Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.36

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ СО СВЯЗЯМИ И ИНТЕГРАЛАМИ ДВИЖЕНИЙ

П. Виллемс

(Бельгия)

Дается метод получения условий устойчивости нелинейных систем, основанный на анализе линеаризованных уравнений связей и линеаризованных или квадратичных выражений интегралов движения.

При исследовании устойчивости динамических систем обычно применяется метод Ляпунова. Для систем с внутренней диссипацией энергии удобным средством служит исследование функции Гамильтона. Действительно, в развитие теоремы Томсона — Тейта — Четаева [1–4] показано, что положительная определенность функции Гамильтона обеспечивает необходимые и достаточные условия устойчивости в случае полной диссипации.

Для систем с неполной диссипацией получены лишь достаточные условия; кроме того, метод не дает возможности получения далеко идущих выводов об устойчивости на основании анализа линеаризованных уравнений. Следует отметить также, что в ряде случаев удобно ввести число переменных, превышающее число степеней свободы, и рассмотреть связи. Тогда уравнения могут быть упрощены или представлены в виде, удобном для анализа устойчивости.

Уравнения движения рассматриваемых систем выводятся при помощи функции Лагранжа вида

$$L = {}^1\!/_2 q^{\cdot T} M' q^{\cdot} + q^{\cdot T} \Gamma q + {}^1\!/_2 q^T K' q \tag{1}$$

Здесь q — вектор обобщенных координат $m \times 1$, M' и K' — симметричные матрицы. Матрицы M', K' и Γ — функции q, которые, по предложению, представляют собой полиномы. Индекс T означает транспонирование. Если система неголономна или описывается большим числом переменных, чем число степеней свободы, вводятся уравнения связей. Предполагается, что на связях не совершается работа и они выражаются в виде кинематических соотношений

$$A^T dq = 0 \tag{2}$$

Если n — число степеней свободы, то матрица A будет размером $n \times (m - n)$ и будет функцией (полиномом) от m переменных.

Известно, что при сделанных допущениях уравнения движения в окрестности равновесия $q = 0$ представляют собой систему $2m - n$ уравнений

$$M'q^{\cdot\cdot} + G'q^{\cdot} + K'q - A\lambda = Q', \qquad A^T q^{\cdot} = 0 \tag{3}$$

Здесь $G' = \Gamma - \Gamma^T$ — кососимметричная матрица, Q' — матрица обобщенных сил, включающая силы диссипации и равная нулю при $q = 0$.

Покажем, что условия устойчивости системы (3), по существу, совпадают с условиями устойчивости эквивалентной линейной системы при интегрируемых связях.

Теорема Ляпунова об устойчивости в первом приближении не может быть непосредственно применена для определения устойчивости системы (3) вблизи положения равновесия $q = 0$, поскольку соответствующая линейная система имеет нулевые собственные значения. В таком случае устойчивость может зависеть от нелинейных членов.

Линейная голономная система, эквивалентная линеаризованной системе (3), может быть получена при помощи метода Уиттекера [5]. Интеграл линеаризованного уравнения $A^T q^{\cdot} = 0$ имеет вид

$$A_s^T q = 0 \tag{4}$$

и $q = 0$ — решение. Если

$$A^T = A_0 B, \qquad q = [x_0{}^T x^T]^T$$

где A_0— матрица $(m - n) \times (m - n)$, x_0 — вектор $(m - n) \times 1$, то переменная x_0 может быть выражена через x в виде

$$x_0 = Cx, \qquad C = -A_0^{-1} B \tag{5}$$

Искомая система получается путем замены x_0 значением, даваемым формулой (5), в выражениях для кинетической и потенциальной энергии.

