в различной степени поляризоваться и намагничиваться. В качестве одной из возможных систем независимых вариаций выберем следующие вариации, произвольность которых будем предполагать:

$$\delta A_\alpha,\quad \delta\varphi,\quad \delta_i x^\alpha,\quad \delta S,\quad \delta_i \pi_i{}^{\hat{}\alpha},\quad \delta_i m_i{}^{\hat{}\alpha} \tag{3.1}$$

При таком выборе системы независимых вариаций из условия равенства нулю объемного интеграла вариационного уравнения получим следующую систему уравнений Эйлера:

$$\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}\nabla_\beta H_\gamma = \frac{1}{c}\frac{\partial D^\alpha}{\partial t} + \frac{4\pi}{c} j_0^\alpha,\quad \nabla_\alpha D^\alpha = 4\pi\rho_{e0} \tag{3.2}$$

которые представляют собой первую пару уравнений Максвелла, записанных в системе координат наблюдателя, а величины D^α и H_γ определены равенствами

$$D^\alpha = E^\alpha + 4\pi \sum_{i=0}^{N-1} P_i^\alpha,\quad H_\gamma = B_\gamma - 4\pi \sum_{i=0}^{N-1} M_{i\gamma}$$

$$\rho_i a_{i\alpha} = \nabla_\beta p_{i\alpha}{}^\beta + F_{i\alpha} + F_{Mi\alpha} + \rho_i \sum_{j=0}^{N-1} R_{j\alpha} - \rho R_{i\alpha} + \rho_i G_{i\alpha} \tag{3.3}$$

представляющими собой уравнения импульсов для i- й компоненты смеси. Через $a_{i\alpha}$ обозначены ковариантные компоненты вектора ускорения i-й компоненты смеси, которые связаны с компонентами вектора скорости i-й компоненты смеси равенствами

$$a_{i\alpha} = \frac{\partial v_{i\alpha}}{\partial t} + v_i{}^\gamma \nabla_\gamma v_{i\alpha}$$

Тензорные компоненты $p_{i\alpha}{}^\beta$ и $R_{i\alpha}$ определены следующими формулами:

$$p_{i\alpha}{}^\beta = -\rho\rho_i \frac{\partial U}{\partial \rho_i}\delta_\alpha{}^\beta + \rho\frac{\partial U}{\partial \pi_i{}^\alpha}\pi_i{}^\beta + \rho\frac{\partial U}{\partial m_i{}^\alpha} m_i{}^\beta + \frac{1}{2}(E_\gamma P_i{}^\gamma +$$
$$+ B_\gamma M_i{}^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta - E_\alpha P_i{}^\beta - B_\alpha M_i{}^\beta + \tau_{i\alpha}{}^\beta$$
$$R_{i\alpha} = \frac{\partial U}{\partial \rho_i}\nabla_\alpha \rho_i + \frac{\partial U}{\partial \pi_i{}^\beta}\nabla_\alpha \pi_i{}^\beta + \frac{\partial U}{\partial m_i{}^\beta}\nabla_\alpha m_i{}^\beta$$

Конкретный вид выражений для компонент $p_{i\alpha}{}^{\beta}$ и $R_{i\alpha}$ связан с выбором аргументов внутренней энергии смеси в целом и с фиксированием набора независимых вариаций. Разделение суммарной силы, действующей на i-ю компоненту, на объемную и поверхностную связано, вообще говоря, с дополнительными предположениями. Через $F_{Mi\alpha}$ обозначены ковариантные компоненты вектора трехмерной объемной пондеромоторной силы, (что соответствует гипотезе Минковского о виде четырехмерного тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде). Для $F_{Mi\alpha}$ справедливы выражения

$$F_{Mi\alpha} = \rho_{ei}E_\alpha + \frac{1}{c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma}j_i{}^{\beta}B^{\gamma} + \frac{1}{2}\left(P_i{}^{\gamma}\nabla_\alpha E_\gamma - E_\gamma\nabla_\alpha P_i{}^{\gamma} + M_i{}^{\gamma}\nabla_\alpha B_\gamma - B_\gamma\nabla_\alpha M_i{}^{\gamma}\right) \tag{3.4}$$

