

## ИССЛЕДОВАНИЕ ДИНАМИКИ СИНХРОННОЙ МАШИНЫ АСИМПТОТИЧЕСКИМИ МЕТОДАМИ

Н. А. Фуфаев, Р. А. Чеснокова

(Горький)

Исследуется полная система дифференциальных уравнений динамики синхронной машины с двумя обмотками на роторе в предположении, что момент инерции ротора достаточно велик. Рассматриваются две области изменения переменной  $s$  — скольжения ротора: 1) конечные значения  $s$ ; 2) малые  $s$ . В первом случае исследуются периодические по  $\theta$  решения полной системы уравнений, во втором случае — периодические решения, охватывающие состояние равновесия. Указываются условия устойчивости найденных решений. Устойчивые периодические решения соответствуют в первом случае асинхронным режимам синхронной машины, во втором случае — качаниям ротора относительно синхронной скорости вращения.

При исследовании переходных процессов в синхронной машине на основании полной системы дифференциальных уравнений, полученной А. А. Горевым [1], обычно использовались следующие подходы: 1) рассматривалось только уравнение механического движения ротора [2-7]; 2) рассматривались только электрические уравнения, т. е. исследовались переходные процессы при постоянной угловой скорости вращения ротора; 3) производилась линеаризация полной системы уравнений в окрестности установившегося движения и изучались малые колебания системы; 4) проводилось численное интегрирование полной системы уравнений [1, 8]. Однако динамика синхронной машины в целом оставалась до сих пор мало изученной.

**1. Уравнения динамики и постановка задачи.** Уравнения динамики синхронной машины, работающей параллельно с сетью бесконечной мощности в двигательном режиме, после введения безразмерных переменных, параметров и времени  $\tau = \omega_1 t$ , имеют вид [1]

$$(1.1) \quad \begin{aligned} x' + \xi x + \lambda(1-s)y + \gamma_1 u' + \gamma_2(1-s)v &= -\sin \theta \\ -(1-s)x + \lambda y' + \xi y - \gamma_1(1-s)u + \gamma_2 v' &= -\cos \theta \\ \gamma_1 x' + \alpha_1 u' + \beta_1 u &= \eta, \quad \gamma_2 y' + \alpha_2 v' + \beta_2 v = 0 \\ \theta' = s, \quad s' &= M_0 \{T_0 - [\gamma_2 xv - \gamma_1 yu - (1-\lambda)xy]\} \\ \alpha_1 = \frac{2}{3} \frac{L_4}{L_x}, \quad \beta_1 = \frac{2}{3} \frac{R_4}{\omega_1 L_x}, \quad \gamma_1 &= \frac{M_x}{L_x} \\ \alpha_2 = \frac{2}{3} \frac{L_5}{L_x}, \quad \beta_2 = \frac{2}{3} \frac{R_5}{\omega_1 L_x}, \quad \gamma_2 &= \frac{M_y}{L_x} \\ \lambda = \frac{L_y}{L_x}, \quad \xi = \frac{R}{\omega_1 L_x}, \quad \eta = \frac{2}{3} \frac{E_4}{E_0}, \quad M_0 = \frac{3}{2} \frac{E_0^2}{J \omega_1^4 L_x}, \quad T_0 &= \frac{3}{2} \frac{L_x T \omega_1^2}{E_0^2} \end{aligned}$$

Здесь  $\theta$  — угол между поперечной осью ротора и вращающимся вектором э.д.с. внешней сети,  $x, y, u, v$  — приведенные продольный и поперечный токи статора и ротора,  $s$  — скольжение ротора,  $\omega_1$  — частота внешней сети,  $L_x, L_y$  — коэффициенты самоиндукции в продольной и поперечной осях машины,  $L_4, L_5$  — коэффициенты самоиндукции обмоток ротора,

$M_x, M_y$  — коэффициенты взаимоиндукции фаз статора с обмотками ротора,  $R, R_4, R_5$  — активное сопротивление фаз статора и обмоток ротора,  $E_0$  — амплитуда напряжения внешней сети,  $E_4$  — э.д.с. возбуждения,  $J$  — момент инерции ротора,  $T$  — момент внешних механических сил на валу ротора.

Как известно, в рабочем режиме синхронной машины скольжение ротора  $s = 0$  (синхронный режим). Однако при запуске машины, резких изменениях нагрузки, т. е. при переходных режимах, переменная  $s$  может принимать любые значения.

Пусть постоянная времени механического движения много больше наибольшей постоянной времени электрических контуров за счет того, что достаточно велик момент инерции ротора  $J$ , т. е. параметр  $M_0 \equiv \varepsilon \ll 1$ . (Тем самым одновременно предполагается, что наибольшая постоянная времени электрических контуров порядка единицы.)

При сделанном допущении исследование динамики синхронной машины проведем при помощи асимптотических методов для конечных значений  $s$  и для малых  $s$ .

**2. Исследование динамики в области конечных значений  $s$ .** Рассмотрим сначала динамику синхронной машины в области асинхронных режимов, когда скольжение ротора  $s$  отлично от нуля и не мало ( $|s| \sim 1$ ). Систему (1.1) можно записать в виде

$$(2.1) \quad \theta' = s, \quad z' = A(s)z + a(\theta), \quad s' = \varepsilon F(z) \quad (z \equiv \text{col} \{x, y, u, v\})$$

где  $z, \theta$  — быстрые переменные, причем по своему физическому смыслу  $\theta$  является быстро вращающейся фазой. Собственные значения матрицы  $A(s)$  имеют отрицательные действительные части при  $\alpha_1 - \gamma_1^2 > 0$ ,  $\lambda\alpha_2 - \gamma_2^2 > 0$ , что всегда имеет место, так как левые части этих неравенств представляют собой продольный и поперечный коэффициенты рассеяния обмоток машины [1].

