

О БИФУРКАЦИИ И УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНЫХ ДВИЖЕНИЙ В НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ДИНАМИКИ ТВЕРДОГО ТЕЛА

В. Н. Рубановский

(Москва)

Теория бифуркации стационарных движений развита Пуанкаре [1] и Четаевым [2] для лагранжевых консервативных механических систем. В основе этой теории лежит исследование (измененной) потенциальной энергии системы $V = V(c, q_1, \dots, q_m)$, где q_1, \dots, q_m — лагранжевы координаты, а c — параметр.

Ниже на трех задачах динамики твердого тела показано, что эта теория применима для исследования систем с известными первыми интегралами

$$\begin{aligned} U(x_1, \dots, x_n) = c, \quad U_1(x_1, \dots, x_n) = c_1, \dots, \\ U_k(x_1, \dots, x_n) = c_k \quad (k+1 < n) \end{aligned}$$

Как и в классическом случае, здесь можно ввести функцию

$$\begin{aligned} W(c_1, \dots, c_k; \lambda_1, \dots, \lambda_k, x_1, \dots, x_n) = U + \lambda_1(U_1 - c_1) + \dots \\ \dots + \lambda_k(U_k - c_k) \end{aligned}$$

роль которой аналогична роли потенциальной энергии в теории Пуанкаре — Четаева, при этом $\lambda_1, \dots, \lambda_k, x_1, \dots, x_n$ формально играют роль переменных q_1, \dots, q_m ($k+n=m$).

1. Для определения стационарных движений имеем уравнения

$$(1.1) \quad \begin{aligned} \partial W / \partial \lambda_1 = U_1 - c_1 = 0, \dots, \quad \partial W / \partial \lambda_k = U_k - c_k = 0 \\ \partial W / \partial x_1 = 0, \dots, \quad \partial W / \partial x_n = 0 \end{aligned}$$

Пусть

$$(1.2) \quad \begin{aligned} \lambda_j = \lambda_j^\circ(c_1, \dots, c_k), \quad x_i = x_i^\circ(c_1, \dots, c_k) \\ (j=1, \dots, k; i=1, \dots, n) \end{aligned}$$

— вещественное решение системы (1.1). Обозначим через Δ гессиан функции W по переменным $\lambda_1, \dots, \lambda_k, x_1, \dots, x_n$, вычисленный для решения (1.2). В точках ветвления решений уравнений (1.1) имеем $\Delta = 0$. Точки, для которых $\Delta = 0$, будем называть точками бифуркации. Это определение совпадает с определением точки бифуркации для лагранжевых консервативных механических систем [2].

Пусть $c_j = c_j(\alpha)$ ($j=1, \dots, k$) — некоторые непрерывно-дифференцируемые функции параметра α . Для производных $d\lambda_j^\circ / d\alpha$ и $dx_i^\circ / d\alpha$ имеют место выражения

$$(1.3) \quad \frac{d\lambda_j^\circ}{d\alpha} = \sum_{v=1}^k \frac{\partial \lambda_j^\circ}{\partial c_v} \frac{dc_v}{d\alpha} = \frac{\Delta^{(j)}}{\Delta}, \quad \frac{dx_i^\circ}{d\alpha} = \sum_{v=1}^k \frac{\partial x_i^\circ}{\partial c_v} \frac{dc_v}{d\alpha} = \frac{\Delta^{(k+i)}}{\Delta}$$

где через $\Delta^{(l)}$ обозначен определитель, получаемый из Δ при замене его l -го столбца столбцом с компонентами $dc_1 / d\alpha, \dots, dc_k / d\alpha, 0, \dots, 0$.

Соотношения (1.3) являются аналогами известного в теории бифуркации соотношения (см. выражение для δ в [2], стр. 42), на основе которого анализ точек бифуркации исходной системы со многими степенями свободы, при определенных условиях, может быть приведен к исследованию точек бифуркации некоторой приведенной системы с одной степенью свободы и наоборот.

Достаточные условия устойчивости движения (1.2) получим из теоремы Рауса как достаточные условия знакоопределенности квадратичной формы

$$(1.4) \quad \delta^2 W = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \delta x_i \delta x_j$$

при условиях

$$(1.5) \quad \delta U_j = \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)_0 \delta x_i = 0 \quad (j=1, \dots, k), \quad \det \left\| \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)_0 \right\|_1^k \neq 0$$

Эти условия устойчивости можно представить в виде

$$(1.6) \quad D_\nu > 0 \quad \text{или} \quad (-1)^\nu D_\nu > 0 \quad (\nu=1, \dots, n-k)$$

где D_ν означает главный диагональный минор $(2k + \nu)$ -го порядка определителя $D = (-1)^k \Delta = D_{n-k}$.

Введем в рассмотрение уравнение

$$\Delta(\kappa) = \begin{vmatrix} \Theta & B \\ B' & A - \kappa E_n \end{vmatrix}$$

где

$$A = \left\| \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x_i \partial x_j} \right)_0 \right\|_1^n, \quad B = \left\| \left(\frac{\partial U_j}{\partial x_i} \right)_0 \right\|_{i,j=1}^{j=k, i=n}$$

Θ есть $(k \times k)$ - нуль-матрица, E_n — единичная матрица порядка n , а штрих означает операцию транспонирования. Это уравнение является естественным обобщением векового уравнения и имеет вещественные корни $\kappa_1, \dots, \kappa_{n-k}$, которые будут аналогом коэффициентов устойчивости Пуанкаре, а число отрицательных корней — аналогом степени неустойчивости χ движения (1.2), если при этом $\Delta(0) = \Delta \neq 0$.

В случае, когда движение системы описывается уравнениями вида

$$dx_i/dt = F_i(x_1, \dots, x_n) \quad (i=1, \dots, n)$$

имеет место следующий аналог теоремы Кельвина — Четаева [2].

Теорема. Если $D = (-1)^k \Delta < 0$, а уравнение

$$(1.7) \quad \left\| \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} \right)_0 - \sigma \delta_{ij} \right\|_1^n = (-1)^n \sigma^{k+l} (\sigma^{2p} + g_1 \sigma^{2(p-1)} + \dots + g_{p-1} \sigma^2 + g_p) = 0$$

где $k + l + 2p = n$, $l \geq 0$, δ_{ij} — символы Кронекера, имеет не более k нулевых корней, то невозмущенное движение (1.2) неустойчиво, при этом уравнение (1.7) имеет нечетное число положительных корней.

Доказательство этой теоремы несложно, но громоздко и основано на исследовании квадратичных первых интегралов уравнений в вариациях.

