Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.36

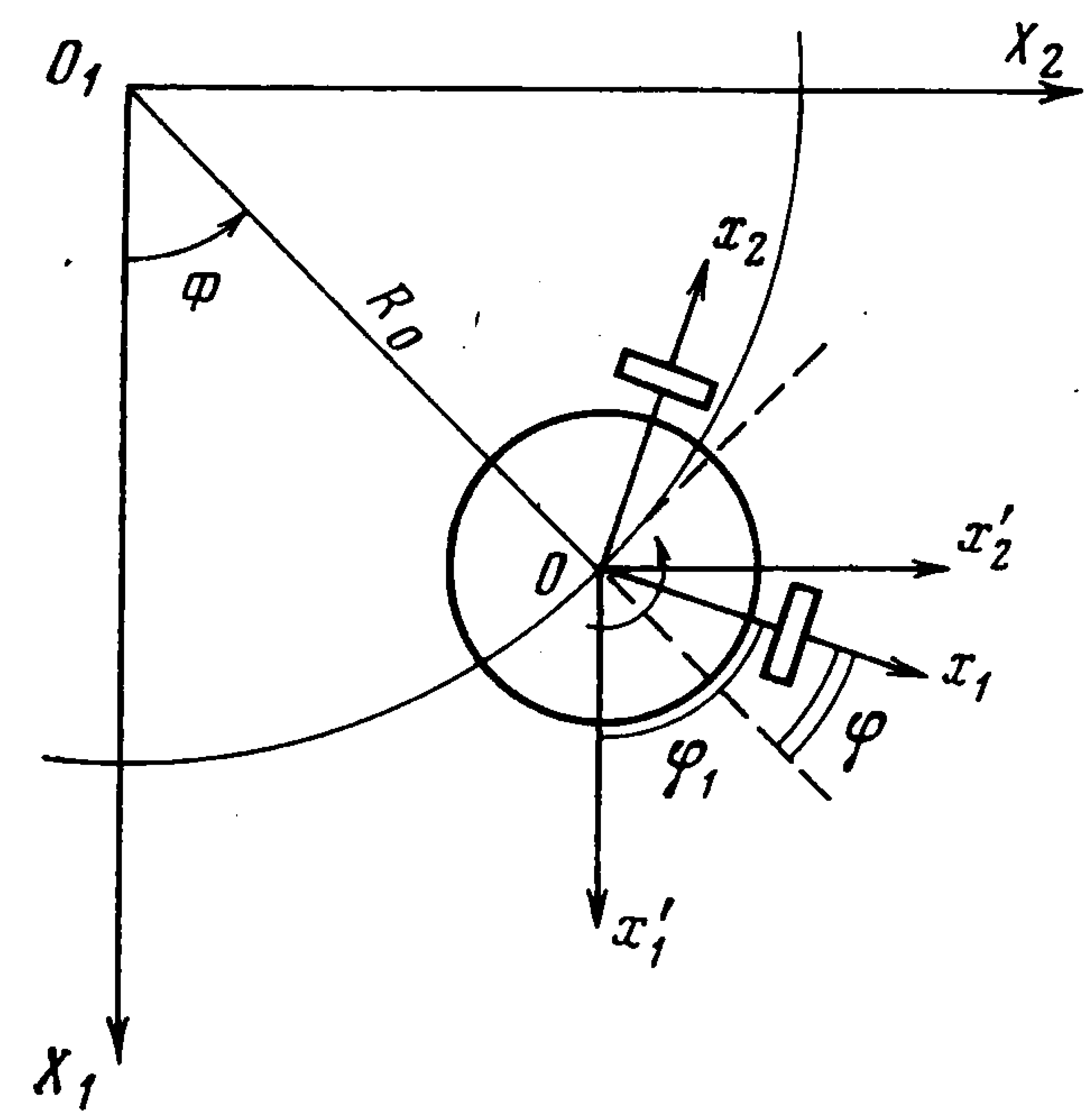
О СТАБИЛИЗАЦИИ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА С МАХОВИКАМИ В НЬЮТОНОВСКОМ ПОЛЕ СИЛ

В. В. Крементуло

(Москва)

В рамках аналитической теории управления [1] дано решение задачи оптимальной (в определенном смысле) стабилизации вращательного движения гиростата (твердого тела с двумя маховиками) в центральном ньютоновском поле сил.