Если матрицы M', G' и K' имеют вид

$$M' = \begin{Vmatrix} M^\circ & M^{\circ\alpha} \\ M^{\beta\circ} & M^{\beta\alpha} \end{Vmatrix}, \qquad G' = \begin{Vmatrix} G^\circ & G^{\circ\alpha} \\ G^{\beta\circ} & G^{\beta\alpha} \end{Vmatrix}$$

$$K' = \begin{Vmatrix} K^\circ & K^{\circ\alpha} \\ K^{\beta\circ} & K^{\beta\alpha} \end{Vmatrix}$$

то соответствующая голономная система

$$Mx^{\cdot\cdot} + Gx^{\cdot} + Kx = Q \tag{6}$$

$$(M = M^{\beta\alpha} + C^T M^\circ C + C^T M^{\circ\alpha} + M^{\beta\circ} C)$$

где Q — обобщенные силы, связанные с переменной x. Выражения, аналогичные указанному в скобках, имеют место также для G и K.

Следует отметить, что систему (6) можно получить непосредственно путем умножения уравнений системы (3) на $C^T E$, где E — единичная матрица $(m - n) \times (m - n)$, и замены x_0 выражением (5).

При помощи функции Гамильтона и соотношения (5), рассматриваемого как интеграл движения, можно показать, что устойчивость линейной системы (3) эквивалентна устойчивости соответствующей системы (6).

В случае нелинейных систем и интегрируемых уравнений связей с учетом линеаризованного интеграла (5) теорема Ляпунова об устойчивости в первом приближении применима. Однако в случае неголономной системы связи могут быть неинтегрируемыми, и из асимптотической устойчивости (6) следует лишь ограниченность (3). Если система (6) имеет одно собственное значение с положительной действительной частью, то линейная система (3) неустойчива во всех указанных выше случаях.

Ясно, что такая процедура может быть распространена на системы уравнений, которые не выводятся непосредственно из функции Лагранжа. В случае вращательного движения обычно проще получить уравнения Эйлера — Лиувилля [6-8], поскольку при этом не требуется проводить квадратичной аппроксимации для матриц преобразования и выражений для угловых скоростей, как этого требует метод Лагранжа [9]. Указанные уравнения получаются в виде

$$T\,(Mx^{\cdot\cdot} + Gx + Kx - Q) = 0 \tag{7}$$

В общем случае определение матрицы T затруднительно, поэтому для суждения об устойчивости (7) нельзя привлечь функцию Гамильтона. Однако иногда можно описать систему переменными, число которых превышает число степеней свободы, и использовать связи; это позволяет получить систему уравнений непосредственно в виде (6).

Функция Гамильтона системы (6) равна

$$H = {}^1/_2\,(x^{\cdot T} M x^{\cdot} + x^T K x)$$

и при наличии диссипации ее производная по времени вдоль траектории $H^{\cdot} = x^{\cdot T} Q \leqslant 0$ всюду в пространстве состояний.

Если функция H положительно определенная и если $H^{\cdot} \neq 0$ вдоль траектории (случай полной диссипации), то нулевое решение асимптотически устойчиво. Если, с другой стороны, функция H может принимать отрицательные значения в окрестности начала координат и если диссипация полная, система неустойчива.

Если вдоль траектории в пространстве состояний $H^{\cdot} \equiv 0$, то положительная определенность H обеспечивает лишь достаточные условия устойчивости, но не асимптотической устойчивости.

Матрица обобщенных масс M всегда положительна и для большинства систем, рассматриваемых в задачах динамики вращательного движения, положительно определенная. В этом случае H будет положительно определенной, если этим свойством обладает матрица K. Положительная определенность K может быть проверена при помощи условий Сильвестра; это дает n условий устойчивости.

Некоторые системы не обладают полной диссипацией, и произвольный выбор начальных условий может изменить некоторые интегралы движения системы. Такова, например, система со свободным вращением, когда начальные условия могут изменить полный момент количества движения. При наличии диссипации система будет стремиться к новому положению равновесия.