Уравнение состояния, представляющее собой определение температуры

$$T = \partial U/\partial S \tag{3.5}$$

Уравнения состояния, дающие связь векторов напряженности электрического поля и магнитной индукции в среде с определяющими параметрами модели, которые в проекции на оси системы координат наблюдателя имеют вид

$$c_iE_\alpha = \frac{\partial U}{\partial \pi_i{}^{\alpha}}, \qquad c_iB_\alpha = \frac{\partial U}{\partial m_i{}^{\alpha}} \tag{3.6}$$

Кроме уравнений Эйлера, из вариационного уравнения (2.3) получим выражения для функционала δW, который может быть записан в виде

$$\delta W = \int\limits_{\Sigma_3}\Big\{\sum_{i=0}^{N-1}\left(P^{\beta}_{i\alpha}N_\beta + P^{4}_{i\alpha}N_4\right)\delta_i x^{\alpha} - S_\alpha{}^{\beta}N_\beta\delta x^{\alpha} - S_\alpha{}^{4}N_4\delta x^{\alpha} + \left[\frac{1}{c}j_0{}^{\alpha}A_\beta N_\alpha + \rho_{e0}A_\beta N_4\right]\delta\eta_0{}^{\beta} - \sum_{i=0}^{N-1}\rho_i\frac{v_i{}^2}{2}N_\beta\delta\eta_i{}^{\beta} - \frac{1}{4\pi}\varepsilon^{\alpha\beta\gamma}H_\gamma N_\beta\delta_L A_\alpha + \frac{1}{4\pi c}D^{\alpha}N_4\delta_L A_\alpha + \frac{1}{4\pi}D^{\alpha}N_\alpha\delta_L\varphi\Big\}\,d\sigma_3 \tag{3.7}$$

Здесь через $\delta_L A_\alpha$ и $\delta_L\varphi$ обозначены абсолютные вариации компонент векторного и скалярного потенциалов электромагнитного поля в среде относительно системы координат, собственной для смеси, рассматриваемой как среда в целом, которые связаны с обычными вариациями (относительно системы координат наблюдателя) соотношениями

$$\delta_L A_\alpha = \delta A_\alpha + A_\beta\nabla_\alpha\delta x^{\beta}$$

$$\delta_L\varphi = \delta\varphi - \frac{1}{c}A_\beta\frac{\partial\delta x^{\beta}}{\partial t}$$

и для остальных тензорных величин, входящих в выражение для функционала δW, справедливы выражения

$$P_{i\alpha}{}^{\beta} = p_{i\alpha}{}^{\beta} - \rho_i v_{i\alpha} v_i{}^{\beta}$$

$$P_{i\alpha}{}^{4} = -\rho_i v_{i\alpha}$$

$$S_\alpha{}^\beta = -\frac{1}{4\pi}(E_\alpha D^\beta + H_\alpha B^\beta) + \frac{1}{8\pi}(E_\gamma D^\gamma + H_\gamma B^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta$$

$$S_\alpha{}^4 = \frac{1}{4\pi c}\varepsilon_{\alpha\beta\gamma} D^\beta B^\gamma$$

Через $S_\alpha{}^\beta$ обозначены компоненты пространственной части тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде, согласно гипотезе Минковского, а через $S_\alpha{}^4$ обозначены компоненты плотности импульса электромагнитного поля в среде в соответствии с гипотезой Минковского о виде четырехмерного тензора энергии — импульса электромагнитного поля в среде. N_α, N_4 — компоненты вектора четырехмерной нормали к трехмерной поверхности Σ_3, ограничивающей объем V_4.