1. Исходные уравнения движения. Постановка задачи. Придерживаясь ранее принятых обозначений [2], рассмотрим твердое тело, по двум из главных осей инерции которого расположены оси вращения однородных симметричных маховиков, приводимых в движение специальными двигателями. Гиростат находится в центральном ньютоновском поле сил (O_1 — притягивающий центр, O — центр масс гиростата).



На фигуре представлены следующие системы координат: $O_1X_1X_2X_3$ — инерциальная, $Ox_1x_2x_3$ — жестко связанная с гиростатом и направленная по его главным осям инерции (оси Ox_1, Ox_2 являются осями вращения маховиков), $Ox_1'x_2'x_3'$ — полуподвижная (ось Ox_3' совпадает с осью Ox_3, оси Ox_1', Ox_2' не участвуют во вращении гиростата вокруг оси Ox_3). Введем обозначения: C_1, C_2, C_3 — моменты инерции гиростата относительно осей $Ox_1x_2x_3$ соответственно; J_1, J_2 — осевые моменты инерции маховиков (для симметричного гиростата $C_1 = C_2 = C$, $J_1 = J_2 = J$); q_1, q_2, q_3 — проекции мгновенной угловой скорости трехгранника $Ox_1'x_2'x_3'$ на эти оси; β_{ik} — направляющие косинусы углов между осями $O_1X_1X_2X_3$ и $Ox_1'x_2'x_3'$; h_1, h_2, h_3 — проекции вектора кинетического момента гиростата относительно центра O_1 на оси $O_1X_1X_2X_3$; u_1, u_2 — управляющие моменты вокруг осей маховиков Ox_1, Ox_2, создаваемые двигателями; M — масса гиростата, X_1, X_2, X_3 — координаты центра масс гиростата в системе осей $O_1X_1X_2X_3$; U — силовая функция гравитационных сил, имеющая для симметричного гиростата вид [2,3] ($\varkappa$ — гравитационная постоянная)

$$U = \frac{\varkappa M}{R} + \frac{1}{2}\frac{\varkappa}{R^3}(C_3 - C) - \frac{3}{2}\frac{\varkappa}{R^3}(C_3 - C)(X_1\beta_{13} + X_2\beta_{23} + X_3\beta_{33})^2 \quad \left(R = \sqrt{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2}\right) \tag{1.1}$$

Изучаемый стационарный режим представляет собой движение типа регулярной прецессии: центр масс гиростата O движется в плоскости $X_1O_1X_2$ по круговой орбите радиуса R_0 с постоянной угловой скоростью $\Phi^\bullet = \omega_1$; гиростат вращается равномерно с относительной угловой скоростью $\varphi^\bullet = \omega$ вокруг оси симметрии Ox_3, направленной перпендикулярно к плоскости орбиты; при этом управляющие двигатели выключены, маховики относительно тела не вращаются.

Уравнения движения гиростата можно представить в виде [2]

(1.2) $$MX_i^{\bullet\bullet} = \frac{\partial U}{\partial X_i} \qquad (i = 1, 2, 3)$$

$$(C - J)\, q_1^\bullet = -(C - J)\, q_2\varphi_1^\bullet + (q_3 + \varphi_1^\bullet) \sum (h_i - L_i)\beta_{i2} - $$
$$- q_2 \sum (h_i - L_i)\beta_{i3} + M_{x_1'} - w_1$$
$$(C - J)\, q_2^\bullet = (C - J)\, q_1\varphi_1^\bullet - (q_3 + \varphi_1^\bullet) \sum (h_i - L_i)\beta_{i1} +$$
$$+ q_1 \sum (h_i - L_i)\beta_{i3} + M_{x_2'} - w_2$$
$$C_3 (q_3 + \varphi_1^\bullet)^\bullet = q_2 \Sigma (h_i - L_i)\beta_{i1} - q_1 \Sigma (h_i - L_i)\beta_{i2}$$
$$\beta_{i1}^\bullet + q_2\beta_{i3} - q_3\beta_{i2} = 0 \qquad (i = 1, 2, 3) \quad (1\ 2\ 3)$$