Если система имеет интегралы движения, можно использовать несколько методов для решения вопроса об ее устойчивости или частичной устойчивости, когда интегралы удовлетворяются точно или приближенно. Не рассматривая здесь этих методов, предложим простой способ достижения результатов, необходимых для решения рассматриваемой частной задачи. В случае, когда интегралы удовлетворяются приближенно, можно судить лишь о неасимптотической устойчивости [10]. Поэтому рассмотрим системы, для которых интегралы удовлетворяются, и исследуем устойчивость системы в случае, когда траектория целиком лежит на гиперповерхности, определяемой интегралами движения. Здесь также будет предполагаться, что интегралы движения могут быть записаны в форме полиномов.

Введем новую функцию, представляющую собой комбинацию функции Гамильтона и интегралов движения, так что некоторые переменные исключены; новая функция Ляпунова выражена через оставшиеся переменные x'. Ее производная по времени при начальных условиях, удовлетворяющих интегралам движения, равна $H^{\cdot}$, и диссипация уже может быть полной. Положительная определенность полинома относительно нулевого значения определяется квадратичными членами, поэтому система будет асимптотически устойчивой по части переменных (m переменных x'), если новая функция $V = x'^T K' x'$ будет положительно определенной. Это приводит к системе m условий устойчивости. Для многих задач можно показать, что из этой устойчивости по части переменных x' следует асимптотическая устойчивость.

Устойчивость регулярной прецессии тяжелого гироскопа в кардановом подвесе. Точное решение задачи для случая вращения гироскопа вокруг вертикальной оси внешнего кольца карданова подвеса было дано Магнусом [11], условия устойчивости для всех положений равновесия даны В. В. Румянцевым [12] (результаты см. также в [13]).

Будем учитывать инерцию внешнего кольца карданова подвеса, а диссипацию считать обусловленной внутренним кольцом. Ось вращения внешнего кольца вертикальна. Центр масс системы, состоящей из гироскопа и внутреннего кольца, расположен на оси симметрии гироскопа. Центр масс внешнего кольца совпадает с точкой O пересечения осей вращения обоих колец.

Введем системы координат $OX_1{}^*X_2{}^*X_3{}^*$ и $Ox_1{}^*x_2{}^*x_3{}^*$, связанные с кожухом и гироскопом соответственно. Ось вращения внешнего кольца направлена по $X_3{}^*$, внутреннего кольца — по $x_1{}^*$ и ось симметрии гироскопа по $x_3{}^*$. После поворота системы $OX_1{}^*X_2{}^*X_3{}^*$ вокруг оси $X_3{}^*$ на угол φ оси $X_\alpha{}^*$ совпадут с осями внешнего кольца; аналогично, оси внешнего кольца совпадут с осями $x_\alpha{}^*$ после поворота на угол θ вокруг оси $X_1{}^*$ (или $x_1{}^*$). Угловую скорость гироскопа относительно внутреннего кольца обозначим через $\psi^{\cdot}$. Положение центра масс относительно точки O определяется вектором длиной d, направленным вдоль оси $x_3{}^*$.

Введем безразмерные параметры

$$k_1 = \frac{I}{J_1}, \qquad k_2 = \frac{mgd}{J_1}, \qquad k_3 = \frac{A + J_2}{J_1}$$

$$k_4 = \frac{J_2 + I - J_3}{J_1}, \qquad k_5 = \frac{J_2 - J_3}{J_1}$$

Здесь I — момент инерции гироскопа относительно его оси симметрии, J_α — моменты инерции гироскопа относительно осей x_α^*, A — момент инерции внешнего кольца подвеса относительно его оси вращения, m — масса гироскопа, g — ускорение силы тяжести.

Уравнения движения имеют вид

$$\theta^{\cdot\cdot} - k_5\Phi^{\cdot 2}\sin\theta\cos\theta + k_1\psi^\cdot\Phi^\cdot\sin\theta - k_2\sin\theta = 0 \tag{8}$$

$$\frac{d}{dt}[(k_3 - k_5\cos^2\theta)\,\Phi^\cdot + k_1\psi^\cdot\cos\theta] = 0$$

$$\frac{d}{dt}[k_1(\psi^\cdot + \Phi^\cdot\cos\theta)] = L$$

Здесь L — момент сил внутреннего вращения вокруг оси гироскопа. Будем предполагать, что этот момент равен нулю для некоторого значения $\psi^\cdot$.