2. Рассмотрим задачу о бифуркации и устойчивости перманентных вращений уравновешенного гиростата.

Вольтерра [3] дал полное исследование этих движений на основе теоремы, представляющей, по существу, модификацию теоремы Рауса. В. В. Румянцев [4] применением прямого метода Ляпунова исследовал устойчивость перманентных вращений гиростата вокруг его главных осей инерции, возможных при условии коллинеарности вектора гиростатического момента главной оси инерции. Однако вопрос о бифуркации этих движений остается открытым.

Уравнения движения по инерции гиростата с одной закрепленной точкой O допускают интегралы

$$U = \sum_{(123)} (J_1 \omega_1 + g_1)^2 = \text{const}, \quad U_1 = \sum_{(123)} J_1 \omega_1^2 = h = \text{const}$$

Здесь ω_i , g_i ($i = 1, 2, 3$) — проекции векторов абсолютной мгновенной угловой скорости гиростата и гиростатического момента на главные оси его эллипсоида инерции для точки O , J_i — главные моменты инерции гиростата, знак суммирования с символом (123) означает, что два других слагаемых получаются из приведенного круговой перестановкой индексов 1, 2, 3.

Из уравнений вида (1.1) находим следующие выражения для проекций угловой скорости перманентных вращений гиростата:

$$(2.1) \quad \omega_1 = \frac{g_1}{\lambda - J_1} \quad (1\ 2\ 3)$$

где $\lambda = \lambda(h)$ — алгебраическая функция параметра h , определяемая уравнением

$$(2.2) \quad h = \sum_{(123)} \frac{J_1 g_1^2}{(\lambda - J_1)^2}$$

Достаточные условия (1.6) устойчивости движений (2.1) приводятся к неравенству

$$(2.3) \quad D = -\Delta = J_1 J_2 J_3 (\lambda - J_1) (\lambda - J_2) (\lambda - J_3) \sum_{(1\ 2\ 3)} \frac{J_1 \omega_1^2}{\lambda - J_1} > 0$$

В силу приведенной выше теоремы это условие является также и необходимым условием устойчивости.

Первая из формул (1.3) приводит к соотношению

$$(2.4) \quad D = -\Delta = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_1 - \lambda) (J_2 - \lambda) (J_3 - \lambda) \frac{dh}{d\lambda}$$

из которого, в частности, следует, что если $\lambda \neq J_1, J_2, J_3$, то $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $dh/d\lambda = 0$; поэтому в точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, функция $h = h(\lambda)$ имеет стационарные значения.

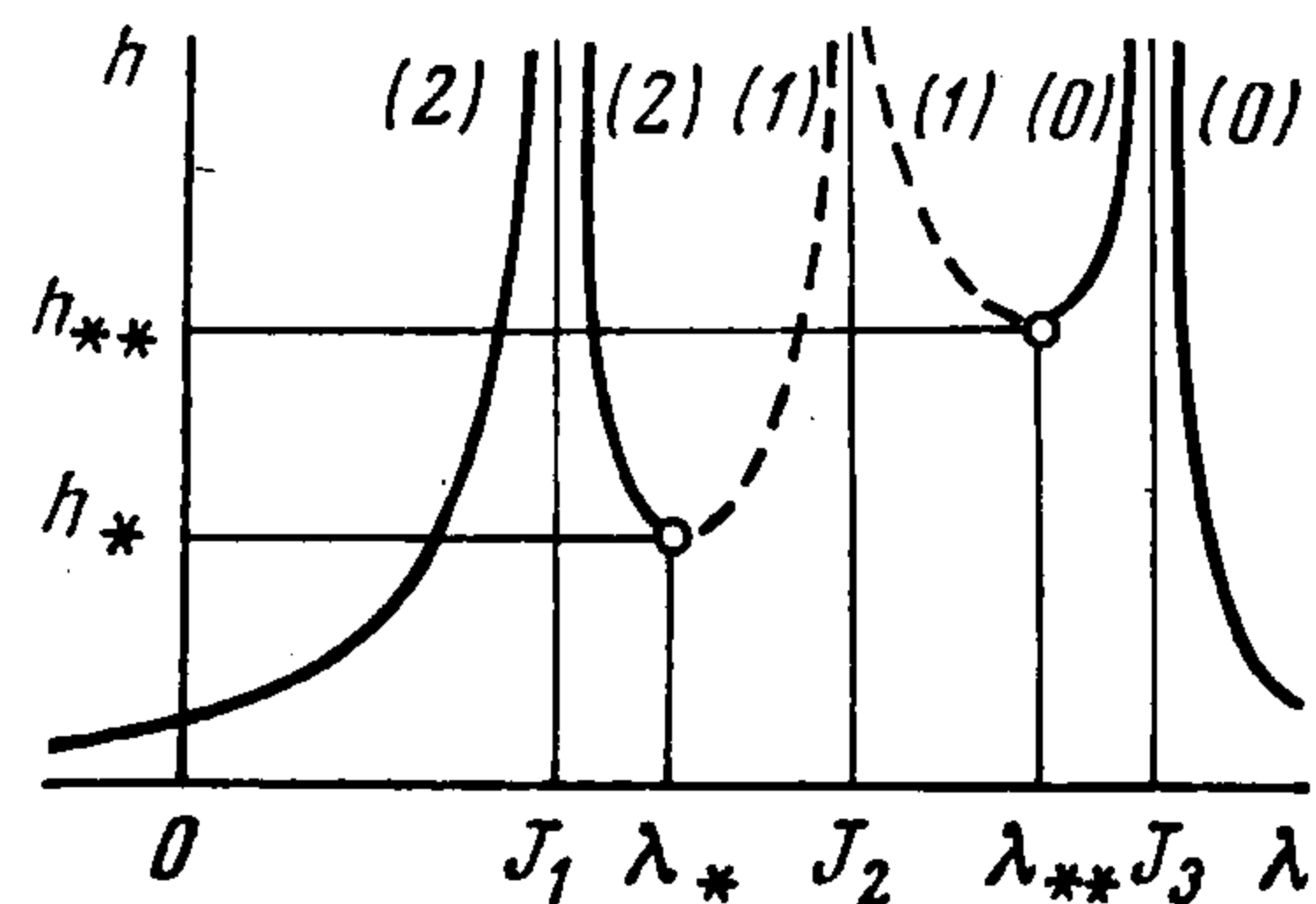
В теле осями перманентных вращений (2.1) гиростата служат образующие конуса

$$(2.5) \quad \sum_{(1\ 2\ 3)} g_1 (J_2 - J_3) \omega_2 \omega_3 = 0$$

Множество перманентных вращений (2.1) геометрически можно представить также в виде кривой $\lambda = \lambda(h)$, определяемой уравнением (2.2). Формулами (2.1) устанавливается соответствие между точками кривой $\lambda = \lambda(h)$ и образующими конуса (2.5).