Здесь через w_1, w_2 обозначены новые управляющие моменты относительно осей Ox_1', Ox_2'; L_i — проекции кинетического момента центра масс; $M_{x_1'}$, $M_{x_2'}$ — моменты гравитационных сил на основании (1.1)

(1.3) $$w_1 = u_1 \cos \varphi_1 - u_2 \sin \varphi_1, \quad w_2 = u_1 \sin \varphi_1 + u_2 \cos \varphi_1$$
$$(\varphi_1^\bullet = \varphi^\bullet + \Phi^\bullet \beta_{33})$$
$$L_1 = M\,(X_2X_3^\bullet - X_2^\bullet X_3) \qquad (1\ 2\ 3)$$

(1.4) $$M_{x_1'} = \frac{3\varkappa}{R^5}(C_3 - C)(\Sigma X_i\beta_{i2})(\Sigma X_i\beta_{i3})$$
$$M_{x_2'} = -\frac{3\varkappa}{R^5}(C_3 - C)(\Sigma X_i\beta_{i1})(\Sigma X_i\beta_{i3}), \qquad M_{x_3'} = 0$$

Изучаемый режим определяется частным решением уравнений движения (1.2)

(1.5) $$X_1 = R_0 \cos \omega_1 t, \qquad X_2 = R_0 \sin \omega_1 t, \qquad X_3 = 0$$
$$\varphi_1^\bullet = \omega_1 + \omega = \omega^*, \quad q_i = 0, \quad \beta_{ik} = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}$$
$$w_1 = w_2 = 0, \ h_1^\circ = h_2^\circ = 0, \ h_3^\circ = MR_0^2\omega_1 + h^\circ \ (h^\circ = C_3\omega^*)$$

Рассмотрим задачу стабилизации движения (1.5) в ограниченной постановке, т. е. без учета возмущений координат центра масс гиростата X_1, X_2, X_3.

Приняв движение (1.5) за невозмущенное, обозначим возмущенное движение через

$$q_1, q_2, \omega^* + q_3; \ 1 + \beta_{ik} \quad (i = k), \ \beta_{ik} \quad (i \neq k)$$
$$w_1, w_2; \ h_1, h_2, h^\circ + h_3$$

(через q_3 обозначено суммарное возмущение по абсолютной угловой скорости $p_3 = q_3 + \varphi_1^{\cdot}$).

Тогда на основании (1.2), (1.4) получим следующие уравнения возмущенного движения, соответствующие (1.5):

