Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

УПРАВЛЯЕМОСТЬ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМЫ ПО ЛИНЕЙНОМУ ПРИБЛИЖЕНИЮ

Е. Л. Тонков

(Тамбов)

Изучаются условия управляемости динамической системы, поведение которой в конечномерном фазовом пространстве описывается нелинейным дифференциальным уравнением. Полученные результаты дополняют исследования работ [1-10].

1. Определения и формулировки результатов. Пусть R^n — n-мерное арифметическое пространство точек $x = \mathrm{col}\,(x_1, \ldots, x_n)$ с нормой $|\cdot|$. Рассмотрим систему

$$x^\cdot = A\,(t)x + B\,(t)u + \varphi\,(t, x, u),\ x \in R^n,\ u \in R^m,\ t \in [t_0, \infty) \tag{1.1}$$

Здесь вещественные $n \times n$ и $n \times m$ матрицы $A\,(t)$ и $B\,(t)$ непрерывны при $t \in [t_0, \infty)$; вещественная функция $\varphi\,(t, x, u)$ непрерывна по совокупности аргументов $(t, x, u) \in [t_0, \infty) \times R^n \times R^m$.

Будем говорить, что управление $u_0\,(t)$, $t \in I = [t_0, t_1]$ переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.1) в позицию $(t_1, 0)$, если удовлетворяющее начальному условию $x\,(t_0) = x_0$ решение $x_0\,(t)$ системы (1.1) при управлении $u = u_0\,(t)$ определено при всех $t \in I$, единственно на I и в момент времени t_1 проходит через точку $x_1 = 0 : x_0\,(t_1) = 0$.

Без дополнительных оговорок всюду далее будем предполагать, что выполнены следующие два условия.

1) Линейная система

$$x^\cdot = A\,(t)x + B\,(t)u \tag{1.2}$$

вполне управляема на фиксированном отрезке времени $I = [t_0, t_1]$. Это означает, что для любого $x_0 \in R^n$ существует непрерывное на I управление $u_0\,(t)$, которое переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.2) в позицию $(t_1, 0)$.

2) Система (1.1) обладает свойством правосторонней единственности, т. е. для любого $x_0 \in R^n$ и любого непрерывного на I управления $u_0\,(t)$ решение задачи Коши

$$x^\cdot = A\,(t)x + B\,(t)u_0\,(t) + \varphi\,(t, x, u_0\,(t)),\quad x\,(t_0) = x_0$$

единственно на правом максимальном интервале существования.

Пусть $X\,(t, s)$ — решение матричной задачи $X^\cdot = A\,(t)X$, $X\,(s) = E$, где E — единичная матрица, а $Y\,(t, s)$ — решение сопряженной матричной задачи: $Y^{\cdot} = -A^*(t)Y,\ Y(s) = E$. Построим матрицу

$$W(t, s) = \int_s^t Y^*(\tau, s) B(\tau) B^*(\tau) Y(\tau, s)\, d\tau, \quad s \leqslant t$$

Известно (см., например, [4]), что система (1.2) вполне управляема на I в том и только в том случае, если $\det W(t_1, t_0) \neq 0$. Поэтому существуют матрицы

$$K(t, s) = \begin{cases} X(t, t_0) W(t_1, t) W^{-1}(t_1, t_0) X(t_0, s), & t_0 \leqslant s \leqslant t \leqslant t_1 \\ -X(t, t_0) W(t, t_0) W^{-1}(t_1, t_0) X(t_0, s), & t_0 \leqslant t < s \leqslant t_1 \end{cases}$$

$$L(t, s) = -B^*(t) Y(t, t_0) W^{-1}(t_1, t_0) Y^*(s, t_0)$$

Введем, кроме того, следующие обозначения:

$$(1.3) \qquad k(t) = \max_{s \in I} |K(t, s)|, \qquad l(t) = \max_{s \in I} |L(t, s)|$$
$$|P| = \max_{|x| \leqslant 1} |Px|$$

где $|P|$ — норма матрицы P.