Система имеет несколько положений равновесия; но здесь рассмотрим лишь случай регулярной прецессии при

$$\theta = \theta_0,\ \Phi^\cdot = \Phi_0^\cdot,\ \psi^\cdot = \psi_0^\cdot,\ \theta^\cdot = \Phi^{\cdot\cdot} = \Phi^{\cdot\cdot} = 0$$

В этом случае из первого уравнения (8) с учетом того, что для регулярной прецессии $\theta_0 \neq 0$, получим

$$-k_5\Phi_0^{\cdot 2}\cos\theta_0 + k_1\psi_0^\cdot\,\Phi_0^\cdot - k_2 = 0 \tag{9}$$

Для возмущенного движения относительно равновесия, определяемого (9), введем переменные x_1, x_2, x_3 такие, что

$$\theta = \theta_0 + x_1, \qquad \theta^\cdot = x_1^\cdot$$

$$\Phi^\cdot = \Phi_0^\cdot + x_2^\cdot, \qquad \psi^\cdot = \psi_0^\cdot + x_3^\cdot$$

Если диссипация связана с осью внутреннего кольца подвеса (c' — коэффициент диссипации) и если величина L линеаризована: $L\,/\,I = -c\psi^\cdot - k\psi$, то уравнения движения имеют форму, аналогичную (6), т. е.

$$Mx^{\cdot\cdot} + Gx^\cdot + Kx = -Dx^\cdot, \qquad x = -(x_1, x_2, x_3]^T \tag{10}$$

Здесь

$$D = \mathrm{diag}\,(c', 0, c), \qquad K = \mathrm{diag}\,(k_5\varphi_0^{\cdot 2}\sin\theta_0,\ 0,\ k)$$

$$M = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 - k_5\cos^2\theta_0 & k_1\cos\theta_0 \\ 0 & k_1\cos\theta_0 & k_1 \end{Vmatrix}, \qquad G = \begin{Vmatrix} 0 & g_{12} & g_{13} \\ -g_{12} & 0 & 0 \\ -g_{13} & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

$$g_{12} = -2k_5\Phi_0^\cdot\sin\theta_0\cos\theta_0 + k_1\psi_0^\cdot\sin\theta_0$$

$$g_{13} = k_1\Phi_0^\cdot\sin\theta_0$$

Тогда квадратичная форма функции Гамильтона имеет вид

$$2H = x_1^{\cdot 2} + (k_3 - k_5\cos^2\theta_0)\,x_2^{\cdot 2} + k_1x_3^{\cdot 2} + 2k_1\cos\theta_0 x_2^\cdot x_3^\cdot + \tag{11}$$

$$+ k_5\Phi_{01}^{\cdot 2}\sin^2\theta_0 x_1^2 + kx_3^2$$

$$H = -c'x_1^{\cdot 2} - cx_3^{\cdot 2}$$

Следует отметить, что диссипация не может быть связана с переменной φ, поскольку в этом случае регулярная прецессия может отсутствовать.

Система имеет, по крайней мере, один интеграл движения, который следует из первого уравнения (8). Этот интеграл отвечает составляющей момента количества движения относительно оси $X_3{}^*$ (предполагается отсутствие момента внешних сил относительно этой оси). В линеаризованной форме указанный интеграл имеет вид

$$(12)\qquad (k_3 - k_5 \cos^2 \theta_0)\, x_2{}^{\bullet} + k_1 \cos \theta_0\, x_3{}^{\bullet} + (2k_5 \Phi_0{}^{\bullet} \sin \theta_0 \cos \theta_0 - k_1 \psi_0{}^{\bullet} \sin \theta_0)\, x_1 = 0$$

При помощи (11) и (12) можно построить функцию V, квадратичную по x_1, x_3, $x_1{}^{\bullet}$ и $x_3{}^{\bullet}$. Для начальных условий, удовлетворяющих (12), диссипация полная. Положительная определенность V представляет собой необходимое и достаточное условие устойчивости системы (10), и можно получить затем условие устойчивости регулярной прецессии (за исключением критических случаев).