$$
\begin{aligned}
(1.6)\qquad & q_1^{\cdot} = h_{12}q_3 - (h_{13} + \omega^*)\,q_2 + \omega^*\Sigma\, h_{1i}\beta_{i2} + \\
& + \beta_{13}\nu\sin 2\omega_1 t + 2\beta_{23}\nu\sin^2\omega_1 t + \Sigma h_{1i}B_{i1} + v_1 + \\
& + 2\nu\,(\beta_{12}\cos\omega_1 t + \beta_{22}\sin\omega_1 t)\,(\beta_{13}\cos\omega_1 t + \beta_{23}\sin\omega_1 t) \\
& q_2^{\cdot} = (h_{13} + \omega^*)\,q_1 - h_{11}q_3 - \omega^*\Sigma h_{1i}\beta_{i1} - \\
& - 2\beta_{13}\nu\cos^2\omega_1 t - \beta_{23}\,\nu\sin 2\omega_1 t + v_2 + \Sigma h_{1i}B_{i2} - \\
& - 2\nu\,(\beta_{11}\cos\omega_1 t + \beta_{21}\sin\omega_1 t)\,(\beta_{13}\cos\omega_1 t + \beta_{23}\sin\omega_1 t) \\
& q_3^{\cdot} = h_{31}q_2 - h_{32}q_1 + \Sigma h_{3i}B_{i3} \\
(1.7)\qquad & \beta_{ii}^{\cdot} = B_{ii}\quad (i = 1, 2, 3),\quad \beta_{12}^{\cdot} = -q_3 + B_{12},\quad \beta_{13}^{\cdot} = q_2 + B_{13} \\
& \qquad\qquad (1\ 2\ 3)
\end{aligned}
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
(1.8)\qquad & \frac{h_j}{C-J} = h_{1j},\quad \frac{h_j}{C_3} = h_{3j}\quad (j = 1, 2),\quad \frac{h^\circ + h_3}{C-J} = h_{13},\quad \frac{h^\circ + h_3}{C_3} = h_{33} \\
& (C - J)\,v_1 = -w_1 + \omega^* h_2,\qquad (C - J)\,v_2 = -w_2 - \omega^* h_1 \\
& B_{i1} = q_3\beta_{i2} - q_2\beta_{i3}\quad (i = 1, 2, 3)\quad (1\,2\,3),\qquad \nu = \frac{3\varkappa}{2R_0^3}\,\frac{C_3 - C}{C - J}
\end{aligned}
$$

Ранее было установлено [2], что при наличии трех маховиков управления v_1, v_2, v_3 могут быть выбраны таким образом, чтобы обеспечить асимптотическую устойчивость движения (1.5) по всем фазовым координатам основного тела q_i, β_{ik} $(i, k = 1, 2, 3)$ и минимум некоторого функционала интегрального типа. Ниже будет показано, что аналогичная задача относительно части координат q_i, β_{ik} имеет решение при наличии лишь двух управлений v_1, v_2.

2. Решение задачи стабилизации. Будем искать управления v_1, v_2, решающие поставленную задачу, в виде суммы двух слагаемых

$$
(2.1)\qquad v_j = v_j^* + v_j^{**}\quad (j = 1, 2)
$$

где добавочные управления v_j^{**} определим заранее, положив

$$
\begin{aligned}
(2.2)\qquad & v_1^{**} = -h_{12}q_3 - (\omega^* + q_3)\,(h_{11}\beta_{12} + h_{12}\beta_{22}) \\
& v_2^{**} = h_{11}q_3 + (\omega^* + q_3)\,(h_{11}\beta_{11} + h_{12}\beta_{21})
\end{aligned}
$$

Управления (2.2) содержат лишь члены второго и третьего порядка малости относительно β_{jk}, h_j $(j, k = 1, 2)$, q_3.

В силу (2.1), (2.2) уравнения возмущенного движения (1.6) примут вид

$$
\begin{aligned}
(2.3)\qquad & q_1^{\cdot} = -(\delta + 1)\,\omega^* q_2 + \delta\omega^{*2}\beta_{32} + \beta_{13}\nu\sin 2\omega_1 t + \\
& + 2\beta_{23}\nu\sin^2\omega_1 t + v_1^* + Q_1 \\
& q_2^{\cdot} = (\delta + 1)\,\omega^* q_1 - \delta\omega^{*2}\beta_{31} - 2\beta_{13}\nu\cos^2\omega_1 t - \\
& - \beta_{23}\nu\sin 2\omega_1 t + v_2^* + Q_2 \\
& q_3^{\cdot} = Q_3\qquad (\delta = C_3/(C - J))
\end{aligned}
$$

Здесь Q_i — невыписанные члены второго и третьего порядка малости относительно q_i, β_{ik}, $h_i (i, k = 1, 2, 3)$. Функции Q_1, Q_2, Q_3 обращаются в нуль при $q_1 = q_2 = 0$, $\beta_{13} = \beta_{23} = \beta_{31} = \beta_{32} = 0$.