4. Уравнение энергии для смеси, рассматриваемой как среда в целом. Как следствие вариационного уравнения (2.3) и выражения для функционалов δW^* и δW, согласно формулам (2.5) и (3.7) соответственно, получим уравнение энергии для среды, которое можно записать в виде

$$\begin{aligned}
(4.1)\qquad \rho\frac{d}{dt}\left(U + \sum_{i=0}^{N-1} c_i \frac{v_i^2}{2}\right) &= \nabla_\beta (p_{i\alpha}{}^\beta v^\alpha) + (F_{M\alpha} + F_\alpha) v^\alpha + \\
&+ \nabla_\beta \sum_{i=0}^{N-1} (\pi_{i\alpha}{}^\beta J_i{}^\alpha) - \left[\tau_\alpha{}^\beta - \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(E_\gamma P_i{}^\gamma + B_\gamma M_i{}^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta\right]\nabla_\beta v^\alpha + \\
&+ \sum_{i=0}^{N-1}\left[\tau_{i\alpha}{}^\beta - \frac{1}{2}(E_\gamma P_i{}^\gamma + B_\gamma M_i{}^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta\right]\nabla_\beta (v^\alpha - v_i{}^\alpha) - \\
&- \sum_{i=0}^{N-1}(F_{i\alpha} + F_{Mi\alpha} + \rho_i G_{i\alpha})(v^\alpha - v_i{}^\alpha) + \\
&+ E_\alpha \sum_{i=0}^{N-1}\frac{d_i P_i{}^\alpha}{dt} + B_\alpha \sum_{i=0}^{N-1}\frac{d_i M_i{}^\alpha}{dt} + \rho T\frac{dS}{dt}
\end{aligned}$$

Здесь приняты следующие обозначения:

$$p_\alpha{}^\beta = \sum_{i=0}^{N-1} p_{i\alpha}{}^\beta, \qquad \pi_{i\alpha}{}^\beta = \frac{1}{\rho_i}\left[p_{i\alpha}{}^\beta - \frac{1}{2}(E_\gamma P_i{}^\gamma + B_\gamma M_i{}^\gamma)\delta_\alpha{}^\beta\right]$$

$$\tau_\alpha{}^\beta = \sum_{i=0}^{N-1}\tau_{i\alpha}{}^\beta$$

Оператор $d_i\,/\,dt$ представляет собой производную по времени относительно сопутствующей системы координат i-й компоненты смеси.

Используя второй закон термодинамики (2.4), уравнение энергии (4.1) можно переписать в виде

$$\rho d\left(U+\sum_{i=0}^{N-1} c_i\frac{v_i^2}{2}\right)=\nabla_\beta(p_\alpha{}^\beta v^\alpha)\,dt+\left(F_{M\alpha}+\sum_{i=0}^{N-1}F_{i\alpha}\right)v^\alpha\,dt+ \tag{4.2}$$

$$+\nabla_\beta\sum_{i=0}^{N-1}\left[\left(\pi_{i\alpha}{}^\beta-\frac{v_i^2}{2}\delta_\alpha{}^\beta\right)J_i{}^\alpha\right]dt+\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(E_\gamma P_i{}^\gamma+B_\gamma M_i{}^\gamma)\,\nabla_\alpha v_i{}^\alpha\,dt+$$

$$+\sum_{i=0}^{N-1}(F_{i\alpha}+F_{Mi\alpha})(v_i{}^\alpha-v^\alpha)\,dt+$$

$$+E_\alpha\sum_{i=0}^{N-1}d_iP_i{}^\alpha+B_\alpha\sum_{i=0}^{N-1}d_iM_i{}^\alpha+dQ_0+j_0{}^\alpha E_\alpha\,dt$$

Левая часть уравнения энергии (4.2) представляет собой изменение полной энергии смеси, рассматриваемой как единая среда. Первое, второе и третье слагаемые в правой части уравнения (4.2) представляют собой элементарную работу соответственно поверхностных (механических), объемных механических и пондеромоторных сил на элементарных смещениях среды как целого, четвертый представляет собой поверхностный приток энергии за счет процессов диффузии (в него, в частности, может входить работа поверхностных сил на относительных перемещениях компонент),

$$\frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N-1}(E_\gamma P_i{}^\gamma+B_\gamma M_i{}^\gamma)\,\nabla_\alpha v_i{}^\alpha\,dt$$