Определение 1. Пусть фиксирован отрезок времени $I = [t_0, t_1]$. Система (1.1) называется вполне управляемой, если для каждого $x_0 \in R^n$ найдется непрерывное на I управление $u_0(t) \in R^m$, которое переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.1) в позицию $(t_1, 0)$.

Теорема 1. Предположим, что найдутся непрерывные на I функции $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ и числа α, $\beta \geqslant 0$, обеспечивающие при всех $(t, x, u) \in I \times R^n \times R^m$ черавенство

$$(1.4) \qquad |\varphi(t, x, u)| \leqslant a(t)|x|^{\alpha} + b(t)|u|^{\beta} + c(t)$$

Предположим далее, что выполнено по крайней мере одно из условий

1) $\alpha < 1$, $\beta < 1$; 2) $\alpha < 1$, $\beta = 1$, $\int bl dt < 1$

3) $\alpha = 1$, $\beta < 1$, $\int ak dt < 1$; 4) $\alpha = \beta = 1$, $\int (ak + bl) dt < 1$

Тогда система (1.1) вполне управляема.

Здесь и всюду далее

$$\int f\, dt = \int_{t_0}^{t_1} f(t)\, dt$$

Замечание. Из теоремы 1 следует, в частности, что для ограниченных нелинейностей ($|\varphi| \leqslant c$, $(t, x, u) \in I \times R^n \times R^m$) система (1.1) вполне управляема. Этот результат содержится также в [5, 10].

Определение 2. Предположим, что фиксированы отрезок времени $I = [t_0, t_1]$ и множество $\Omega = \Omega(t, x)$ пространства R^m, причем множество Ω непрерывно в смысле хаусдорфовой метрики и зависит от точки $(t, x) \in I \times S_\gamma$, где $S_\gamma = \{x \in R^n : |x| < \gamma\}$. Система (1.1) называется локально управляемой в малом, если для любого $\varepsilon \in (0, \gamma]$ существует такое $\delta > 0$, что для каждого $x_0 \in S_\delta$ найдется непрерывное на I управление $u_0(t)$, которое переводит позицию системы (1.1) (t_0, x_0) в позицию $(t_1, 0)$ и, кроме того, 1) траектория $x_0(t)$ системы (1.1), соответствующая управлению $u_0(t)$, удовлетворяет включению $x_0(t) \in S_\varepsilon$; 2) управление $u_0(t)$ и траектория $x_0(t)$ таковы, что $u_0(t) \in \Omega(t, x_0(t))$, $t \in I$.

Теорема 2. Предположим, что существуют непрерывные на I функции $a(t)$, $b(t)$, числа α, $\beta \geqslant 0$ и окрестность U точки $x = 0$, $u = 0$ такие, что при всех $(t, x, u) \in I \times U$ выполнено неравенство

$$(1.5) \qquad |\varphi(t, x, u)| \leqslant a(t)\,|x|^\alpha + b(t)\,|u|^\beta$$

Предположим далее, что $0 \in \operatorname{int} \Omega(t, 0)$, $t \in I$ и выполнено по крайней мере одно из условий

1) $\alpha = \beta = 1$, $\int (ak + bl)dt < 1$; 2) $\alpha = 1$, $\beta > 1$, $\int ak\, dt < 1$
3) $\alpha > 1$, $\beta = 1$, $\int bldt < 1$; 4) $\alpha > 1$, $\beta > 1$

Тогда система (1.1) локально управляема в малом.

Замечание. Известная теорема о локальной управляемости по первому приближению (см. [3], стр. 61)] следует из теоремы 2 при $\alpha = \beta = 2$.

Следующая теорема включает в себя результаты работ [6,7].

Обозначим $r(t, \xi) = \max |\varphi(t, x, u)|$, $|x| \leqslant \xi$, $|u| \leqslant \xi$.