Поставим следующую задачу: так определить управления v_1^*, v_2^*, чтобы нулевое решение уравнений (2.3), (1.7)

$$q_i = 0, \quad \beta_{ik} = 0 \quad (i, k = 1, 2, 3) \tag{2.4}$$

было асимптотически устойчивым по переменным q_j, β_{j3}, β_{3j} $(j = 1, 2)$ и при этом выполнялось условие минимума функционала

$$I = \int_0^\infty \Omega(q_1, q_2, q_3; \beta_{11}, \beta_{12}, \ldots, \beta_{33}, v_1^*, v_2^*, t)\, dt \tag{2.5}$$

Здесь Ω — определенно-положительная по q_j, β_{j3}, β_{3j} $(j = 1, 2)$ функция, которая будет найдена в процессе решения задачи, основанного на теоремах Н. Н. Красовского, В. В. Румянцева об оптимальной стабилизации управляемых движений [1, 4].

Построение оптимального управления и функции Ω проведем в два этапа [2]: сначала рассмотрим «укороченную» систему уравнений возмущенного движения, а затем обобщим полученные результаты на случай полных уравнений (2.3), (1.7).

Укороченная система уравнений относительно стабилизируемых переменных q_j, β_{j3}, β_{3j} $(j = 1, 2)$ имеет вид

$$\begin{aligned}
& q_1^{\cdot} = -(\delta + 1)\,\omega^* q_2 + \delta\,\omega^{*2}\beta_{32} + \beta_{13}\nu \sin 2\omega_1 t + \\
& + 2\beta_{23}\nu \sin^2 \omega_1 t + v_1^* \\
& q_2^{\cdot} = (\delta + 1)\,\omega^* q_1 - \delta\,\omega^{*2}\beta_{31} - 2\beta_{13}\nu \cos^2 \omega_1 t - \\
& - \beta_{23}\nu \sin 2\omega_1 t + v_2^* \\
& \beta_{13}^{\cdot} = q_2, \quad \beta_{23}^{\cdot} = -q_1, \quad \beta_{31}^{\cdot} = -q_2, \quad \beta_{32}^{\cdot} = q_1 \\
& \beta_{33}^{\cdot} = q_2\beta_{31} - q_1\beta_{32}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

В качестве функции Ляпунова примем

$$\begin{aligned}
2V = {} & k_1 \sum_{i=1}^{3} \beta_{i3}^2 + k_2 \sum_{i=1}^{3} \beta_{3i}^2 + \sum_{j=1}^{2} m_j q_j^2 + \\
& + 2q_1 \sum_{j=1}^{2} (a_{j3}\beta_{j3} + a_{3j}\beta_{3j}) + 2q_2 \sum_{j=1}^{2} (b_{j3}\beta_{j3} + b_{3j}\beta_{3j})
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Подынтегральную функцию минимизируемого функционала (2.5) возьмем в виде

$$\Omega_1 = \sum_{j, k=1}^{2} e_{jk} q_j q_k + \sum_{j=1}^{2} n_j v_j^{*2} + F(\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{32}, t) \tag{2.8}$$

В функциях (2.7), (2.8) k_j, m_j, n_j $(j = 1, 2)$ являются исходными положительными параметрами, через которые будут выражены все остальные коэффициенты (в том числе коэффициенты неизвестной квадратичной формы F), причем некоторые из коэффициентов a_{ik}, b_{ik}, e_{ik} могут быть периодическими функциями.

Согласно теореме Н. Н. Красовского об оптимальной стабилизации [1]

$$v_j^* = -\frac{1}{2n_j}\frac{\partial V}{\partial q_j} \qquad (j=1,2) \tag{2.9}$$