На фиг. 1 представлен график функции $h = h(\lambda)$ для случая, когда

$$(2.6) \quad (J_2 - J_3)(J_3 - J_1) \times \\ \times (J_1 - J_2) g_1 g_2 g_3 \neq 0 \quad (J_1 < J_2 < J_3)$$



Фиг. 1

Обозначим через $\lambda_j = \lambda_j(h)$ ($j = 1, \dots, 6$) ветви кривой $\lambda = \lambda(h)$. При изменении h в интервалах

$$0 < h < \infty, \quad \infty > h \geq h_{**}, \quad h_{**} \leq h < \infty, \quad \infty > h \geq h_* \\ h_* \leq h < \infty, \quad \infty > h > 0 \quad (h_* = h(\lambda_*), \quad h_{**} = h(\lambda_{**}))'$$

значения λ_j изменяются в интервалах

$$-\infty < \lambda_1 < J_1, \quad J_1 < \lambda_2 \leq \lambda_{**}, \quad \lambda_{**} \leq \lambda_3 < J_2 \\ J_2 < \lambda_4 \leq \lambda_*, \quad \lambda_* \leq \lambda_5 < J_3, \quad J_3 < \lambda_6 < \infty$$

где λ_* и λ_{**} — корни уравнения $dh/d\lambda = 0$. В силу (2.1) этим шести ветвям кривой $\lambda = \lambda(h)$ в пространстве $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, h)$ соответствуют шесть ветвей кривой $\omega_i = \omega_i(h)$ ($i = 1, 2, 3$), при этом значениям $h = h_*$ и $h = h_{**}$ соответствуют точки бифуркации. Эти точки являются предельными для тех ветвей кривой $\omega_i = \omega_i(h)$ ($i = 1, 2, 3$), которые соответствуют ветвям λ_2, λ_3 и λ_4, λ_5 кривой $\lambda = \lambda(h)$. При изменении h в интервалах $0 < h < h_{**}$, $h_{**} < h < h_*$ и $h_* < h < \infty$ имеем соответственно две, четыре или шесть ветвей кривой $\omega_i = \omega_i(h)$ ($i = 1, 2, 3$).

Результаты проведенного исследования условия устойчивости (2.3) с использованием соотношения (2.4) представлены на фиг. 1, где цифры (0), (1), (2) на ветвях кривой $\lambda = \lambda(h)$ указывают степень неустойчивости движений (2.1), а значениям $\lambda = \lambda_*$ и $\lambda = \lambda_{**}$ соответствуют точки бифуркации.

Если условие (2.6) не выполняется, то перманентные вращения и условие их устойчивости могут быть получены из (2.1) — (2.3) при соответствующем предельном переходе.

Пусть, например, $g_1 = 0, g_2 g_3 \neq 0, J_1 < J_2 < J_3$. Тогда]

$$(2.7) \quad \omega_1 = \kappa \delta (J_1 - \lambda), \quad \omega_2 = \frac{g_2}{\lambda - J_2}, \quad \omega_3 = \frac{g_3}{\lambda - J_3} \quad (\kappa — параметр)$$

где $\delta(x) = 0$, если $x \neq 0$, и $\delta(0) = 1$.

В пространстве (h, λ, κ) движения (2.7) можно представить геометрически в виде поверхности $h = h(\lambda, \kappa)$, уравнение которой получается в результате подстановки значений (2.7) в интеграл энергии $U_1 = h$. Эта поверхность состоит из цилиндрической поверхности $h = h(\lambda, 0)$, $\lambda \neq J_1$, из которой удалена образующая, соответствующая значению $\lambda = J_1$, и параболы $h = h(J_1, \kappa)$, $\lambda = J_1$, расположенной в плоскости $\lambda = J_1$. Цилиндрическая поверхность и парабола имеют одну общую точку, для которой $\lambda = J_1, \kappa = 0, h = h(J_1, 0)$.

Принимая во внимание то обстоятельство, что каждой из образующих цилиндрической поверхности соответствует одно и только одно движение (2.7), поставим в соот-