Простые условия в замкнутой форме можно получить в предельных случаях, когда k и c равны нулю или бесконечности. В первом случае диссипация компенсирована двигателем гироскопа, тогда система имеет второй интеграл движения, линеаризованная форма которого записывается так:

$$(13)\qquad k_1 x_3{}^{\bullet} + k_1 x_2{}^{\bullet} \cos \theta_0 - k_1 \Phi_0{}^{\bullet} \sin \theta_0 x_1 = 0$$

Диссипация полная, и при помощи (12) и (13) с учетом (11) построим функцию V', квадратичную по x_1 и $x_1{}^{\bullet}$, в виде

$$V' = x_1{}^{\bullet 2} + \left\{ k_4 \Phi_0{}^{\bullet 2} + \frac{(k_1 (\psi_0{}^{\bullet} + \Phi_0{}^{\bullet} \cos \theta_0) - 2k_4 \Phi_0{}^{\bullet} \cos \theta_0)^2}{k_3 - k_4 \cos^2 \theta_0} \right\} \sin^2 \theta_0 x_1{}^2$$

Производная этой функции по времени равна $-c' x_1{}^{\bullet 2}$.

Система (10) с интегралами движения (12) и (13) асимптотически устойчива, если

$$(14)\qquad k_4 \Phi_0{}^{\bullet 2} + \frac{(k_1 (\psi_0{}^{\bullet} + \Phi_0{}^{\bullet} \cos \theta_0) - 2k_4 \Phi_0{}^{\bullet} \cos \theta_0)^2}{k_3 - k_4 \cos^2 \theta_0} > 0$$

Для реальных систем это условие обычно выполняется, поскольку $k_4 > 0$ и $k_3 > k_4$.

На основании результатов работы [10] видно, что условие (14) будет достаточным для устойчивости системы (10) и в случае, когда равенства (12) и (13) выполняются приближенно.

Следует отметить, что должно быть выполнено условие существования регулярной прецессии. Оно следует из (9) в виде

$$k_1{}^2 \psi_0{}^2 \geqslant 4\, k_2 k_5 \cos \theta_0$$

Это условие всегда выполняется при больших значениях скорости вращения гироскопа.

Условие (14) можно получить также путем рассмотрения нелинейной системы и положительной определенности функции Рауса или путем рассмотрения линейной комбинации интегралов движения.

Можно проверить, что функция V' равна удвоенной сумме квадратичных членов функции Рауса, полученной в работе [12]. Необходимое условие устойчивости получается поэтому непосредственным применением результатов указанной работы. Достаточное условие, предложенное в [12], эквивалентно $k_4 > 0$. Ясно, что это условие достаточное для выполнения (14).

Устойчивость системы свободно вращающихся взаимосвязанных жестких тел. Предполагается, что указанная система вращается с постоянной угловой скоростью ω_0 вокруг оси X_3^*. Для каждого тела записываются уравнения Эйлера в системе координат, связанной с телом. Если одно из тел взять за начало отсчета, то общее число переменных (угловые деформации в сочленениях тел и угловая скорость тела, взятого за начало отсчета) равно числу степеней свободы. Тогда уравнения записываются в форме (7), а затем их можно записать и в более удобной форме (6).

Может оказаться удобным записать уравнение Эйлера в некоторой «средней» системе координат, как было предложено в [14]. Тогда необходимо ввести три дополнительные переменные и использовать три уравнения связей. Эти уравнения должны быть выбраны так, чтобы

$$\int [x_* \times u_*]\, dm = 0$$

Здесь x_* — радиус-вектор элемента массы dm в недеформированной системе, u_* — вектор перемещения dm.