для функции V получаем уравнение в частных производных

$$\begin{gathered}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{1}{4n_1}\left(\frac{\partial V}{\partial q_1}\right)^2 - \frac{1}{4n_2}\left(\frac{\partial V}{\partial q_2}\right)^2 + \frac{\partial V}{\partial q_1}[-(\delta+1)\omega^* q_2 + \\ + \delta\omega^{*2}\beta_{32} + \beta_{13}\nu\sin 2\omega_1 t + 2\beta_{23}\nu\sin^2\omega_1 t] + \\ + \frac{\partial V}{\partial q_2}[(\delta+1)\omega^* q_1 - \delta\omega^{*2}\beta_{31} - 2\beta_{13}\nu\cos^2\omega_1 t - \beta_{23}\nu\sin 2\omega_1 t] + \\ + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_{13}} - \frac{\partial V}{\partial \beta_{31}}\right)q_2 + \left(\frac{\partial V}{\partial \beta_{32}} - \frac{\partial V}{\partial \beta_{23}}\right)q_1 + \\ + \frac{\partial V}{\partial \beta_{33}}B_{33} + \sum_{j,k=1}^{2} e_{jk}q_j q_k + F(\beta_{13}, \beta_{23}, \beta_{31}, \beta_{32}, t) = 0\end{gathered} \tag{2.10}$$

Подставляя (2.9) в (2.10) и выделяя коэффициенты при одинаковых членах второго порядка $q_k\beta_{j3}$, $q_k\beta_{3j}$ $(j,\ k = 1,\ 2)$, получаем системы линейных дифференциальных уравнений относительно a_{j3}, b_{j3}, a_{3j}, b_{3j} $(j = 1,2)$.

Приняв для простоты $k_j = k$, $m_j = m$, $n_j = n$ $(j = 1,\ 2)$, получим частные решения

$$\begin{gathered}a_{31} = b_{32} = \mu(\delta+1)\,\omega^*(2k + m\delta\omega^{*2}) \qquad (d = m / n) \\ a_{32} = -b_{31} = \mu d(2k + m\delta\omega^{*2}) \qquad (\mu = [d^2 + (\delta+1)^2\omega^{*2}]^{-1})\end{gathered} \tag{2.11}$$

$$\begin{gathered}\left.\begin{aligned}a_{j3} &= a_{j3}^* + K_{j3}\cos 2\omega_1 t + L_{j3}\sin 2\omega_1 t \\ b_{j3} &= b_{j3}^* + M_{j3}\cos 2\omega_1 t + N_{j3}\sin 2\omega_1 t\end{aligned}\right. \qquad (j=1,2) \\ a_{13}^* = b_{23}^* = -\mu(\delta+1)\,\omega^* m\nu, \quad a_{23}^* = -b_{13}^* = \mu d m\nu \\ K_{13} = N_{13} = L_{23} = -M_{23} = \mu_1 m\nu\,\{2\omega_1[d^2 + 4\omega_1^2 - (\delta + \\ + 1)\,\omega^{*2}] - (\delta+1)\,\omega^*[d^2 - 4\omega_1^2 + (\delta+1)^2\omega^{*2}]\} \\ M_{13} = -L_{13} = K_{23} = N_{23} = -\mu_1 d m\nu\,[d^2 + 4\omega_1^2 + (\delta + \\ + 1)^2\omega^{*2} + 4(\delta+1)\,\omega^*\omega_1]\end{gathered} \tag{2.12}$$

Здесь

$$\mu_1^{-1} = \begin{vmatrix} -d & 2\omega_1 & (\delta+1)\omega^* & 0 \\ -2\omega_1 & -d & 0 & (\delta+1)\omega^* \\ -(\delta+1)\omega^* & 0 & -d & 2\omega_1 \\ 0 & -(\delta+1)\omega^* & -2\omega_1 & -d \end{vmatrix} \tag{2.13}$$

Далее находим

$$\begin{gathered}e_{11} = d^2 n + a_{23} - a_{32}, \qquad e_{22} = d^2 n - b_{13} + b_{31} \\ 2e_{12} = -a_{13} + b_{23}\end{gathered} \tag{2.14}$$