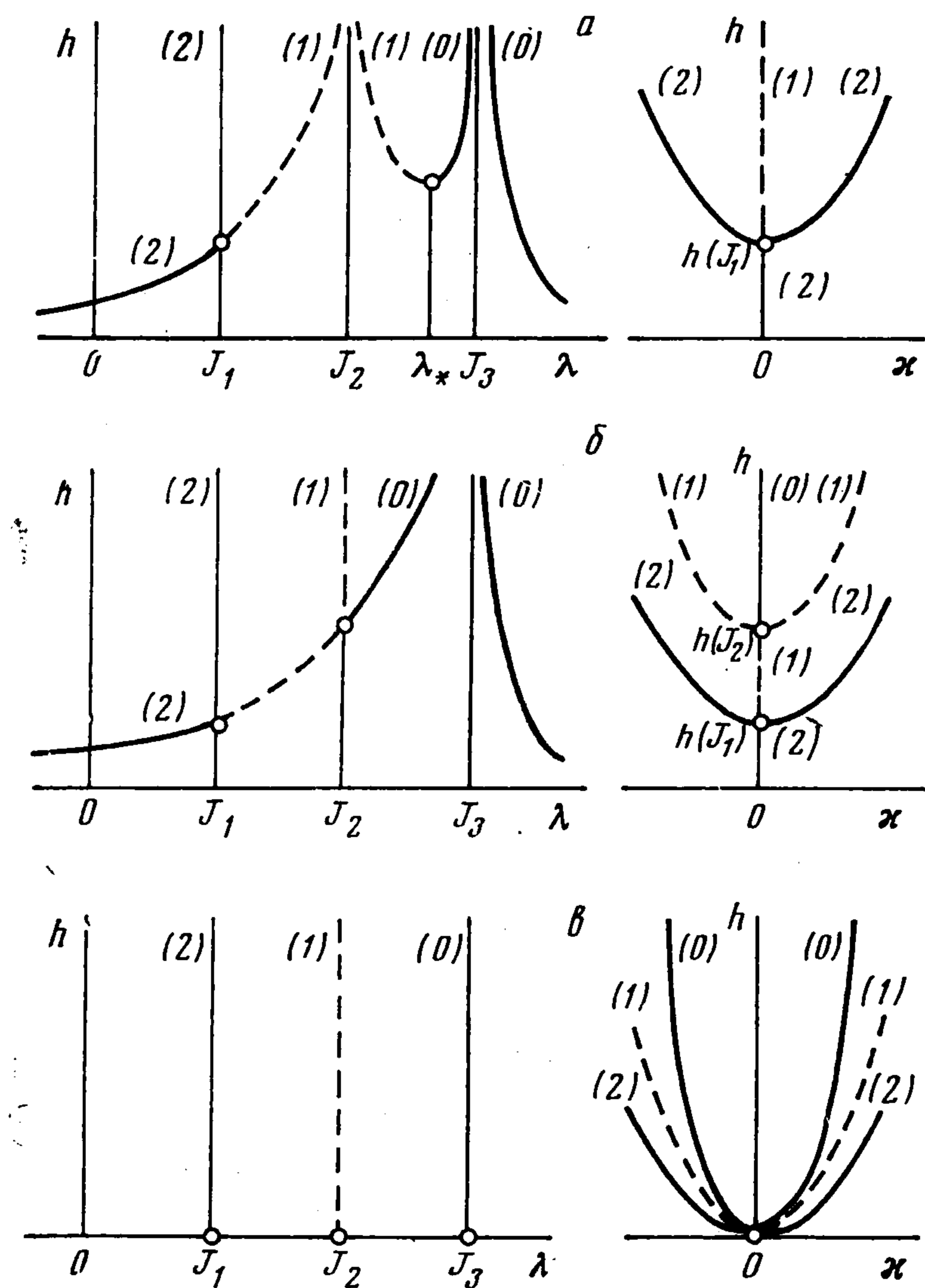
ветствии образующим этой поверхности точки их пересечения с плоскостью $\kappa = 0$ и для геометрического представления движений (2.7) в пространстве (h, λ, κ) вместо поверхности $h = h(\lambda, \kappa)$ введем в рассмотрение кривую l , отдельные ветви которой лежат в ортогональных плоскостях $\kappa = 0$ и $\lambda = J_1$ и задаются соответственно уравнениями $h = h(\lambda, 0), \kappa = 0$ и $h = h(J_1, \kappa), \lambda = J_1$.

На фиг. 2, а слева показан вид проекции кривой l на плоскость $\kappa = 0$, а справа — на плоскость $\lambda = J_1$ для $\lambda < J_2$.

Выражение (2.4) для D принимает вид

$$D = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_1 - \lambda) (J_2 - \lambda) (J_3 - \lambda) \frac{\partial h}{\partial \lambda}, \quad \text{если } \lambda \neq J_1$$

$$D = \frac{1}{2} J_1 J_2 J_3 (J_2 - J_1) (J_3 - J_1) \kappa \frac{\partial h}{\partial \kappa}, \quad \text{если } \lambda = J_1$$



Фиг. 2

Используя эти соотношения и вид кривой l , заключаем, что движения (2.7) устойчивы, если $\lambda > J_3, \lambda_* < \lambda < J_3$ или $\lambda < J_1$, где λ_* — корень уравнения $\partial h / \partial \lambda = 0$, и неустойчивы, если $J_1 < \lambda < J_2$ или $J_2 < \lambda < \lambda_*$; для $\lambda = J_1$ имеем $D > 0$ при всех $\kappa \neq 0$, и движения (2.7) устойчивы. Значениям $\lambda = \lambda_*, \kappa = 0$ и $\lambda = J_1, \kappa = 0$ соответствуют точки бифуркации.

На фиг. 2, а цифры (0), (1), (2) указывают степень неустойчивости движений (2.7). Пусть теперь $g_1 = g_2 = 0, g_3 \neq 0, J_1 < J_2 < J_3$. Тогда

$$(2.8) \quad \omega_1 = \kappa \delta (J_1 - \lambda), \quad \omega_2 = \kappa \delta (J_2 - \lambda), \quad \omega_3 = g_3 / (\lambda - J_3)$$

На фиг. 2, б) показаны проекции кривой l на плоскость $\kappa = 0$ и на плоскость $\lambda = J_1$ для $\lambda < J_3$; значениям $\lambda = J_1, \kappa = 0$ и $\lambda = J_2, \kappa = 0$ соответствуют точки бифуркации.

Наконец, когда $g_1 = g_2 = g_3 = 0, J_1 < J_2 < J_3$ (случай Эйлера), из (2.1) и (2.2) получаем

$$(2.9) \quad \omega_1 = \kappa \delta (J_1 - \lambda) \quad (1\ 2\ 3), \quad h(\lambda, \kappa) = \kappa^2 \sum_{(123)} J_1 \delta (J_1 - \lambda)$$

Из условия устойчивости (2.3) заключаем, что равномерные вращения (2.9) тела вокруг малой и большой осей его эллипсоида инерции устойчивы, а вращения вокруг средней оси неустойчивы.

На фиг. 2, в показаны проекции кривой l на плоскости $\kappa = 0$ и $\lambda = 0$; при этом все точки оси λ являются точками бифуркации и соответствуют безразличному положению равновесия тела.

3. Рассмотрим задачу о движении в центральном ньютоновом поле сил твердого тела с одной неподвижной точкой и полостью, целиком заполненной однородной несжимаемой вязкой жидкостью.

Введем подвижную прямоугольную систему координат $Ox_1x_2x_3$ с началом в неподвижной точке O тела, отстоящей от центра N притяжения на расстоянии R , и осями, совпадающими с главными осями эллипсоида инерции системы для точки O . Для простоты вычислений будем предполагать, что главные оси эллипсоида инерции жидкости для точки O совпадают с осями x_1, x_2, x_3 . Введем обозначения: A_i, B_i, C_i ($i = 1, 2, 3$) — моменты инерции относительно осей x_i соответственно тела, жидкости и всей системы; ω_i, G_i, g_i — проекции на оси x_i соответственно вектора мгновенной угловой скорости тела и векторов кинетического момента относительно точки O жидкости в ее абсолютном и относительном движениях; u_i — проекции на те же оси вектора относительной скорости частицы жидкости с координатами x_1, x_2, x_3 ; τ — объем полости; ρ — плотность жидкости; μ — коэффициент вязкости; g — ускорение тяготения на расстоянии R от центра притяжения; $\nu = 3gR^{-1}$; e_i — постоянные, пропорциональные проекциям на оси x_i вектора, проведенного из точки O в центр инерции системы; γ_i — направляющие косинусы «вертикали» NO относительно осей x_i .