— элементарная работа электромагнитного давления на деформациях компонент смеси, выражение

$$\sum_{i=0}^{N-1}(F_{i\alpha}+F_{Mi\alpha})(v_i{}^\alpha-v^\alpha)\,dt$$

— элементарная работа объемной и пондеромоторных сил на относительных смещениях компонент, члены $E_\alpha d_iP_i{}^\alpha$ и $B_\alpha d_iM_i{}^\alpha$ связаны с элементарным притоком энергии от электромагнитного поля к единице объема среды за счет эффектов поляризации и намагниченности, последнее слагаемое представляет собой количество джоулева тепла, выделившегося в единице объема среды за время dt.

Согласно формуле (2.4), второй закон термодинамики можно записать в виде

$$\rho T\,dS=dQ^{(e)}+dQ'$$

$$dQ'=\tau^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_\alpha\,dt+\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i{}^{\alpha\beta}\nabla_\beta(v_{i\alpha}-v_\alpha)\,dt-$$

$$-\sum_{i=0}^{N-1}G_{i\alpha}J_i{}^\alpha\,dt\qquad\left(\tau^{\alpha\beta}=\sum_{i=0}^{N-1}\tau_i{}^{\alpha\beta}\right)$$

dQ' представляет собой приращение некомпенсированного тепла, а $dQ^{(e)}$ — внешний по отношению к среде в целом приток тепла к частице смеси, не связанный с диффузионным переносом энергии. Полагая, что внешний приток тепла к среде происходит лишь посредством явления теплопроводности и выделения джоулева тепла, выражение для приращения энтропии за счет внутренних процессов в смеси можно представить в виде (здесь через q^α обозначены компоненты вектора потока тепла)

$$\rho\, d_i S = \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} \tau_i^{\alpha\beta}\nabla_\beta v_{i\alpha}\, dt - \frac{1}{T^2} q^\alpha \nabla_\alpha T\, dt - \frac{1}{T}\sum_{i=0}^{N-1} G_{i\alpha} J_i^{\ \alpha}\, dt + E_\alpha i_0^\alpha\, dt$$

Здесь учтено, что процессы поляризации и намагничивания считаются обратимыми. Причем во всех процессах должно выполняться неравенство

$$d_i S \geqslant 0 \tag{4.3}$$

Отметим, что термодинамические силы $\tau_i^{\alpha\beta} / T$, q^α / T^2, $G_i^{\ \alpha} / T$ можно записать как функции термодинамических потоков $\nabla_\beta v_i^{\ \alpha}$, $J_i^{\ \alpha}$, $\nabla_\alpha T$ и, возможно, других определяющих параметров. В частности, функции термодинамических потоков могут выбираться однородными функциями первой степени, что соответствует (в случае симметрии коэффициентов входящих в эти соотношения) соотношениям Онзагера. При этом неравенство (4.3) должно выполняться тождественно, что накладывает соответствующие ограничения на выбор феноменологических коэффициентов.

5. Об уравнениях импульсов для смеси как среды в целом. В качестве второй возможной системы независимых вариаций можно взять следующие вариации: δx^α, δA_α, $\delta\varphi$, $\delta\eta_i^{\ \alpha}$, δS, $\delta_i \pi_i^{\ \wedge\alpha}$, $\delta_i m_i^{\ \wedge\alpha}$, которые отличаются от системы вариаций (3.1) тем, что вместо вариаций $\delta_i x^\alpha$, коэффициентами при которых в объемном интеграле являются уравнения импульсов для отдельных компонент, считаются произвольными вариации δx^α и $\delta\eta_i^{\ \alpha}$, причем из вариаций $\delta\eta_i^{\ \alpha}$ независимыми являются $3(N-1)$. При таком выборе системы независимых вариаций все уравнения Эйлера (3.2) — (3.6) сохранятся, за исключением уравнений (3.3). Уравнения (3.3) заменятся тремя уравнениями импульсов для смеси как среды в целом и $3(N-1)$ линейно независимыми уравнениями, получающимися в предположении произвольности вариаций $\delta\eta_i^{\ \alpha}$. Таким образом, вместо уравнений импульсов для отдельных компонент (3.3) получим уравнения импульсов для смеси как среды в целом