Будем искать решение системы (2.1), близкое к установившемуся решению вырожденной системы, которая получается из (2.1) при  $\varepsilon = 0$ . Обозначая решение вырожденной системы через  $z_0(s, \theta)$ , сделаем в (2.1) замену переменных

$$(2.2) \quad z = z_0(s, \theta) + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \zeta + \varepsilon z^\circ(\theta) \\ z_0(s, \theta) \equiv \{x(s, \theta), y(s, \theta), u(s, \theta), v(s, \theta)\}$$

где  $\zeta$  — новая переменная, а вектор-функция  $z^\circ(\theta)$  будет определена ниже. Тогда имеет место разложение функции  $F(z)$  в окрестности решения  $z_0(s, \theta)$

$$F(z) = F(z_0(s, \theta)) + \varepsilon(\sqrt{\varepsilon} \zeta + z^\circ(\theta)) \frac{\partial F}{\partial z}(z_0) + \varepsilon^2(\dots) = \\ = \langle F(s) \rangle + F^*(s, \theta) + \varepsilon(\sqrt{\varepsilon} \zeta + z^\circ(\theta)) \left( \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z}(s) + \right. \\ \left. + \frac{\partial F^*}{\partial z}(s, \theta) \right) + \varepsilon^2(\dots)$$

где средние значения  $F^*(s, \theta)$  и  $\partial F^*(s, \theta) / \partial z$  по переменной  $\theta$  равны нулю.

Пусть  $s_0$  — корень уравнения  $\langle F(s_0) \rangle = 0$ . Произведем замену [9]

$$(2.3) \quad s = s_0 + \varepsilon w + \frac{\varepsilon}{s_0} \int_{\theta_0}^{\theta} F^*(s_0, \theta) d\theta + \varepsilon s^\circ$$

где  $w$  — новая переменная, а  $s^\circ$  будет определена ниже. Тогда система (2.1) запишется в виде

$$(2.4) \quad \begin{aligned} \theta^\circ &= s_0 + \varepsilon w + \frac{\varepsilon}{s_0} \int_{\theta_0}^{\theta} F^*(s_0, \theta) d\theta + \varepsilon s^\circ \\ w^\circ &= \varepsilon \frac{d\langle F \rangle}{ds} w + \varepsilon \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial s} s^\circ + \varepsilon \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} \langle z^\circ \rangle + \frac{\varepsilon}{s_0} \frac{\partial F^*}{\partial s}(s_0, \theta) \int F^* d\theta + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial z}(s_0, \theta) z^{\circ*}(\theta) - \frac{\varepsilon}{s_0^2} F^*(s_0, \theta) \int F^* d\theta + \varepsilon \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} z^{\circ*}(\theta) + \\ &+ \varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial z}(s_0, \theta) \langle z^\circ \rangle + \frac{\varepsilon}{s_0} \frac{d\langle F \rangle}{ds} \int F^* d\theta + \varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial s} w + \varepsilon \frac{\partial F^*}{\partial s} s^\circ + \\ &+ \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial F^*}{\partial z} \zeta - \frac{\varepsilon}{s_0} F^* w - \frac{\varepsilon}{s_0} F^*(s_0, \theta) s^\circ + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} \zeta + \\ &+ \varepsilon^2(\dots) \\ \sqrt{\varepsilon} \zeta^\circ + \frac{dz^\circ}{d\theta} &= \sqrt{\varepsilon} A(s_0) \zeta + A(s_0) z^\circ - z_{0s}'(s_0, \theta) F^*(s_0, \theta) + \varepsilon(\dots) \end{aligned}$$

Будем предполагать, что  $d\langle F(s_0) \rangle / ds \neq 0$ . Выберем вектор-функцию  $z^\circ(\theta) = \langle z^\circ \rangle + z^{\circ*}(\theta)$  (среднее значение  $z^{\circ*}(\theta)$  по  $\theta$  равно нулю) как частное решение неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами

$$\frac{dz^\circ}{d\theta} = A(s_0) z^\circ - z_{0s}'(s_0, \theta) F^*(s_0, \theta)$$

а  $s^\circ$  — как решение линейного уравнения

$$\frac{d\langle F \rangle}{ds} s^\circ + \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} \langle z^\circ \rangle + \langle W(s_0) \rangle = 0$$

где  $\langle W(s_0) \rangle$  — среднее по  $\theta$  от функции

$$W(s_0, \theta) = \frac{1}{s_0} \frac{\partial F^*}{\partial s} \int F^*(s_0, \theta) d\theta + \frac{\partial F^*}{\partial z} z^{\circ*}(\theta) - \frac{1}{s_0^2} F^* \int F^*(s_0, \theta) d\theta$$

Тогда система (2.3) приведет к следующему виду:

$$(2.5) \quad \begin{aligned} \theta^\circ &= s_0 + \Theta(\theta, w, \zeta, \varepsilon) + \varepsilon \Theta^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon) \\ w^\circ &= \varepsilon \frac{d\langle F \rangle}{ds} w + \varepsilon X(\theta, w, \zeta, \varepsilon) + \varepsilon X^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon) \\ \zeta^\circ &= A(s_0) \zeta + Y(\theta, w, \zeta, \varepsilon) \end{aligned}$$