Выражения для кинетической и потенциальной энергий системы имеют вид [4,5]

$$T = \frac{1}{2} \sum_{(123)} (A_1\omega_1^2 + B_1^{-1}G_1^2 + w_1^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{(123)} (\nu C_1\gamma_1^2 + 2e_1\gamma_1)$$

$$G_1 = B_1\omega_1 + g_1, \quad w_1^2 = \rho \int_{\tau} [u_1 + (\omega_2 - B_2^{-1}G_2)x_3 - (\omega_3 - B_3^{-1}G_3)x_2]^2 d\tau \quad (1 \ 2 \ 3)$$

Теоремы о кинетической энергии и кинетическом моменте системы приводят к соотношениям

$$\frac{dU}{dt} = \frac{d}{dt} (T + \Pi) = -\mu \int_{\tau} \sum_{(123)} \left[2 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial u_2}{\partial x_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x_2} \right)^2 \right] d\tau, \quad U_1 = \sum_{(123)} (A_1\omega_1 + G_1) \gamma_1 = k = \text{const}$$

Значения переменных $\omega_i, \gamma_i, G_i, w_i$ ($i = 1, 2, 3$), для которых U имеет стационарные значения при условии $U_2 = \gamma_1^2 + \gamma_2^2 + \gamma_3^2 = 1$ и данной величине интеграла площадей $U_1 = k$, соответствуют перманентным вращениям всей системы как одного твердого тела вокруг вертикали γ , определяемым по формулам

$$(3.1) \quad \omega_1 = \omega\gamma_1, \quad \Omega (C_1 - \lambda) \gamma_1 = e_1, \quad G_1 = \omega B_1\gamma_1, \quad w_1 = 0 \quad (u_1 = 0) \quad (123)$$

При этом зависимость $\omega = \omega(k)$ угловой скорости ω перманентного вращения и промежуточного параметра λ от постоянной k определяется из соотношений

$$(3.2) \quad \omega = \pm (\nu + \Omega)^{1/2}, \quad \Omega = \pm \left(\sum_{(123)} \frac{e_1^2}{(C_1 - \lambda)^2} \right)^{1/2}, \quad k = \frac{\omega}{\Omega^2} \sum_{(123)} \frac{C_1 e_1^2}{(C_1 - \lambda)^2}$$

Достаточные условия устойчивости (1.6) движений (3.1) по отношению к величинам $\omega_i, \gamma_i, G_i, w_i$ ($i = 1, 2, 3$) в случае, когда

$$(3.3) \quad \omega \sum_{(123)} (C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 \neq 0$$

приводятся к неравенствам [5,6]

$$(3.4) \quad D = \Delta = (4\omega^2 L + \Omega C S) \Omega > 0, \quad \Delta_1 = \Omega L > 0$$

$$L = \sum_{(123)} (\lambda - C_1) (C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2, \quad S = \sum_{(123)} (\lambda - C_2) (\lambda - C_3) \gamma_1^2, \quad C = \sum_{(123)} C_1 \gamma_1^2$$

Если условие (3.3) не выполняется, то второе из неравенств (3.4) следует заменить следующим:

$$(3.5) \quad \Delta_1' = 4\omega^2 \sum_{(123)} (C_2 - C_3)^2 \gamma_2^2 \gamma_3^2 + C \Omega \sum_{(123)} (\lambda - C_1) (\gamma_2^2 + \gamma_3^2) > 0$$

При изменении знака хотя бы одного из неравенств (3.4) или (3.5) на обратный невозмущенное движение (3.1) будет неустойчиво [4].

Если жидкость в полости тела отсутствует, то в силу приведенной в п. 1 теоремы при изменении знака неравенства в первом из условий (3.4) на обратный движение (3.1) будет неустойчиво. Если же $\Delta > 0$, но $\Delta_1 < 0$ или $\Delta_1' < 0$, то для решения вопроса об устойчивости следует обратиться к исследованию корней характеристического уравнения

$$(3.6) \quad \sigma^2 (g_0 \sigma^4 + g_1 \sigma^2 + g_2) = 0$$

$$g_0 = C_1 C_2 C_3, \quad g_1 = \sum_{(123)} C_1 \{ (C_2 + C_3 - C_1)^2 \omega^2 + [C_2 (\lambda - C_2) + C_3 (\lambda - C_3)] \Omega \} \gamma_1^2, \quad g_2 = \Delta$$