Теорема 3. Если $\lim \xi^{-1} \int r(t, \xi)dt = 0$, $\xi \to \infty$, то система (1.1) вполне управляема. Если $\lim \xi^{-1} \int r(t, \xi)dt = 0$, $\xi \to 0$ и $0 \in \operatorname{int} \Omega(t, 0)$, $t \in I$, то система (1.1) локально управляема в малом.

В ряде случаев исследование управляемости системы (1.1) можно заменить исследованием управляемости более простой системы. Это следует из приведенной ниже теоремы 4.

Предположим, что среди строк $b_1^*, \ldots, b_n^*$ матрицы $B(t)$ существует m таких строк $b_{i_1}^*, \ldots, b_{i_m}^*$, что $m \times m$-матрица

$$B_0(t) = \begin{Vmatrix} b_{i_1}^* \\ \cdots \\ b_{i_m}^* \end{Vmatrix}$$

невырождена при $t \in I$. Выберем компоненты вектора φ с индексами $i_1, \ldots$ $\ldots, i_m$ и составим вектор $\varphi_0(t, x, u) = \operatorname{col}(\varphi_{i_1}, \ldots, \varphi_{i_m})$. Рассмотрим уравнение

$$(1.6) \qquad z = -B_0^{-1}(t)\,\varphi_0(t, x, z) + u$$

относительно m-вектора z.

Теорема 4. Если при всех $(t, x, u) \in I \times R^n \times R^m$ уравнение (1.6) имеет по крайней мере одно непрерывно зависящее от точки (t, x, u) решение $z_0(t, x, u)$, то из вполне управляемости системы

$$(1.7) \qquad x^\cdot = A(t)x + B(t)u + \varphi(t, x, z_0(t, x, u)) - (B(t)\,B_0^{-1}(t) \times \\ \times \varphi_0(t, x, z_0(t, x, u))$$

следует вполне управляемость системы (1.1).

Если же система (1.7) локально управляема в малом и для каждой точки $(t, x) \in I \times S_\gamma$ (где γ — число, участвующее в определении 2) и каждого $u \in \Omega(t, x)$ имеет место включение $z_0(t, x, u) \in \Omega(t, x)$, то система (1.1) локально управляема в малом.

Замечание. Из теоремы Боля — Брауэра следует, что при выполнении неравенства

$$|\varphi_0(t, x, z)| \leqslant a(t, x)|z|^\beta + b(t, x), \qquad (t, x) \in I \times R^n$$

уравнение (1.6) имеет непрерывное решение $z_0(t, x, u)$, если $\beta < 1$ или $\beta > 1$ и $b(t, 0) = 0$ (во втором случае решение существует лишь в достаточно малой окрестности точки $x = 0$, $u = 0$). При этом имеет место оценка $|z_0(t, x, u)| \leqslant h(t, x, u)$, где h — наименьший положительный корень уравнения

$$\|B_0^{-1}(t)\|\,(a(t, x)h^\beta + b(t, x)) + |u| = h$$

Примеры. 1°. Предположим, что матрица $B(t)$ системы (1.1) имеет размеры $n \times n$ и $\det B(t) \neq 0$, $t \in I$, а $\varphi(t, x)$ не зависит от u. Тогда уравнение (1.6) при $B_0 = B$, $\varphi_0 = \varphi$ имеет единственное решение, а система (1.7) совпадает с линейной системой (1.2).

2°. Пусть линейная стационарная система $x^\cdot = Ax + Bu$, $u \in R^m$ вполне управляема. Тогда в фазовом пространстве R^n можно так выбрать базис, что матрица B запишется в виде

$$B = \begin{Vmatrix} \Theta \\ E \end{Vmatrix},$$

где Θ — нулевая $(n - m) \times m$-матрица, E — единичная $m \times m$-матрица.