Здесь

$$\begin{aligned} \Theta(\theta, w, \zeta, \varepsilon) &= \varepsilon(w + s^\circ), \quad \Theta^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon) = \frac{1}{s_0} \int_{\theta_0}^{\theta} F^*(s_0, \theta) d\theta \\ X(\theta, w, \zeta, \varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} \zeta + \varepsilon(\dots) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon) &= \frac{\partial \langle F \rangle}{\partial z} z^{0*}(\theta) + \frac{\partial F^*}{\partial z}(s_0, \theta) \langle z^0 \rangle + \frac{1}{s_0} \frac{d \langle F \rangle}{ds} \int F^* d\theta + \\
 &+ \frac{\partial F^*}{\partial s}(s_0, \theta) w + \frac{\partial F^*}{\partial s}(s_0, \theta) s^0 + \sqrt{\varepsilon} \frac{\partial F^*}{\partial z}(s_0, \theta) \zeta - \frac{1}{s_0} F^*(s_0, \theta) w - \\
 &- \frac{1}{s_0} F^*(s_0, \theta) s^0 + W(s_0, \theta) - \langle W(s_0) \rangle + \varepsilon(\dots) \\
 Y(\theta, w, \zeta, \varepsilon) &= \sqrt{\varepsilon}(\dots)
 \end{aligned}$$

Очевидно, что средние значения функций  $\Theta^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon)$  и  $X^*(\theta, w, \zeta, \varepsilon)$  по переменной  $\theta$  равны нулю. Таким образом, система (2.5) удовлетворяет условиям теорем 15.1, 15.3, 15.4 Хейла [10]. Согласно этим теоремам, система (2.1) имеет одномерное интегральное многообразие

$$\begin{aligned}
 (2.6) \quad s &= s_0 + \varepsilon s^0 + \frac{\varepsilon}{s_0} \int_{\theta_0}^{\theta} F^*(s_0, \theta) d\theta + \varepsilon f(\theta, \varepsilon) \\
 z &= z_0(s_0, \theta) + \varepsilon z^0(\theta) + \varepsilon \sqrt{\varepsilon} g(\theta, \varepsilon) \\
 f(\theta, \varepsilon) &\rightarrow 0, \quad g(\theta, \varepsilon) \rightarrow 0 \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0
 \end{aligned}$$

Интегральное многообразие (2.6) является периодическим по  $\theta$  решением системы (1.1), близким к установившемуся решению  $s = s_0, z = z_0(s_0, \theta)$  вырожденной системы. Периодическое решение устойчиво, если  $d \langle F(s_0) \rangle / ds < 0$ , и седловое, если  $d \langle F(s_0) \rangle / ds > 0$ .

Для исходной системы (1.1) решение  $z_0(s_0, \theta) \equiv \{z_{0j}(s_0, \theta)\}$  имеет вид

$$\begin{aligned}
 z_{0j}(s_0, \theta) &= \frac{(-1)^j}{a^2 + b^2} \{ \sin \theta [a(a_{1j} + b_{2j}) + b(b_{1j} - a_{2j})] + \\
 &+ \cos \theta [a(b_{1j} - a_{2j}) - b(a_{1j} + b_{2j})] \} - (-1)^j \eta \frac{A_{3j}(0)}{\Delta(0)}, \quad j = 1, 2, 3, 4 \\
 a &= \operatorname{Re} \Delta(p), \quad b = \operatorname{Im} \Delta(p), \quad a_{kj} = \operatorname{Re} A_{kj}(p), \quad b_{kj} = \operatorname{Im} A_{kj}(p) \\
 (p &= is, \quad i = \sqrt{-1})
 \end{aligned}$$

Здесь  $\Delta(p)$  — определитель системы (1.1),  $A_{kj}(p)$  — миноры определителя  $\Delta(p)$ :

$$\begin{aligned}
 F(z_0) = F(s_0, \theta) &= T_0 - a_1(s_0) \eta^2 - b_1(s_0) - b_2(s_0) \cos 2\theta - \\
 &- b_3(s_0) \times \sin 2\theta - \eta c_1(s_0) \cos \theta - \eta c_2(s_0) \sin \theta
 \end{aligned}$$

где  $s_0$  — корень уравнения

$$\langle F(s_0) \rangle \equiv T_0 - a_1(s_0) \eta^2 - b_1(s_0) = 0$$

$$a_1(s_0) = - \frac{\gamma_1^2 \xi (1 - s_0)}{\beta_1^2} \frac{\xi^2 + \lambda^2 (1 - s_0)^2}{[\xi^2 + \lambda (1 - s_0)^2]^2}$$

$$b_1(s_0) = - \frac{1}{2(a^2 + b^2)} \{ \gamma_2 [(a_{11} + b_{21})(a_{14} + b_{24}) + (b_{11} - a_{21}) \times$$

$$\times (b_{14} - a_{24})] -$$

$$- \gamma_1 [(a_{12} + b_{22})(a_{13} + b_{23}) + (b_{12} - a_{22})(b_{13} - a_{23})] -$$

$$- (1 - \lambda) [(a_{11} + b_{21})(a_{12} + b_{22}) + (b_{11} - a_{21})(b_{12} - a_{22})] \}$$