При выполнении хотя бы одного из неравенств

$$(3.7) \quad g_1 < 0, \quad g_2 < 0, \quad g_1^2 - 4g_0 g_2 < 0$$

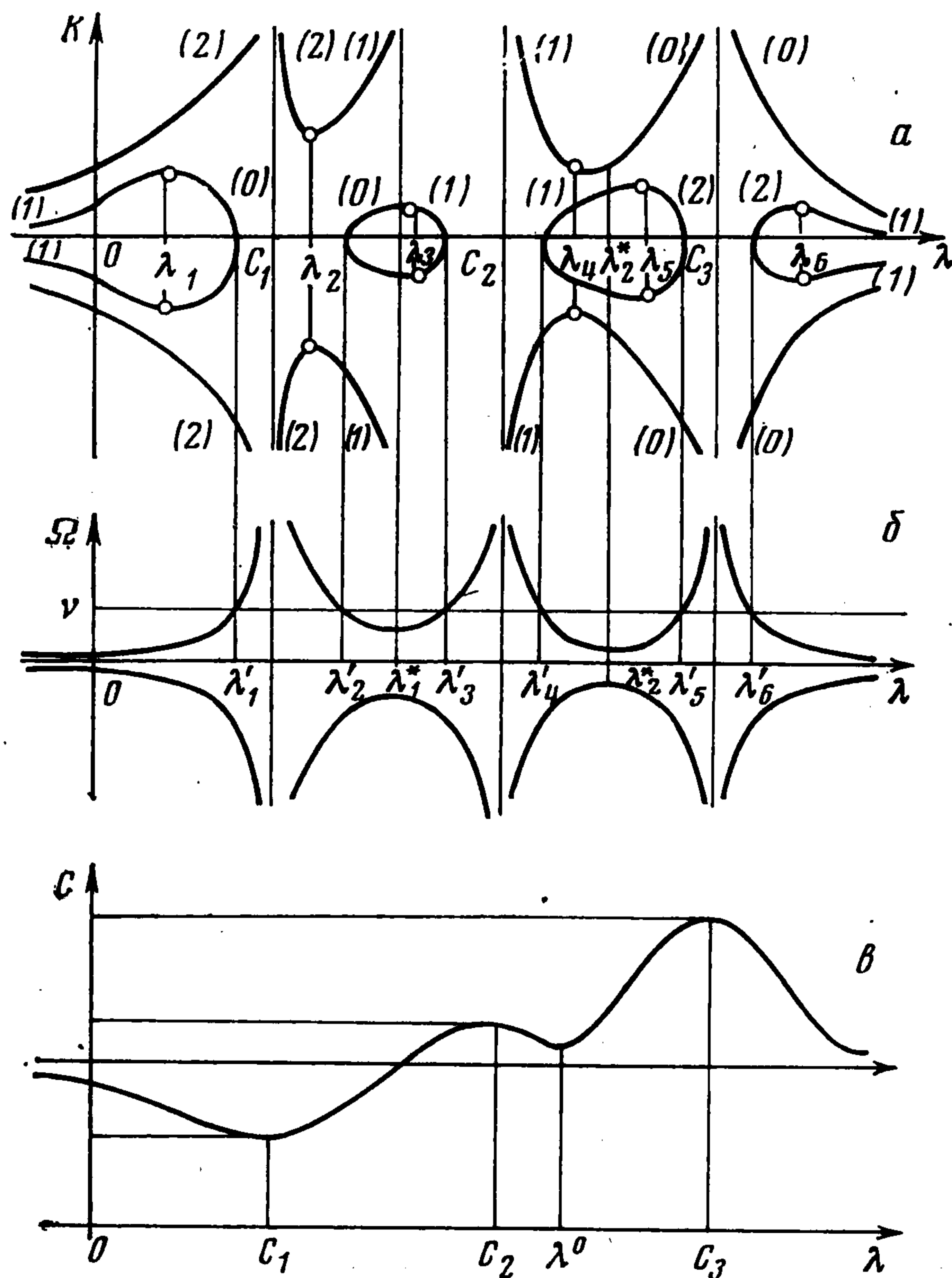
среди корней уравнения (3.6) найдется корень с положительной вещественной частью, и движение (3.1) будет неустойчиво, при этом $\chi = 1$, если $g_2 < 0$, и $\chi = 2$, если $g_2 > 0$.

Если же в (3.7) знаки всех неравенств изменить на обратные, то движение (3.1) будет устойчиво в первом приближении, при этом $\chi = 2$, если $\Delta_1 < 0$ или $\Delta_1' < 0$. В этом случае, если среди движений (3.1) имеются устойчивые, то их устойчивость носит гироскопический характер и разрушается при действии на систему диссипативных сил с полной диссипацией (последнее имеет место, например, при наличии вязкой жидкости в полости тела).

4. В теле осями перманентных вращений (3.1) служат образующие конуса Штауде

$$\sum_{(123)} e_1(C_2 - C_3) \gamma_2 \gamma_3 = 0$$

Множество движений (3.1) можно геометрически представить также в виде кривой $\lambda = \lambda(k)$, определяемой уравнениями (3.2). Формулами



Фиг. 3

(3.1) устанавливается соответствие между точками кривой $\lambda = \lambda(k)$ и образующими конуса Штауде.

Из (1.3) получаем соотношение

$$\frac{dk}{d\lambda} = \frac{4\omega^2 L + \Omega C S}{2\omega(C_1 - \lambda)(C_2 - \lambda)(C_3 - \lambda)}$$

с помощью которого выражение (3.4) для Δ можно представить в виде

$$(4.1) \quad \Delta = 2\omega\Omega(C_1 - \lambda)(C_2 - \lambda)(C_3 - \lambda) dk/d\lambda$$

Отсюда следует, что если $\lambda \neq C_1, C_2, C_3$ и $\omega \neq 0$, то $\Delta = 0$ тогда и только тогда, когда $dk/d\lambda = 0$. В точках бифуркации, для которых $\Delta = 0$, касательная к кривой $k = k(\lambda)$ параллельна оси λ .

На фиг. 3, a представлен график функции $k = k(\lambda)$, обратной по отношению к функции $\lambda = \lambda(k)$, для случая, когда уравнение $\Omega(\lambda) = \nu$

имеет шесть вещественных корней λ_j' ($j = 1, \dots, 6$) и

$$(4.2) \quad (C_2 - C_3)(C_3 - C_1)(C_1 - C_2)e_1e_2e_3 \neq 0 \quad (C_1 < C_2 < C_3)$$

Для анализа условий устойчивости (3.4) будем использовать также соотношения

$$(4.3) \quad \frac{d\Omega}{d\lambda} = \frac{\Omega S}{(C_1 - \lambda)(C_2 - \lambda)(C_3 - \lambda)}, \quad \frac{dC}{d\lambda} = \frac{2L}{(C_1 - \lambda)(C_2 - \lambda)(C_3 - \lambda)}$$

Второе из этих соотношений показывает, что если $\lambda \neq C_1, C_2, C_3$, то $dC/d\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда $L = 0$.

Покажем, что уравнение $L(\lambda) = 0$ имеет только один вещественный корень $\lambda = \lambda^\circ$, причем $C_1 < \lambda^\circ < C_3$.

Действительно, подставляя в выражение (3.4) для L значения $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$ из (3.1), представим $L(\lambda)$ в виде

$$L(\lambda) = \frac{\Phi(\lambda)}{\Omega^4 (C_1 - \lambda)^2 (C_2 - \lambda)^2 (C_3 - \lambda)^2}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \sum_{(123)} (\lambda - C_1)^3 (C_2 - C_3)^2 e_2^2 e_3^2 = a_0 \lambda^3 - 3a_1 \lambda^2 + 3a_2 \lambda - a_3$$

$$a_m = \sum_{(123)} C_1^m (C_2 - C_3)^2 e_2^2 e_3^2 > 0 \quad (m = 0, 1, 2, 3)$$

Отсюда следует, что знак функции $L(\lambda)$ совпадает со знаком $\Phi(\lambda)$, при этом $\Phi(\lambda) > 0$, если $\lambda > C_3$, и $\Phi(\lambda) < 0$, если $\lambda < C_1$. Далее, трехчлен $d\Phi/d\lambda$ имеет комплексные корни, так как в силу неравенства Коши—Буняковского $a_1^2 - a_0 a_2 < 0$. Следовательно, уравнение $\Phi(\lambda) = 0$ имеет только один вещественный корень $\lambda = \lambda^\circ$, причем, так как

$$\Phi(C_2) = (C_1 - C_2)^2 (C_2 - C_3)^2 e_2^2 [(C_2 - C_3)e_3^2 - (C_3 - C_2)e_1^2]$$

то

$$(4.4) \quad \begin{aligned} C_2 < \lambda^\circ < C_3, & \text{ если } (C_2 - C_3)e_3^2 < (C_3 - C_2)e_1^2 \\ C_1 < \lambda^\circ < C_2, & \text{ если } (C_2 - C_3)e_3^2 > (C_3 - C_2)e_1^2 \end{aligned}$$

На фиг. 3, б, в приведены графики функций $\Omega = \Omega(\lambda)$ и $C = -C(\lambda)$ для случая, когда имеют место условия (4.2) и (4.4). Здесь через C_* обозначен момент инерции системы относительно прямой, проходящей через неподвижную точку тела и центр инерции системы.