Предположим, что рассматриваемая система находится под действием возмущений $\varphi(t, x, u) = \mathrm{col}(f, \varphi_0)$, где $f(t, x) = \mathrm{col}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n-m})$ не зависит от u, а $\varphi_0(t, x, u) = \mathrm{col}(\varphi_{n-m+1}, \ldots, \varphi_n)$ удовлетворяет оценке

$$|\varphi_0(t, x, u)| \leqslant a(t, x)|u|^\beta + b(t, x), \quad \beta < 1, \quad (t, x) \in I \times R^n$$

Тогда в силу теоремы 4 система

$$x^\cdot = Ax + Bu + \varphi(t, x, u) \tag{1.8}$$

вполне управляема, если вполне управляема система $x^\cdot = Ax + Bu + \psi(t, x)$, где $\psi = \mathrm{col}(f, 0)$.

Таким образом, свойство вполне управляемости системы (1.8) инвариантно относительно компонент $\varphi_{n-m+1}, \ldots, \varphi_n$ возмущения φ. Поэтому, например, система, эквивалентная уравнению $x^{(n)} = f(t, x, x', \ldots, x^{n-1}) + u$, вполне управляема на любом отрезке времени независимо от вида f.

2. Доказательства. Доказательства первых трех теорем используют принцип Шаудера о существовании неподвижной точки. Отметим, что применению принципа Шаудера к исследованию управляемости нелинейной системы посвящены также работы [8,9].

Лемма 1. Пусть $x_0(t)$; $u_0(t)$ — решение системы

$$\begin{aligned} x(t) &= \int K(t, s)\varphi(s, x(s), u(s))ds + K(t, t_0)x_0 \\ u(t) &= \int L(t, s)\varphi(s, x(s), u(s))ds + L(t, t_0)x_0 \end{aligned} \tag{2.1}$$

Тогда управление $u = u_0(t)$ переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.1) в позицию $(t_1, 0)$ по траектории $x_0(t)$.

Доказательство этой леммы устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 2. В условиях теоремы 1 для любого $x_0 \in R^n$ система (2.1) имеет по крайней мере одно решение.

Доказательство. Запишем систему (2.1) в виде $y = Fy$, где

$$y = \begin{Vmatrix} x \\ u \end{Vmatrix}, \quad Fy = \int R(t, s)\,\varphi(s, y(s))\,ds + R(t, t_0)\,x_0, \quad R(t, s) = \begin{Vmatrix} K(t, s) \\ L(t, s) \end{Vmatrix}$$

Из структуры матриц K и L следует, что $(n+m)\times n$-матрица $R(t, s)$ удовлетворяет при $(t, s)\in I\times I$ условиям Радона. Далее, так как φ непрерывна по совокупности аргументов $(t, y)\in I\times R^{n+m}$, то в силу известной теоремы В. В. Немыцкого оператор F вполне непрерывен как оператор, действующий из $C = C(I, R^{n+m})$ в C, где C — банахово пространство непрерывных на I функций $y(t)$ со значениями в R^{n+m} и нормой $\|y\| = \max|y(t)|$, $t\in I$.

Пусть неравенство (1.4) выполнено при $\alpha<1$, $\beta<1$. Рассмотрим множество $C_1\subset C$ функций $y = \mathrm{col}(x, u)$, удовлетворяющих условиям $|x(t)|\leqslant\xi_0$, $|u(t)|\leqslant\xi_0$, где ξ_0 — положительное решение уравнения

$$\xi = M(a_1\xi^\alpha + b_1\xi^\beta + c_1 + |x_0|)$$

$$M = \max\{\max k(t),\ \max l(t),\ t\in I\},\quad a_1 = \int a dt,\ b_1 = \int b dt,\ c_1 = \int c dt$$