В качестве примера рассмотрим синхронный двигатель с параметрами  $\alpha_1 = 2/3$ ,  $\alpha_2 = 1/3$ ,  $\beta = 10/3$ ,  $\beta_2 = 2/3$ ,  $\gamma_1 = 0.3$ ,  $\gamma_2 = 0.1$ ,  $\lambda = 0.1$ ,  $\eta = 20/3$ ,  $T_0 = 0.3$  и просле-

дим за поведением периодических решений в зависимости от параметра  $\xi$ , характеризующего омические потери в цепи статора. При  $\xi = 0$  система (1.1) имеет два периодических по  $\theta$  решения: устойчивое (асинхронный режим)  $s_{01} = 0.4$  ( $d \langle F(s_{01}) \rangle / ds = -0.72$ ) и седловое  $s_{02} = 21.454$  ( $d \langle F(s_{02}) \rangle / ds = 0.0134$ ). С ростом  $\xi$  координаты  $s_{0i}$  периодических решений увеличиваются, затем с  $\xi = 0.04$  седловой предельный цикл ( $s_{02} = 24.525$ ) начинает опускаться по  $s$ , а с  $\xi = 0.71$  ( $s_{01} = 0.90578$ ,  $s_{02} = 5.6955$ ) оба цикла снова поднимаются вверх, не сближаясь.

### 3. Исследование динамики в области малых значений $s$ ( $|s| \leq \varepsilon \ll 1$ ).

Рассмотрим теперь динамику синхронной машины в области малых величин скольжения  $s$  ( $|s| \leq \varepsilon \ll 1$ ). Перейдем к новой переменной  $\sigma$ , где  $s = \mu\sigma$ ,  $\mu = \sqrt{\varepsilon}$ , и введем «медленное» время  $\tau' = \mu\tau$ . Тогда система (1.1) будет иметь вид

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mu x' + \xi x + \lambda(1 - \mu\sigma)y + \gamma_1 \mu u' + \gamma_2(1 - \mu\sigma)v &= -\sin \theta \\ -(1 - \mu\sigma)x + \lambda \mu y' + \xi y - \gamma_1(1 - \mu\sigma)u + \gamma_2 \mu v' &= -\cos \theta \\ \gamma_1 \mu x' + \alpha_1 \mu u' + \beta_1 u &= \eta, \quad \gamma_2 \mu y' + \alpha_2 \mu v' + \beta_2 v = 0 \\ \theta' = \sigma, \quad \sigma' &= T_0 - [\gamma_2 x v - \gamma_1 y u - (1 - \lambda)xy] \end{aligned}$$

Здесь и далее точки над буквами означают дифференцирование по медленному времени  $\tau'$ . Система (3.1) является системой с малым параметром при производной. Производя замену переменных

$$(3.2) \quad x^\circ = x - \frac{c}{\lambda + \xi^2}, \quad y^\circ = y - \frac{d}{\lambda + \xi^2}, \quad u^\circ = u - \frac{\eta}{\beta_1}, \quad v^\circ = v$$

систему (3.1) можно привести к виду

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \mu z' &= A(\theta, \sigma, z, \mu)z + \mu F(\theta, \sigma, \mu) \\ \theta' &= \frac{\partial H(\theta, \sigma)}{\partial \sigma} + \mu P_1(\theta, \sigma, \mu) + P_2(\theta, \sigma, z, \mu)z \\ \sigma' &= -\frac{\partial H(\theta, \sigma)}{\partial \theta} + \mu Q_1(\theta, \sigma, \mu) + Q_2(\theta, \sigma, z, \mu)z \end{aligned}$$

Здесь

$$z \equiv \text{col} \{x^\circ, y^\circ, u^\circ, v^\circ\}, \quad b = \gamma_1 \eta / \beta_1$$

$$c = -\xi \sin \theta + \lambda \cos \theta - \lambda b, \quad d = -\sin \theta - \xi \cos \theta + \xi b$$

$$A(\theta, \sigma, z, \mu) \equiv A(\mu\sigma) =$$

$$= \begin{matrix} l \\ m \\ l \\ m \end{matrix} \left\| \begin{array}{cccc} -\alpha_1 \xi & -\lambda \alpha_1 (1 - \mu\sigma) & \gamma_1 \beta_1 & -\alpha_1 \gamma_2 (1 - \mu\sigma) \\ \alpha_2 (1 - \mu\sigma) & -\xi \alpha_2 & \alpha_2 \gamma_1 (1 - \mu\sigma) & \gamma_2 \beta_2 \\ \xi \gamma_1 & \lambda \gamma_1 (1 - \mu\sigma) & -\beta_1 & \gamma_1 \gamma_2 \\ -\gamma_2 (1 - \mu\sigma) & \xi \gamma_2 & -\gamma_1 \gamma_2 (1 - \mu\sigma) & -\lambda \beta_2 \end{array} \right\|$$

$$F(\theta, \sigma, \mu) \equiv F(\theta, \sigma) = \frac{\sigma}{\lambda + \xi^2} \times$$

$$\times \begin{cases} l [-\lambda \gamma_1^2 \sin \theta + (\alpha_1 - \lambda \alpha_1 - \gamma_1^2) \xi \cos \theta + \lambda \alpha_1 \xi b] \\ m [\xi (\gamma_2^2 + \alpha_2 - \lambda \alpha_2) \sin \theta - \gamma_2^2 \cos \theta - \alpha_2 \xi^2 b] \\ l (-d) \\ mc \end{cases}$$