$$\rho a_\alpha = \nabla_\beta p_\alpha^{\ \beta} - \sum_{i=0}^{N-1} \nabla_\beta (v_{i\alpha} J_i^{\ \alpha}) + \sum_{i=0}^{N-1} F_{i\alpha} + F_{M\alpha} \tag{5.1}$$

Здесь через a_α обозначены ковариантные компоненты вектора ускорения смеси, рассматриваемой как среда в целом, которые связаны с компонентами вектора скорости среды равенствами $a_\alpha = \partial v_\alpha / \partial t + v^\beta \nabla_\beta v_\alpha$, через $p_\alpha^{\ \beta}$ обозначены смешанные компоненты тензора напряжений в смеси, вычисленные относительно системы координат наблюдателя, но имеющие физический смысл компонент тензора напряжений лишь в собственной для смеси в целом системе координат, а через $F_{M\alpha}$ обозначены ковариантные компоненты вектора объемной пондеромоторной силы по Минковскому, действующей со стороны электромагнитного поля на смесь как среду в целом. Для компонент тензора напряжений p_α^β и объемной пондеромоторной силы имеют место выражения

$$p_\alpha^\beta = -\rho^2 \frac{\partial U}{\partial \rho} \delta_\alpha^\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \rho \frac{\partial U}{\partial \pi_i^\alpha} \pi_i^\beta + \sum_{i=0}^{N-1} \rho \frac{\partial U}{\partial m_i^\alpha} m_i^\beta +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=0}^{N-1} (E_\gamma P_i^\gamma + B_\gamma M_i^\gamma) \delta_\alpha^\beta - \sum_{i=0}^{N-1} (E_\alpha P_i^\beta + B_\alpha M_i^\beta) + \tau_\alpha^\beta$$

$$F_{M\alpha} = \rho_{e0} E_\alpha + \frac{1}{c} \varepsilon_{\alpha\beta\gamma} j_0^\beta B^\gamma +$$

$$+ \frac{1}{8\pi} (D^\gamma \nabla_\alpha E_\gamma - E_\gamma \nabla_\alpha D^\gamma + B^\gamma \nabla_\alpha H_\gamma - H_\gamma \nabla_\alpha B^\gamma)$$

где в последнем равенстве величины D_α и H_α определены соответствующими равенствами п. 3. Отметим, что выражение для компонент тензора p_α^β имеет приведенный выше вид в случае, если в качестве аргументов функции плотности внутренней энергии взяты величины ρ и c_i (вместо величин ρ_i, как это сделано в п. 3).

Сравнивая равенства (3.3) (5.1) с учетом выражений для $p_{i\alpha}^\beta$, p_α^β и объемных пондеромоторных сил, видно, что уравнения импульсов для смеси как среды в целом могут быть получены из уравнений импульсов для отдельных компонент (5.1) простым их суммированием с учетом другого способа выбора аргументов внутренней энергии.

Авторы благодарят Л. И. Седова за предложенную тему.

Поступила 30 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Седов Л. И.* Математические методы построения новых моделей сплошных сред. Успехи матем. наук, 1965, т. 20, вып. 5.
2. *Седов Л. И.* Об общем виде уравнений кинетики химических реакций в газах. Докл. АН СССР, 1948, т. 60, № 1.
3. *Седов Л. И.* Механика сплошной среды, т. 1. Изд. 2. М., «Наука», 1973.
4. *Де Гроот С. Р.* Термодинамика необратимых процессов. М., Гостехиздат, 1956.