$$F = \frac{1}{4n}\left\{\left[\sum_{j=1}^{2}(a_{j3}\beta_{j3} + a_{3j}\beta_{3j})\right]^2 + \left[\sum_{j=1}^{2}(b_{j3}\beta_{j3} + b_{3j}\beta_{3j})\right]^2\right\} -$$
$$- \left[\sum_{j=1}^{2}(a_{j3}\beta_{j3} + a_{3j}\beta_{3j})\right](\delta\omega^{*2}\beta_{32} + \beta_{13}\nu\sin 2\omega_1 t +$$
$$+ 2\beta_{23}\nu\sin^2\omega_1 t) + \left[\sum_{j=1}^{2}(b_{j3}\beta_{j3} + b_{3j}\beta_{3j})\right](\delta\omega^{*2}\beta_{31} +$$
$$+ 2\beta_{13}\nu\cos^2\omega_1 t + \beta_{23}\nu\sin 2\omega_1 t) \tag{2.15}$$

Для установления знака функции (2.15) перейдем от зависимых переменных β_{ik} к независимым — углам Крылова θ, ψ [5], приняв за основные оси O_1X_2 и Ox_3

$$\beta_{13} = \psi + \ldots, \quad \beta_{31} = -\psi + \ldots, \quad \beta_{23} = -\theta + \ldots,$$
$$\beta_{32} = \theta + \ldots \tag{2.16}$$

Многоточие означает члены порядка малости выше первого. Считая d достаточно большим и введя малый параметр $\varepsilon = 1 / d$, ограничимся в найденных решениях (2.11) — (2.13) главными членами первого порядка малости, т. е.

$$a_{13} = \varepsilon m\nu\sin 2\omega_1 t + \ldots, \quad b_{13} = -\varepsilon m\nu(1 + \cos 2\omega_1 t) + \ldots$$
$$a_{32} = \varepsilon(2k + m\delta\omega^{*2}) + \ldots, \quad b_{31} = -\varepsilon(2k + m\delta\omega^{*2}) + \ldots$$
$$a_{23} = \varepsilon m\nu(1 - \cos 2\omega_1 t) + \ldots, \quad b_{23} = -\varepsilon m\nu\sin 2\omega_1 t + \ldots \tag{2.17}$$

В силу (2.16), (2.17) функция (2.15) примет вид

$$F(\theta, \psi, t) = \frac{\varepsilon}{2m}(2k + m\delta\omega^{*2})(2k - m\delta\omega^{*2})(\theta^2 + \psi^2) +$$
$$+ 2\varepsilon m\nu(\delta\omega^{*2} - \nu)(\psi\cos\omega_1 t - \theta\sin\omega_1 t)^2 + \varepsilon^2 F^*(\theta, \psi, t) + \ldots \tag{2.18}$$

Здесь $F^*(\theta, \psi, t)$ — квадратичная форма по переменным θ, ψ с периодическими коэффициентами. Функция (2.18) с учетом малости ν (1.8) является определенно-положительной при условиях $\delta\omega^{*2} < 2k/m, \nu > 0$, или

$$\delta\omega^{*2} < 2k/m, \qquad C_3 > C \tag{2.19}$$

что совпадает с ранее полученными результатами [2]. Нетрудно проверить, что в силу (2.17) функция V (2.7) допускает бесконечно малый высший предел по переменным q_j, β_{j3}, β_{3j} ($j = 1, 2$).

Оптимальное управление в силу (2.7), (2.9) записывается в виде

$$-v_1^* = dq_1 + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2}(a_{j3}\beta_{j3} + a_{3j}\beta_{3j})$$
$$-v_2^* = dq_2 + \frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2}(b_{j3}\beta_{j3} + b_{3j}\beta_{3j}) \tag{2.20}$$