$$P_1 = P_2 = Q_1 = 0$$

$$\begin{aligned}
 Q_2(\theta, \sigma, z, \mu) &\equiv Q_2(\theta, z) = \\
 &= \left\{ -\frac{1}{2}\gamma_2 v^\circ + \frac{1}{2}(1-\lambda)y^\circ + (1-\lambda)d/(\lambda + \xi^2), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2}\gamma_1 u^\circ + b + \frac{1}{2}(1-\lambda)x^\circ + (1-\lambda)c/(\lambda + \xi^2), \right. \\
 &\quad \left. \frac{1}{2}\gamma_1 y^\circ + \gamma_1 d/(\lambda + \xi^2), \frac{1}{2}\gamma_2 x^\circ - \gamma_2 c/(\lambda + \xi^2) \right\} \\
 H(\theta, \sigma) &= \frac{1}{2}\sigma^2 - G(\theta), \quad G(\theta) = (T_0 - a_1(0)\eta^2 - b_1(0))\theta - \\
 &- \frac{1}{2}b_2(0)\sin 2\theta + \frac{1}{2}b_3(0)\cos 2\theta - \eta c_1(0)\sin \theta + \eta c_2(0)\cos \theta \\
 l &= \frac{1}{\alpha_1 - \gamma_1^2}, \quad m = \frac{1}{\lambda\alpha_2 - \gamma_2^2}
 \end{aligned}$$

Для системы (3.3) соответствующая ей вырожденная система является консервативной. Собственные значения матрицы  $A(0)$  имеют отрицательные действительные части. Таким образом, система (3.3) удовлетворяет условиям теоремы работы [11]. Согласно этой теореме, система (3.1) имеет периодическое решение, если его имеет система

$$(3.4) \quad \theta^\circ = \frac{\partial H(\theta, \sigma)}{\partial \sigma}, \quad \sigma^\circ = -\frac{\partial H(\theta, \sigma)}{\partial \theta} - \mu [Q_2(\theta, 0)A^{-1}(0)F(\theta, \sigma)]$$

Здесь

$$\begin{aligned}
 Q_2(\theta, 0)A^{-1}(0)F(\theta, \sigma) &= \frac{\sigma}{(\lambda + \xi^2)^3} \{ b^2 \xi (\xi^4 - 3\lambda \xi^2 + 3\lambda^2 \xi^2 - \lambda^3) + \\
 &+ \frac{1}{2}(\lambda + \xi^2) \left[ \frac{\gamma_1^2}{\beta_1} (\lambda^2 + \xi^2) + \frac{\gamma_2^2}{\beta_2} (1 + \xi^2) \right] + \xi (1 - \lambda)^2 (\xi^2 - \lambda) + \\
 &+ \frac{1}{2} \cos 2\theta \left[ \frac{\gamma_1^2}{\beta_1} (\xi^4 - 3\lambda \xi^2 + 3\lambda^2 \xi^2 - \lambda^3) + \frac{\gamma_2^2}{\beta_2} (\lambda - 3\xi^2 + 3\lambda \xi^2 - \xi^4) \right] + \\
 &+ \sin 2\theta \left[ \frac{\gamma_1^2}{\beta_1} \xi (\xi^2 + \lambda^3) - \xi \frac{\gamma_2^2}{\beta_2} (1 + \lambda \xi^2) + \xi^2 (1 - \lambda)^3 \right] + \\
 &+ 2b \sin \theta \left[ -\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} \lambda \xi (\lambda^2 + \xi^2) + \frac{\gamma_2^2}{\beta_2} \xi^3 (\lambda - 1) + \right. \\
 &+ \left. \xi^2 (2\lambda - 3\lambda^2 + \lambda^3 + \lambda \xi^2 - \xi^2) \right] + 2b \cos \theta \left[ -\frac{\gamma_1^2}{\beta_1} \xi^2 (\lambda^2 + \xi^2) + \right. \\
 &+ \left. \frac{\gamma_2^2}{\beta_2} \xi^2 (1 - \lambda) + \xi (3\lambda \xi^2 - \xi^2 - 2\lambda^2 \xi^2 + \lambda^3 - \lambda^2) \right] \}
 \end{aligned}$$

Система (3.4) является системой, близкой к гамильтоновой. Значения констант, соответствующие замкнутым кривым гамильтоновой системы ( $\mu = 0$ ), вблизи которых при малых  $\mu \neq 0$  существуют предельные циклы, даются уравнением

$$(3.5) \quad \Psi(h) = \iint_{\sigma} [-Q_2(\theta, 0)A^{-1}(0)F(\theta, \sigma)] d\theta d\sigma = 0$$

где двойной интеграл берется по площади, ограниченной замкнутой кривой консервативной системы, охватывающей состояние равновесия [12].

Таким образом, система (1.1) при  $\mu \neq 0$  имеет периодические решения, близкие к порождающим замкнутым кривым  $H(\theta, \sigma) = h$  вырожденной консервативной системы при наличии корней  $h = h_i$  у уравнения (3.5). Периодическое решение устойчиво, если  $\Psi_h'(h_i) < 0$ , и седловое, если  $\Psi_h'(h_i) > 0$ . Устойчивый предельный цикл соответствует автоколебаниям ротора, а его рождение от сложного состояния равновесия — «мягкому» режиму возбуждения автоколебаний [13].