$k(t)$, $l(t)$ определены равенствами (1.3). Множество C_1 — ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства C. Покажем, что множество C_1 инвариантно относительно отображения F. Действительно, пусть $y = \mathrm{col}(x, u)\in C_1$, $Fy = \mathrm{col}(x_1, u_1)$. Для x_1 имеем оценку

$$|x_1(t)|\leqslant\int|K(t, s)||\varphi(s, x(s), u(s))|ds + |K(t, t_0)||x_0|\leqslant$$
$$\leqslant M\left(\int(a(t)|x(t)|^\alpha + b(t)|u(t)|^\beta + c(t))dt + |x_0|\right)\leqslant M(a_1\xi_0^\alpha + b_1\xi_0^\beta +$$
$$+ c_1 + |x_0|) = \xi_0$$

Аналогично, $|u_1(t)|\leqslant\xi_0$. Следовательно, $Fy\in C_1$. В силу принципа Шаудера система (2.1) имеет решение.

Пусть теперь неравенство (1.4) выполнено при $\alpha<1$, $\beta = 1$. Обозначим через ξ_0 положительный корень уравнения

$$\xi = k_1/\Delta_1(a_1\xi^\alpha + c_1 + |x_0|)$$
$$k_1 = \max_{t\in I}k(t),\quad \Delta_1 = 1 - \int bldt > 0,\quad a_1 = \int adt,\quad c_1 = \int cdt$$

Существование ξ_0 следует из условий $\alpha>1$, $\Delta_1>0$ теоремы 1. Ясно поэтому, что система уравнений

$$\xi = k_1\left(a_1\xi^\alpha + \int b(t)\psi(t)dt + c_1 + |x_0|\right),\qquad \psi(t) = \frac{l(t)}{k_1}\xi$$

имеет положительное решение ξ_0, $\psi_0(t) = (l(t)/k_1)\xi_0$.

Построим множество C_2 непрерывных на I функций $y = \mathrm{col}(x, u)$, удовлетворяющих неравенствам $|x(t)|\leqslant\xi_0$, $|u(t)|\leqslant\psi_0(t)$. Множество C_2 — ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства C и, кроме того, C_2 инвариантно относительно отображения F. Это проверяется обычным способом

$$y = \mathrm{col}(x, u)\in C_2,\qquad Fy = \mathrm{col}(x_1, u_1)$$
$$|x_1(t)|\leqslant k_1\left(\int(a(t)|x(t)|^\alpha + b(t)|u(t)| + c(t)dt + |x_0|\right)\leqslant$$
$$\leqslant k_1\left(a_1\xi_0^\alpha + \int b(t)\psi_0(t)dt + c_1 + |x_0|\right) = \xi_0.$$

Аналогично, $|u_1(t)|\leqslant\psi_0(t)$. Следовательно, $Fy\in C_2$. В силу принципа Шаудера система (2.1) имеет решение.

В случае $\alpha = 1$, $\beta<1$ доказательство аналогично только что рассмотренному.

Пусть неравенство (1.4) выполнено при $\alpha = \beta = 1$. Рассмотрим линейную систему интегральных уравнений относительно скалярных функций $\xi(t)$, $\psi(t)$

$$\xi(t) = k(t)\left(\int(a(t)\xi(t) + b(t)\psi(t))dt + |x_0| + c_1\right)\tag{2.2}$$
$$\psi(t) = l(t)\left(\int(a(t)\xi(t) + b(t)\psi(t))dt + |x_0| + c_1\right)$$

Оказывается, что система (2.2) имеет положительное решение

$$\xi_0(t) = \frac{k(t)}{\Delta}(|x_0| + c_1),\qquad \psi_0(t) = \frac{l(t)}{\Delta}(|x_0| + c_1)\tag{2.3}$$
$$\Delta = 1 - \int(ak + bl)dt > 0$$

Построим множество C_4 непрерывных на I функций $y = \mathrm{col}\,(x, u)$, удовлетворяющих неравенствам

$$|x(t)| \leqslant \xi_0(t), \qquad |u(t)| \leqslant \psi_0(t)$$

Множество C_4 — ограниченное замкнутое выпуклое множество пространства C. Кроме того, можно проверить, что C_4 инвариантно относительно отображения F. Ссылка на принцип Шаудера завершает доказательство леммы 2.