На основании (1.3), (1.8), (2.1), (2.2), (2.20) приходим к следующему исходному управлению:

$$u_1 = w_1 \cos \omega^* t + w_2 \sin \omega^* t, \quad u_2 = -w_1 \sin \omega^* t + w_2 \cos \omega^* t \tag{2.21}$$

$$w_1 = \omega^* h_2 + (C - J)\left[dq_1 + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2} (a_{j3}\beta_{j3} + a_{3j}\beta_{3j}) \right] +$$

$$+ h_2 q_3 + (\omega^* + q_3)(h_1\beta_{12} + h_2\beta_{22})$$

$$w_2 = -\omega^* h_1 + (C - J)\left[dq_2 + \frac{1}{2n} \sum_{j=1}^{2} (b_{j3}\beta_{j3} + b_{3j}\beta_{3j}) \right] -$$

$$- h_1 q_3 - (\omega^* + q_3)(h_1\beta_{11} + h_2\beta_{21})$$

Итак, найденное управление (2.21), (2.11), (2.12) при достаточно большом d и условиях (2.19) обеспечивает оптимальную (в смысле минимума (2.5), (2.8)) стабилизацию движения (2.4) по фазовым координатам q_j, β_{j3}, β_{j3} ($j = 1, 2$) в силу приближенной системы уравнений возмущенного движения (2.6).

Отметим, что ввиду (2.16) из стабилизируемости движения (2.4) по β_{j3}, β_{3j} ($j = 1, 2$) вытекает стабилизируемость этого движения по всем β_{ik} ($i, k = 1, 2, 3$).

Нетрудно установить, что функция Ляпунова (2.7), а значит и управление (2.21), решают задачу оптимальной стабилизации движения (2.4) в силу полных уравнений возмущенного движения (2.3), (1.7), если подынтегральную функцию Ω (2.5) взять в форме

$$\Omega = \Omega_1 + \Omega_2 \tag{2.22}$$

Здесь Ω_1 — определенно-положительная по переменным q_j, β_{j3}, β_{3j} ($j = 1, 2$) функция (2.8), через Ω_2 обозначены члены третьего и четвертого порядка малости

$$\Omega_2 = -\sum_{j=1}^{2} \left(\frac{\partial V}{\partial q_j} O_j + \frac{\partial V}{\partial \beta_{j3}} B_{j3} + \frac{\partial V}{\partial \beta_{3j}} B_{3j} \right) \tag{2.23}$$

Условия теоремы В. В. Румянцева (см. [4], теорема 3.1 при наличии у функции V бесконечно малого высшего предела по стабилизируемым переменным) будут выполнены, если старшие члены не нарушат знакоопределенность основной квадратичной формы Ω_1. Переходя в силу (2.16) к независимым переменным, имеем для Ω

$$\Omega = \Omega_1^* (q_1, q_2, \theta, \psi) + \Omega_2^* (q_1, q_2, \theta, \psi) + \tag{2.24}$$

$$+ q_3 [f (q_1, q_2, \theta, \psi) + \ldots]$$

Здесь Ω_1^* — определенно-положительная квадратичная форма, получаемая из (2.8), (2.18), (2.20); через Ω_2^* обозначены члены выше второго порядка малости, не влияющие на знак Ω; f представляет собой знакопеременную квадратичную форму от q_1, q_2, θ, ψ с коэффициентами, содержащими множитель q_3. Функция Ω (2.24) является определенно-положительной по переменным q_1, q_2, θ, ψ, если указанные коэффициенты сколь угодно малы [6]. Последнее, очевидно, имеет место, если движение (2.4) устойчиво по Ляпунову относительно q_3. Итак, управление (2.21), (2.11) — (2.13) обеспечивает оптимальную (в смысле минимума функционала (2.5), (2.24)) стабилизацию вращательного движения гиростата (1.5), (2.4) по фазовым координатам q_1, q_2, θ, ψ, поскольку при отсутствии управления это вращение устойчиво по угловой скорости гиростата q_3 вокруг оси симметрии Ox_3 (имеет место интеграл $q_3 = \mathrm{const}$).

Поступила 12 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Проблемы стабилизации управляемых движений. В кн.: Малкин И. Г. Теория устойчивости движения. Доп. 4. М., «Наука», 1966.
2. *Крементуло В. В.* Об оптимальной стабилизации вращательного движения гиростата в ньютоновском поле сил. ПММ, 1970, т. 34, вып. 5.
3. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. М., «Наука», 1965.
4. *Румянцев В. В.* Об оптимальной стабилизации управляемых систем. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
5. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961.
6. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.