Имеем

$$\Psi(h) = -2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sigma} [Q_2 A^{-1} F] \{2[h + G(\theta)]\}^{1/2} d\theta$$

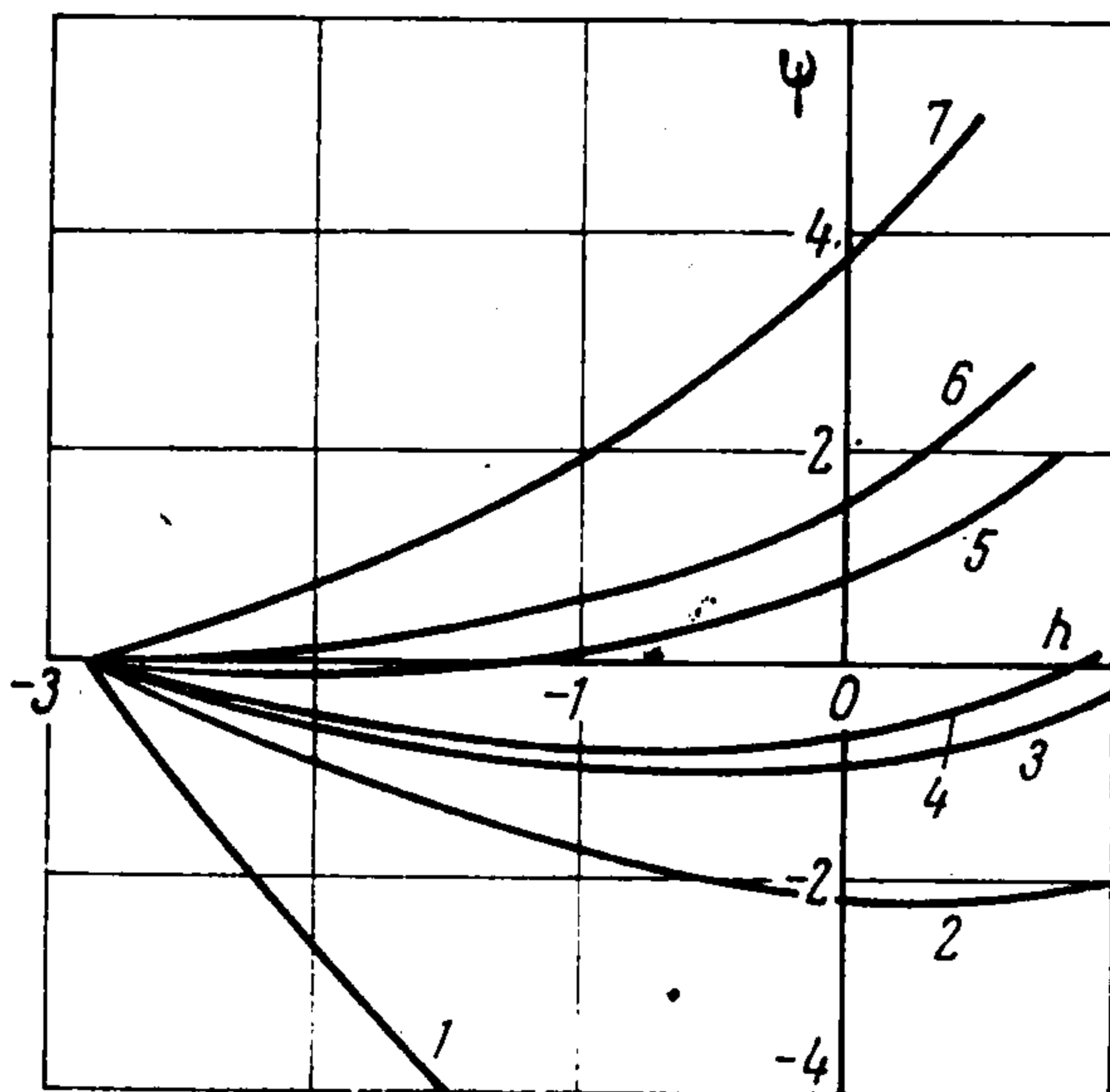
$$\Psi'(h) = -2 \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \frac{1}{\sigma} [Q_2 A^{-1} F] \{2[h + G(\theta)]\}^{1/2} d\theta$$

Здесь  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$  — корни уравнения  $h + G(\theta) = 0$ .

В качестве примера рассмотрим синхронный двигатель с теми же параметрами, что и в п. 2. Графики функции  $\Psi(h)$  в зависимости от параметра  $\xi$  приведены на фигурах. Соответствие между номерами кривых  $n$  и значениями  $\xi$  на фигурах такое:

$n = 1$	2	3	4	5	6	7	
$\xi = 0$	0.01	0.012	0.0125	0.015	0.01625	0.02	
$n = 8$	9	10	11	12	13	14	15
$\xi = 0.7$	0.74	0.77	0.795	0.7975	0.79875	0.799375	0.8

При  $\xi = 0$  система (1.1) не имеет предельных циклов, при  $\xi > 0.012$  появляется единственный предельный цикл седлового типа ( $\Psi_{h'}(h_i) > 0$ ), который уменьшается