Для дальнейшего понадобится следующая оценка решения $x_0(t)$, $u_0(t)$ системы (2.1), которая в случае $\alpha = \beta = 1$ непосредственно усматривается из (2.3):

$$|x_0(t)| \leqslant \frac{k(t)}{\Delta}(|x_0| + c_1), \qquad |u_0(t)| \leqslant \frac{l(t)}{\Delta}(|x_0| + c_1), \quad t \in I \tag{2.4}$$

Доказательство теоремы 1 следует из лемм 1 и 2.

Лемма 3. Пусть выполнены условия теоремы 2 (кроме условия $0 \in \mathrm{int}\,\Omega(t, 0)$ $t \in I$). Тогда найдется такое $\eta > 0$, что для каждого $x_0 \in S_\eta = \{x \in R^n : |x| < \eta\}$ система (2.1) имеет по крайней мере одно решение $x_0(t)$, $u_0(t)$ и $|x_0(t)| + |u_0(t)| \to 0$ при $|x_0| \to 0$ равномерно относительно $t \in I$.

Доказательство. Выберем число $\nu > 0$ столь малым, что $S_\nu \subset U$, где $S_\nu = \{y \in R^{n+m}: |y| < \nu\}$, а U — область, в которой выполнено неравенство (1.5). По функции φ построим новую функцию

$$\varphi_1(t, x, u) = \varphi_1(t, y) + \begin{cases} \varphi(t, y), & t \in I, \quad y \in S_\nu \\ \varphi\left(t, \dfrac{\nu y}{|y|}\right), & t \in I, \quad y \notin S_\nu \end{cases}$$

Ясно, что функция φ_1 непрерывна по совокупности аргументов и при всех $(t, x, u) \in I \times R^n \times R^m$ удовлетворяет неравенству (1.5).

Допустим временно, что лемма 3 доказана для системы (2.1) с функцией φ_1 вместо φ. Следовательно, доказано, что существует решение $x_0(t), u_0(t)$, удовлетворяющее условию $|x_0(t)| + |u_0(t)| \to 0$, $|x_0| \to 0$. Это означает, что если число $|x_0|$ достаточно мало, то $y_0(t) = \mathrm{col}\,(x_0(t), u_0(t)) \in S_\nu$ при всех $t \in I$. Но в силу построения φ_1 имеем тождество $\varphi_1(t, y_0(t)) = \varphi(t, y_0(t))$, и, следовательно, система (2.1) с функцией φ тоже имеет решение. Таким образом, существование решения системы (2.1) с функцией φ_1 влечет существование решения (при достаточно малых $|x_0|$) системы (2.1) с функцией φ. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что неравенство (1.5) выполнено при всех $(t, x, u) \in I \times R^n \times R^m$.

В первую очередь рассмотрим случай $\alpha = \beta = 1$. Рассуждая так же, как в п. 4 доказательства леммы 2, приходим к заключению, что существует решение $x_0(t)$, $u_0(t)$ системы (2.1) и это решение удовлетворяет оценкам (2.4) при $c_1 = 0$. Следовательно

$$|x_0(t)| + |u_0(t)| \leqslant \frac{2M}{\Delta}|x_0| \to 0, \qquad |x_0| \to 0$$

$$M = \max\{\max k(t), \max l(t), t \in I\}$$

равномерно относительно $t \in I$.