Введем вектор, описывающий состояние системы

$$x = \{\theta, \beta\}^T, \qquad \theta = \{\theta_1, \theta_2, \theta_3\}^T$$

Здесь $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ — углы, описывающие ориентацию системы координат, β — вектор, описывающий внутреннюю деформацию. Можно показать [15], что уравнения движения записываются в форме (6), где

$$M = \begin{Vmatrix} I & 0 \\ 0 & M_d \end{Vmatrix}, \qquad I = \begin{Vmatrix} I_{11} & 0 & -J_1 \\ 0 & I_{22} & -J_2 \\ -J_1 & -J_2 & I_{33} \end{Vmatrix}$$

$$K = \omega_0^2 \begin{Vmatrix} I_{33} - I_{22} + J_3 & 0 & 0 & -A_2^T \\ 0 & I_{33} - I_{11} + J_3 & 0 & A_1^T \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -A_2 & A_1 & 0 & \Pi_d \end{Vmatrix}$$

В этих соотношениях I — матрица инерции системы. Матрицы M_d, Π_d, A_α — функции ряда параметров.

Ясно, что эта система не будет асимптотически устойчивой, поскольку K не является положительно определенной. Кроме того, диссипация неполная.

Кинетический момент постоянен и направлен вдоль оси X_3^*. Поэтому его составляющие по осям, нормальным к оси X_3^*, должны оставаться равными нулю; кроме того, величина этого вектора должна оставаться постоянной и равной $H_0 = (I_{33} + J_3)\,\omega_0$.

Составляющие H в системе координат, связанной с телом, имеют вид

$$H_1 = I_{11}\theta_1^{\cdot} - J_1\theta_3^{\cdot} - \omega_0 I_{11}\theta_2 + \omega_0 A_1^T\beta$$
$$H_2 = I_{22}\theta_2^{\cdot} - J_2\theta_3^{\cdot} + \omega_0 I_{22}\theta_1 + \omega_0 A_2^T\beta$$
$$H_3 = H_0 - J_1\theta_1^{\cdot} - J_2\theta_2^{\cdot} + I_{33}\theta_3^{\cdot} + \omega_0 J_2\theta_2 - \omega_0 J_2\theta_1 + \\ + \omega_0 A_3^T\beta$$

Тогда уравнения связей

$$H_1 + \theta_2 H_3 = 0, \qquad H_2 - \theta_1 H_3 = 0, \qquad H_3 - H_0 = 0$$

или

$$I\theta^{\cdot} + B^T\theta + A^T\beta = 0, \qquad A^T = [A_1^T A_2^T A_3^T]^T$$

$$B^T = \omega_0 \begin{Vmatrix} 0 & I_{33} - I_{11} + J_3 & 0 \\ -(I_{33} - I_{22} - J_3) & 0 & 0 \\ -J_2 & J_1 & 0 \end{Vmatrix}$$

Вводя вектор $y = \{\theta, \beta, \beta^{\cdot}\}$, можно получить функцию

$$V' = {}^1/_2 y^T K' y$$

путем добавления слагаемого $-{}^1/_2\theta^{\cdot T} I I^{-1}\theta^{\cdot}$ к функции Гамильтона.

Для асимптотической устойчивости матрица K' должна быть положительно определенной. Матрица K' не будет положительно определенной, если θ_3— циклическая координата. Тем не менее, она будет положительно определенной по другим переменным, что дает асимптотическую устойчивость по части переменных.

Для негироскопической системы $J_\alpha = 0$, и матрица K' принимает вид

$$K' = \begin{Vmatrix} \frac{I_{33}}{I_{22}}(I_{33} - I_{22}) & 0 & 0 & -\frac{I_{33}}{I_{22}} A_2^T & 0 \\ 0 & \frac{I_{33}}{I_{11}}(I_{33} - I_{11}) & 0 & \frac{I_{33}}{I_{11}} A_1^T & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{I_{33}}{I_{22}} A_2^T & \frac{I_{33}}{I_{11}} A_1^T & 0 & \Pi_d + \sum\limits_\alpha \frac{A_\alpha A_\alpha^T}{I_{\alpha\alpha}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_d \end{Vmatrix} \tag{15}$$

Функция V' будет положительно определенной по переменным θ_1, θ_2, β, $\beta^{\cdot}$. В данном случае диссипация полная, поэтому система асимптотически устойчива по этим переменным.