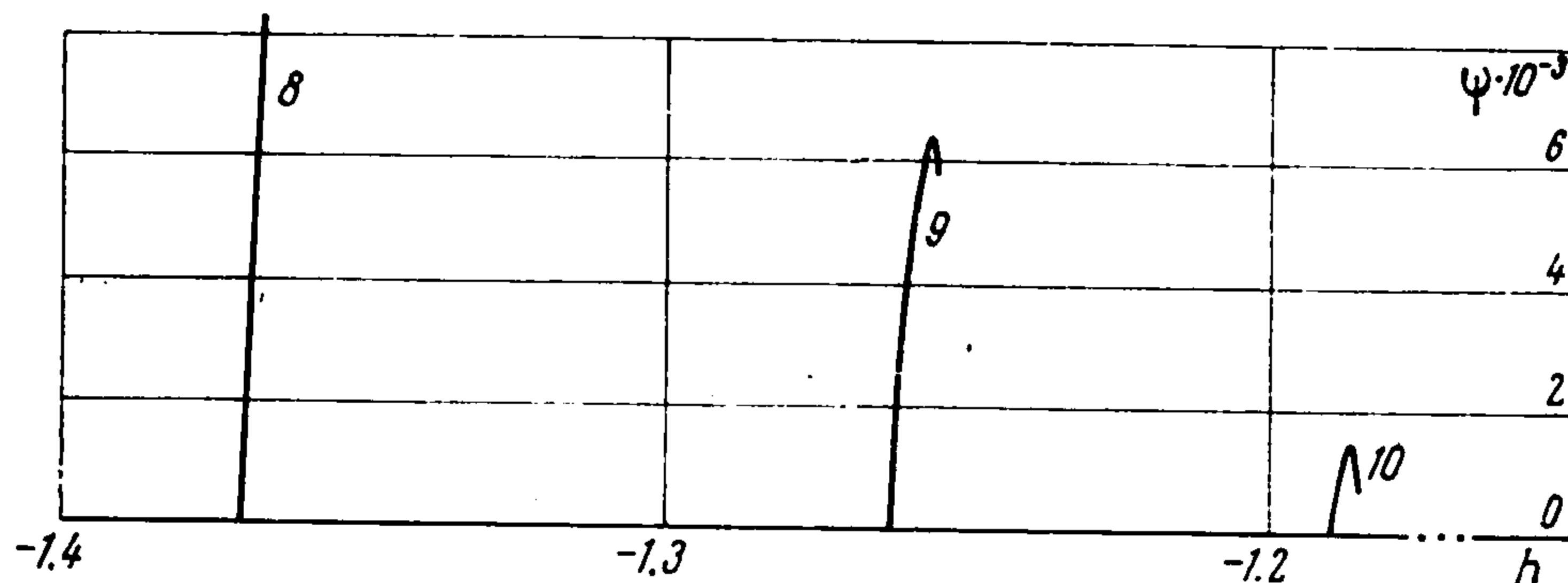
Фиг. 1

с ростом  $\xi$  и при  $\xi = 0.01625$  сливается со сложным фокусом. При дальнейшем росте  $\xi$  функция  $\Psi(h)$  располагается выше оси  $h$ , предельных циклов нет. Затем при  $\xi > 0.77$  появляется устойчивый предельный цикл ( $\Psi_{h'}(h_i) < 0$ ), который уменьшается с ростом  $\xi$  и при  $\xi = 0.7975$  сливается со сложным фокусом (характер появления цикла не исследовался). При  $\xi > 0.7975$  функция  $\Psi(h)$  располагается ниже оси  $h$ , предельных циклов снова нет. Таким образом, устойчивый предельный цикл, соответствующий автоколебаниям ротора, существует при  $0.77 < \xi \leq 0.7975$ , причем режим возбуждения автоколебаний при  $\xi = 0.7975$  — мягкий.

Если для данного синхронного двигателя проследить смену устойчивости состояния

$$(3.6) \quad \theta' = s, \quad s' = T_0 - M$$

равновесия, соответствующего синхронному режиму, в зависимости от параметра  $\xi$ , на основании исследования системы уравнений второго порядка