Пусть неравенство (1.5) выполнено при $\alpha = 1, \beta > 1$. Рассмотрим сначала уравнение

$$\psi = \frac{l_1}{\Delta_1}(b_1\psi^\beta + |x_0|) \tag{2.5}$$

$$l_1 = \max_{t \in I} l(t), \qquad \Delta_1 = 1 - \int akdt > 0, \qquad b_1 = \int bdt$$

относительно неизвестного ψ. Так как $\beta > 1$, то при достаточно малых $|x_0|$ уравнение (2.5) имеет два положительных решения, наименьшее из которых $\psi_0(x_0)$. Ясно, что

$\psi_0(x_0) \to 0$, $|x_0| \to 0$. Рассмотрим теперь систему уравнений относительно $\xi(t)$, ψ

$$\xi(t) = \frac{k(t)}{l_1}\psi, \qquad \psi = l_1\left(\int a(t)\,\xi(t)\,dt + b_1\psi^\beta + |x_0|\right) \tag{2.6}$$

В условиях существования решения уравнения (2.5) система (2.6) имеет положительное решение $\xi_0(t) = (k(t)/l_1)\psi_0$, $\psi = \psi_0$ и, следовательно, $\xi_0(t) + \psi_0 \to 0$, $|x_0| \to 0$ равномерно относительно $t \in I$.

Обозначим через C_2 множество непрерывных на I функций $y(t) = \operatorname{col}(x(t), u(t))$, удовлетворяющих неравенствам $|x(t)| \leqslant \xi_0(t)$, $|u(t)| \leqslant \psi_0$. Можно показать, что множество C_2 инвариантно относительно отображения F, построенного в доказательстве леммы 2. В силу принципа Шаудера система (2.1) имеет решение $x_0(t)$, $u_0(t)$, удовлетворяющее оценке

$$|x_0(t)| + |u_0(t)| \leqslant \xi_0(t) + \psi_0$$

В случае $\alpha > 1$, $\beta = 1$ рассуждения аналогичны только что приведенным.

Пусть неравенство (1.5) выполнено при $\alpha > 1$, $\beta > 1$. Обозначим через $\psi_0(x_0)$ наименьшее положительное решение уравнения

$$\psi = M(a_1\psi^\alpha + b_1\psi^\beta + |x_0|)$$
$$M = \max\{\max k(t),\ \max l(t),\ t \in I\}, \qquad a_1 = \int a\,dt, \qquad b_1 = \int b\,dt$$

Решение $\psi_0(x_0)$ существует при достаточно малых $|x_0|$ и $\psi_0(x_0) \to 0$ при $|x_0| \to 0$. Оказывается, что множество $C_4 \subset C$ непрерывных на I функций $y(t) = \operatorname{col}(x(t), u(t))$, удовлетворяющих неравенствам $|x(t)| \leqslant \psi_0$, $|u(t)| \leqslant \psi_0$ инвариантно относительно отображения F. Этих данных достаточно для завершения доказательства леммы 3.

Доказательство теоремы 2. Условие $0 \in \operatorname{int}\Omega(t, 0)$ в совокупности с непрерывностью по (t, x) множества $\Omega(t, x)$ означает, что найдутся числа $\delta_1 > 0$, $\varepsilon_1 \in (0, \gamma]$ (где γ — число, участвующее в определении 2), обеспечивающее включение $S_{\delta_1} \subset \operatorname{int}\Omega(t, x)$ при всех $(t, x) \in I \times S_{\varepsilon_1}$. Пусть задано ε, участвующее в определении 2. Построим $\varepsilon_2 = \min\{\varepsilon_1, \varepsilon\}$. По числам ε_2 и δ_1 выберем δ столь малым, что, во-первых, $\delta < \delta_1$, во-вторых, для всех $x_0 \in S_\delta$ решение $x_0(t)$, $u_0(t)$ системы (2.1) удовлетворяет включениям $x_0(t) \in S_{\varepsilon_2}$, $u_0(t) \in S_{\delta_1}$, $t \in I$. В силу леммы 3 этого можно добиться.

Из леммы 1 следует, что управление $u_0(t)$ переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.1) в позицию $(t_1, 0)$ по траектории $x_0(t)$. Кроме того, $x_0(t) \in S_{\varepsilon_2} \subset S_\varepsilon$. Далее, из включения $u_0(t) \in S_{\delta_1}$ следует включение $u_0(t) \in \operatorname{int}\Omega(t, x)$ при всех $(t, x) \in I \times S_{\varepsilon_1}$, но $x_0(t) \in S_{\varepsilon_1}$, поэтому $u_0(t) \in \operatorname{int}\Omega(t, x_0(t)) \subset \Omega(t, x_0(t))$. Теорема 2 доказана.