Выше подразумевалось, что $I_{33} > I_{22}$, $I_{33} > I_{11}$, и система должна вращаться вокруг оси максимального момента инерции. В этой задаче выбор поперечных осей произволен, поэтому, очевидно, устойчивость не зависит от I_{11} и I_{22}.

Другие условия устойчивости будут зависеть от деформации системы и будут определяться жесткостью сочленений.

Иногда необходимо увеличить «гироскопическую жесткость» системы путем введения внутреннего вращения. Такая система будет включать гироскопы. Если эти гироскопы сами не подвержены деформации и если $J_1 = J_2 = 0$, то система должна по-прежнему вращаться вокруг главной оси. В этом случае матрица K' аналогична матрице (15), где величина I_{33} заменена на $I_{33} + J_3$.

Условия устойчивости, соответствующие жесткому движению, теперь имеют вид

$$(I_{33} + J_3)(I_{33} + J_3 - I_{22}) > 0, \quad (I_{33} + J_3)(I_{33} + J_3 - I_{11}) > 0$$

Эти условия являются необходимыми и могут быть получены для частных моделей [16].

Следует отметить, что соображения, изложенные выше, справедливы для любой свободно вращающейся деформируемой системы и поэтому справедливы для систем произвольно связанных жестких тел. Соответствующие матрицы уже не могут быть получены на основании метода работы [7] в своей обычной форме, так как наличие «петель» в конфигурации системы приводит к наличию связей между переменными. Общий подход, изложенный в данной работе, тем не менее, остается справедливым.

Поступила 6 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zajac E. E.* The Kelvin—Tait—Chetaev theorem and extensions. J. Astronaut. Sci., 1964, vol. 11, No. 2.
2. *Pringle R. Jr.* Stability of damped mechanical systems. AIAA Journal, 1965, vol. 3, No. 2.
3. *Zajac E. E.* Comments on stability of damped mechanical systems and further extensions. AIAA Journal, 1965, vol. 3.
4. *Pringle R. Jr.* On the stability of a body with connected moving parts. AIAA Journal, 1966, vol. 4, No. 8.
5. *Whittaker E. T.* A treatise on the analytical dynamics of particules and rigid bodies. Cambridge Univ. Press, 1937.
6. *Hooker W. W., Margulies G.* The dynamical attitude equations for an n-body satellite. J. Astronaut. Sci., 1965, vol. 12, No. 4.
7. *Roberson R. E., Wittenburg J.* Proc. of the 3rd Congress Internat. Federation of Automatic Control. London, 1966.
8. *Hooker W. W.* A set of r dynamical attitude equations for an arbitrary n-body satellite having r rotational degrees of freedom. AIAA Journal, 1970, vol. 8, No. 7.
9. *Roberson R. E., Likins P. W.* A linearization tool for use with matrix formalism of rotational dynamics. Ingr-Arch., 1969, Bd 37, Nr 6.
10. *Risito C.* On the Ljapunov stability of a system with known first integrals. Mechanica, 1967, vol. 2, No. 4.
11. *Magnus K.* Beiträge zur Dynamik des kräftefreien kardanisch gelagerten Kreisels. ZAMM, 1955, Bd 35, Nr 1.
12. *Румянцев В. В.* Об устойчивости движения гироскопа в кардановом подвесе. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
13. *Leimanis E* The general problem of the motion of coupled rigid bodies about a fixed point. N. Y. Springer-Verlag, 1965.
14. *Willems P. Y.* Attitude stability of deformable satellites. Evolut. attitude et stabilis. satellit. Colloq. internat. Paris, 1968.
15. *Willems P. Y.* Stability of deformable cyrostats on a circular orbit. J. Astronaut. Sci., 1970, vol. 18, No. 2.
16. *Likins P. W.* Attitude stability criteria for dual-spin-spacecraft. J. Spacecraft and Rockets, 1967, vol. 4, No. 12.