Замечание 1. Для рассматриваемой здесь задачи в случае, когда жидкость отсутствует, функция $\Omega = \Omega(\lambda)$ была использована П. А. Кузьмичем [6] для геометрического представления движений (3.1). В работах [7, 8] для изучения направляющей линии конуса П. В. Харламова осей равномерных вращений тяжелого гиростата рассматривалась функция $\omega = \omega(\lambda)$ (для перманентных вращений тяжелого твердого тела $\Omega(\lambda)$ и $\omega(\lambda)$ связаны зависимостью $\Omega(\lambda) = \omega^2(\lambda)$), для которой имеет место соотношение, аналогичное первому из (4.3); последнее соотношение было использовано для выделения на кривой $\omega = \omega(\lambda)$ некоторой области, для которой выполняются условия устойчивости равномерных вращений тяжелого гиростата. Однако, как видно из (3.4), (4.1) и (4.3),

критические точки функции $\omega = \omega(\lambda)$, для которых $d\omega/d\lambda = 0$, не являются точками бифуркации в принятом здесь смысле и в этих точках не происходит изменение степени неустойчивости исследуемых невозмущенных движений.

5. Обозначим через λ_j и λ'_j ($j = 1, \dots, 6$) соответственно корни уравнений $dk/d\lambda = 0$ и $\Omega(\lambda) = \nu$, занумерованные так, чтобы в соответствии с фиг. 3, а имели место неравенства

$$\lambda_1 < \lambda'_1 < C_1 < \lambda_2 < \lambda'_2 < \lambda_3 < \lambda'_3 < C_2 < \lambda'_4 < \lambda_4 < \lambda_5 < \lambda'_5 < C_3 < \lambda'_6 < \lambda_6$$

Исследуем распределение устойчивых и неустойчивых движений (3.1) сначала на тех ветвях кривой $k = k(\lambda)$, которые не пересекают ось λ ; для этих ветвей $\Omega(\lambda) > 0$.

Пусть $\lambda > C_3$; тогда $L(\lambda) > 0$, $S(\lambda) > 0$ и условия (3.4) выполняются. Движения (3.1) для $\lambda > C_3$ устойчивы и $\chi = 0$.

Пусть теперь $C_2 < \lambda < C_3$; тогда $\varphi(\lambda) = (C_1 - \lambda)(C_2 - \lambda)(C_3 - \lambda) > 0$, а $\omega(\lambda)$ и $dk/d\lambda$ (см. фиг. 3, а) имеют значения одного знака, если $\lambda_5 < \lambda < C_3$, и значения разных знаков, если $C_2 < \lambda < \lambda_5$. В силу (4.1) отсюда заключаем, что $\Delta > 0$, если $\lambda_5 < \lambda < C_3$, и $\Delta < 0$, если $C_2 < \lambda < \lambda_5$. Далее, для $\lambda \approx C_3$ ($\lambda \neq C_3$) имеем $L(\lambda) > 0$, и для таких λ условия (3.4) выполняются. Так как при непрерывном изменении λ от значения, для которого условия (3.4) выполняются, первым нарушается [5] условие $\Delta > 0$, то отсюда следует, во-первых, что $\lambda^\circ \leq \lambda_5$ и, во-вторых, что для $\lambda_5 < \lambda < C_3$ движения (3.1) устойчивы ($\chi = 0$), а для $C_2 < \lambda < \lambda_5$ неустойчивы ($\chi = 1$).

Аналогично нетрудно показать, что для $\lambda < C_2$ ($\lambda \neq C_1$) движения (3.1) неустойчивы, причем $\chi = 1$, если $\lambda_2 < \lambda < C_2$, и $\chi = 2$, если $C_1 < \lambda < \lambda_2$ или $\lambda < C_1$. Кроме того, должно иметь место неравенство $\lambda_2 \leq \lambda^\circ$.

Рассмотрим теперь ветви кривой $k = k(\lambda)$, которые пересекают ось λ ; для этих ветвей $\Omega(\lambda) < 0$.

Пусть $\lambda > \lambda'_6$; тогда $\Delta_1 = \Omega L < 0$, $\varphi(\lambda) < 0$, а $\omega(\lambda)$ и $dk/d\lambda$ имеют значения разных знаков, если $\lambda > \lambda_6$, и значения одного знака, если $\lambda'_6 < \lambda < \lambda_6$. В силу (4.1) и (3.4) отсюда заключаем, что движения (3.1) неустойчивы, при этом $\chi = 1$, если $\lambda > \lambda_6$, и $\chi = 2$, если $\lambda'_6 < \lambda < \lambda_6$.

Аналогичные рассуждения приводят к следующим заключениям. Движения (3.1) неустойчивы, если $\lambda'_4 < \lambda < \lambda'_5$, $\lambda_3 < \lambda < \lambda'_3$ или $\lambda < \lambda_1$, и устойчивы, если $\lambda'_2 < \lambda < \lambda_3$ или $\lambda_1 < \lambda < \lambda'_1$.

Результаты проведенного исследования устойчивости движений (3.1) представлены на фиг. 3, а, где значения $\lambda = \lambda_j$ ($j = 1, \dots, 6$) соответствуют точкам бифуркации. Указанное здесь распределение степени неустойчивости на ветвях кривой $\lambda = \lambda(k)$ имеет место и для случая, когда жидкость в полости тела отсутствует. В этом случае, кроме того, существует такое $\lambda = \lambda_* < C_1$, что на ветвях кривой $\lambda = \lambda(k)$, для которых $\Omega(\lambda) > 0$, движения (3.1) устойчивы в первом приближении, если $\lambda_* < \lambda < \lambda_2$ ($\lambda \neq C_1$), и неустойчивы, если $\lambda < \lambda_*$.