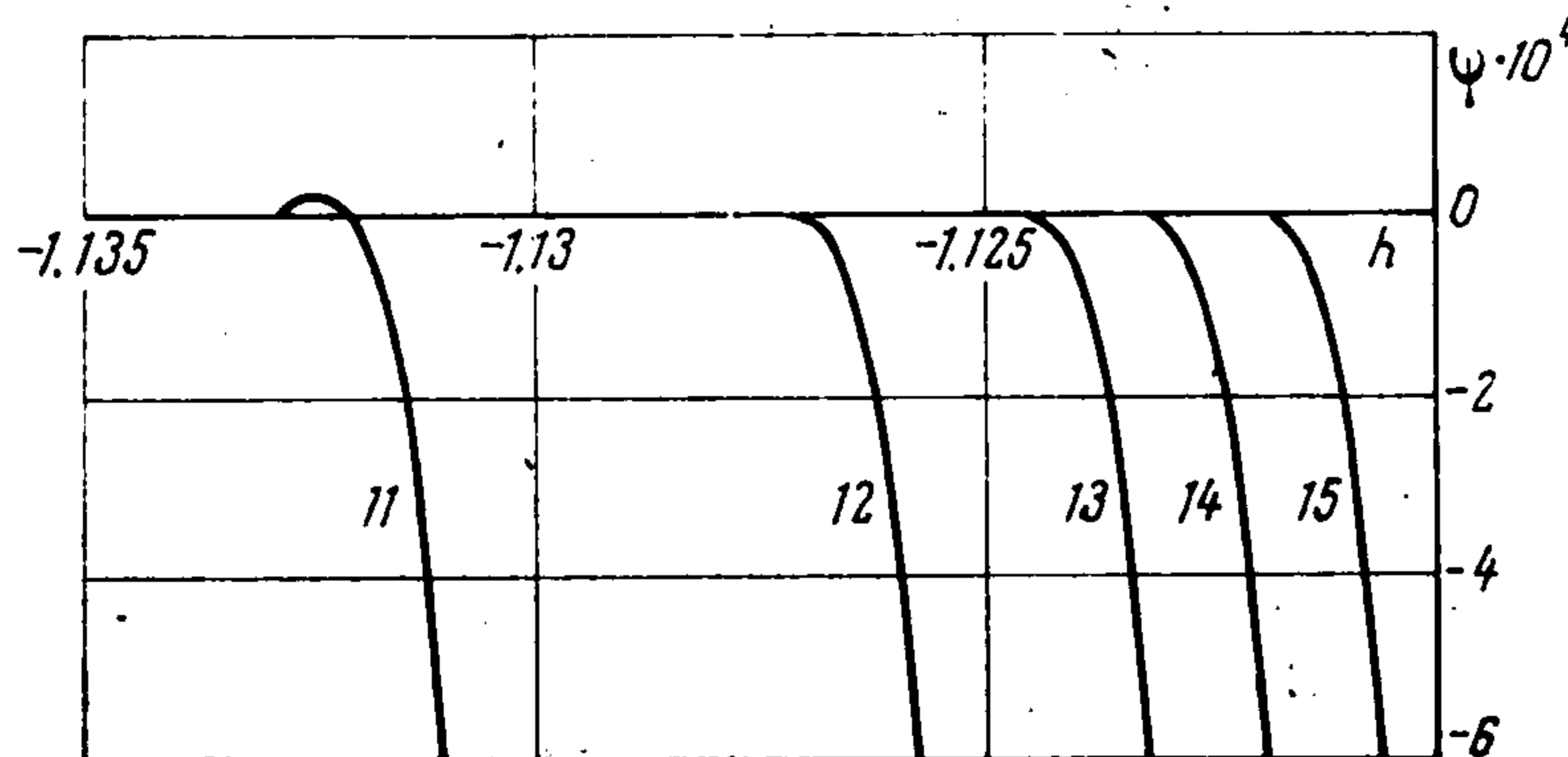


Фиг. 2

$\xi = 0$  состояние равновесия устойчиво, при  $\xi = 0.01635$  состояние равновесия становится неустойчивым, к нему стягивается единственный неустойчивый предельный цикл

(этот неустойчивый предельный цикл соответствует седловому циклу для системы (1.1)), затем при  $\xi = 0.7993$  состояние равновесия снова становится устойчивым, к нему стягивается единственный устойчивый предельный цикл.

Таким образом, исследование рождения предельных циклов из сложного состояния равновесия и, в частности, возникновения автоколебаний на основании рассмотрения полной системы уравнений динамики синхронной машины дает в случае малых  $\varepsilon$



Фиг. 3

результат, близкий (в проведенном выше примере расхождение результатов оказывается менее одного процента) к тому, который получается при рассмотрении системы уравнений второго порядка (3.6). Этот факт еще раз подтверждает, что для малых  $\varepsilon$  динамика синхронной машины (в частности, качание ротора) вполне может быть описана системой дифференциальных уравнений второго порядка.

Поступила 11 XI 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Горев А. А. Переходные процессы синхронной машины. Л.— М., Госэнергоиздат, 1950.
2. Янко-Триницкий А. А. Новый метод анализа работы синхронных двигателей при резкопеременных нагрузках. М.— Л., Госэнергоиздат, 1958.
3. Edgerton H. E., Fourmarier P. The pulling into step of a salient-pole synchronous motor. AIEE. Transactions, 1931, vol. 50, No. 2.
4. Власов Н. П. Автоколебания синхронного мотора. Уч. зап. Горьковск. ун-та, 1939, вып. 12.
5. Белюстина Л. Н. Об устойчивости режима работы явнополюсного синхронного двигателя. Изв. АН СССР. ОТН, 1954, № 10.
6. Горюшкин В. И. Условия синхронизации синхронного генератора с нелинейной асинхронной характеристикой. Изв. АН СССР. ОТН. Энергетика и автоматика, 1959, № 2.
7. Белюстина Л. Н., Чеснокова Р. А. Качественное исследование нелинейного уравнения синхронного генератора с асинхронной характеристикой. Горький, Прикладная математика и кибернетика, 1967.
8. Веников В. А. Переходные электро-механические процессы в электрических системах. М.— Л., «Энергия», 1964.
9. Гуртовник А. С., Неймарк Ю. И. Интегральные многообразия некоторых нелинейных систем. Изв. вузов. Радиофизика, 1972, т. 15, № 11.
10. Хейл Дж. К. Колебания в нелинейных системах. М., «Мир», 1966.
11. Гаврилов Н. К. О дифференциальной системе с малым параметром при производной, вырождающейся в консервативную. Изв. вузов. Радиофизика, 1967, т. 10, № 3.
12. Понтрягин Л. С. О динамических системах, близких к гамильтоновым. ЖЭТФ, 1934, т. 4, вып. 9.
13. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. М., Физматгиз, 1959.
14. Королев В. И., Фуфаев Н. А., Чеснокова Р. А. О корректности приближенного исследования качания ротора синхронной машины. ПММ, 1973, т. 37, вып. 6.