Доказательство теоремы 3. Если

$$\lim_{\xi\to\infty} \xi^{-1}\int r(t, \xi)\,dt = 0$$

то для каждого x_0 уравнение

$$M\left(\int r(t, \xi)\,dt + |x_0|\right) = \xi \tag{2.7}$$
$$M = \max\{\max k(t),\ \max l(t),\ t \in I\}$$

имеет положительное решение ξ_0. Можно проверить, что ограниченное замкнутое выпуклое множество $C_\xi \subset C$ непрерывных на I функций $y(t) = \operatorname{col}(x(t), u(t))$, удовлетворяющих неравенствам $|x(t)| \leqslant \xi_0$, $|u(t)| \leqslant \xi_0$, инвариантно относительно отображения F, построенного в доказательстве леммы 2.

Если

$$\lim \xi^{-1} \int r(t, \xi) dt = 0, \quad \xi \to 0$$

то уравнение (2.7) имеет положительное решение $\xi_0 = \xi_0(x_0) \to 0$ при $|x_0| \to 0$. Инвариантным относительно F множеством служит в этом случае то же множество $|x(t)| \leqslant \xi_0$, $|u(t)| \leqslant \xi_0$.

Приведенных данных достаточно для завершения доказательства теоремы 3.

Доказательство теоремы 4. Пусть $u_1(t)$ — управление, переводящее позицию (t_0, x_0) системы (1.7) в позицию $(t_1, 0)$ по траектории $x_1(t)$. Тогда непосредственной проверкой можно убедиться что управление $u_0(t) = z_0(t, x_1(t), u_1(t))$ переводит позицию (t_0, x_0) системы (1.1) в позицию $(t_1, 0)$ по траектории $x_0(t) = x_1(t)$, $t \in I$. Поэтому из вполне управляемости системы (1.7) следует вполне управляемость системы (1.1).

Если же система (1.7) локально управляема в малом, то $u_1(t) \in \Omega(t, x_1(t))$. В силу условия $z_0(t, x, u) \in \Omega(t, x)$ при $u \in \Omega(t, x)$ имеем включение

$$u_0(t) = z_0(t, x_1(t), u_1(t)) \in \Omega(t, x_1(t))$$

так что и система (1.1) локально управляема в малом.

Автор благодарит А. Б. Куржанского и Ю. С. Осипова за обсуждение результатов статьи.

Поступила 2 XI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
2. *Альбрехт Э. Г.* Об оптимальном управлении движением квазилинейных систем. Дифференциальные уравнения, 1969, т. 5, № 3.
3. *Габасов Р., Кириллова Ф.* Качественная теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1971.
4. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. М., «Наука», 1971.
5. *Lukes D. L.* Global controllability of nonlinear systems. SJAM J. Control., 1972, vol. 10, No. 1, p. 112—126.
6. *Vidyasagar M.* A controllability condition for nonlinear systems. JEEE Trans. Automat. Control., 1972, vol. 17, No. 4, p. 569—570.
7. *Mirza K. B., Womack B.* On the controllability of a class of nonlinear systems. JEEE Trans. Automat. Control, 1972, vol. 17, No. 4, p. 531—535.
8. *Dauer J. P.* Sufficent conditions for controllability nonlinear systems. Atti Accad. naz. Lincei Rend. cl. sci fis., mat. e. natur., 1971 (1972), vol. 51, No. 5, p. 313—316.
9. *Dauer J. P.* A controllability technique for nonlinear systems. J. Math. Analysis and Applic., 1972, vol. 37, No. 2, p. 442—451.
10. *Aronsson G.* A new approach to nonlinear controllability. J. Math. Analysis and Applic., 1973, vol. 44, No. 3, p. 763—772.