Отметим, что для перманентных вращений тяжелого гиростата результат, аналогичный последнему, получен в [8].

При фиксированных значениях C_i, e_i ($i = 1, 2, 3$), удовлетворяющих условию (4.2), и непрерывном изменении параметра ν от значений, для которых уравнение $\Omega(\lambda) = \nu$ имеет шесть вещественных корней, до нуля ветви кривой $k = k(\lambda)$, которые пересекают ось λ , деформируются непрерывно так, что ветви, расположенные между значениями $\lambda = C_1, C_2$ и $\lambda = C_2, C_3$, стягиваются в точку, лежащую на оси λ , и исчезают, а ветви, для которых $\lambda < C_1$ и $\lambda > C_3$, уходят вдоль оси λ на бесконечность: $\lambda_1' \rightarrow -\infty, \lambda_6' \rightarrow +\infty$ при $\nu \rightarrow 0$ ($\nu > 0$). В пределе при $\nu \rightarrow 0$ ($\nu > 0$) получаем геометрическое представление и распределение степени неустойчивости перманентных вращений твердого тела с одной закрепленной точкой в однородном поле силы тяжести.

В случаях, когда условие (4.3) не выполняется, исследование бифуркации и устойчивости движений (3.1) может быть проведено аналогично указанному в п. 2. Для этих случаев перманентные вращения системы будут зависеть от двух параметров λ и κ и эти движения геометрически можно представить в пространстве (k, λ, κ) в виде поверхности $k = k(\lambda, \kappa)$, уравнение которой получается в результате подстановки в интеграл площадей $U_1 = k$ значений $\omega_i, \gamma_i, G_i, w_i$ ($i = 1, 2, 3$), соответствующих рассматриваемым перманентным вращениям. Поверхность $k = k(\lambda, \kappa)$ состоит из цилиндрической поверхности $k = k(\lambda, 0)$, каждый из образующих которой соответствует одно и только одно перманентное вращение, и одной, двух или трех кривых, расположенных в плоскостях $\lambda = C_1, C_2, C_3$ и задаваемых уравнениями $k = k(C_i, \kappa), \lambda = C_i$ ($i = 1, 2, 3$).

Замечание 2. Известно [9], что задача о движении твердого тела с одной закрепленной точкой в центральном ньютоновом поле сил динамически эквивалентна задаче Бруна и задаче о движении твердого тела (геометрия и распределение массы которого удовлетворяют условиям второго интегрируемого случая Клебша) в беспредельной идеальной жидкости при условиях Чаплыгина, когда вес тела и выталкивающая архимедова сила равны по величине, а импульсивная сила вертикальна. Поэтому любой результат, найденный в одной из этих трех задач, может быть распространен на две другие. В частности, геометрическое представление постоянных винтовых движений тела в жидкости и распределение степени неустойчивости будут такими же, как и на фиг. 3, а, при этом параметр k здесь можно интерпретировать как шаг винтового движения тела.

В применении к задаче Бруна результаты, полученные в п. 3—5, соответствуют притягивающей плоскости ($\nu > 0$). Для отталкивающей плоскости ($\nu < 0$) исследование бифуркации и устойчивости перманентных вращений тела может быть проведено по аналогии с п. 3—5. Проведенное исследование показывает, что ветви кривой $k = k(\lambda)$, для которых $\Omega(\lambda) < 0$, следует отбросить, так как им соответствуют чисто мнимые значения параметра k , а ветви, для которых $\Omega(\lambda) > 0$, пересекают ось λ в точках, определяемых из уравнения $\Omega(\lambda) + \nu = 0$, и при $k \rightarrow \pm\infty$ стремятся к значениям $\lambda = C_1, C_2, C_3$. Кривая $k = k(\lambda)$ симметрична относительно оси λ и в точках бифуркации касательная к этой кривой параллельна оси λ .

Например, если уравнение $\Omega(\lambda) + \nu = 0$ имеет шесть вещественных корней, то кривая $\lambda = \lambda(k)$ имеет шесть ветвей, пересекающих ось λ слева и справа от значений $\lambda = C_1, C_2, C_3$, и при условии (4.3) на этих ветвях не существует точек бифуркации, так что все движения (3.1), принадлежащие какой-либо одной из них, обладают одной и той же степенью неустойчивости.

Если уравнение $\Omega(\lambda) + \nu = 0$ имеет два корня $\lambda = \lambda_1' (< C_1)$ и $\lambda = \lambda_2' (> C_3)$, то уравнение $dk/d\lambda = 0$ также имеет два корня $\lambda = \lambda_1, C_1 < \lambda_1 < C_2$, и $\lambda = \lambda_2, C_2 < \lambda_2 < C_3$. Для $\lambda > \lambda_2$ ($\lambda \neq C_3$) движения (3.1) устойчивы ($\chi = 0$), для $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$ неустойчивы ($\chi = 1$), а для $\lambda < \lambda_1$ ($\lambda \neq C_1$) степень неустойчивости $\chi = 2$. При $\nu \rightarrow 0$ ($\nu < 0$) имеем $\lambda_1' \rightarrow -\infty$, $\lambda_2' \rightarrow +\infty$ и в пределе получаем геометрическое представление и распределение степени неустойчивости перманентных вращений тяжелого твердого тела.

Поступила 19 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Poincaré H.* Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation. Acta math., 1885, Т. 7.
2. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. Работы по аналитической механике. М., Изд-во АН СССР, 1962.
3. *Volterra V.* Sur la théorie des variations des latitudes. Acta math., 1889, Т. 22.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. *Рубановский В. Н., Степанов С. Я.* О теореме Рауса и методе Четаева построения функции Ляпунова из интегралов уравнений движения. ПММ, 1969, т. 33, вып. 5.
6. *Кузьмин П. А.* Стационарные движения твердого тела и их устойчивость в центральном поле тяготения. Тр. межвуз. конф. по прикл. теории устойчивости и аналитической механике. Казань, 1964.
7. *Ковалев А. М., Киселев А. М.* О конусе осей равномерного вращения гиростата. В сб.: Механика твердого тела, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1972.
8. *Ковалев А. М., Киселев А. М.* Выделение областей устойчивости на конусе осей равномерного вращения гиростата. В сб.: Механика твердого тела, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1972.
9. *Харламов П. В.* О движении в жидкости тела, ограниченного многосвязной поверхностью. ПМТФ, 1963, № 4.