Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГР С ИМПУЛЬСНЫМИ УПРАВЛЕНИЯМИ

В. И. Ухоботов

(Москва)

Рассматривается один класс линейных дифференциальных игр, когда первый игрок обладает импульсными управлениями, а второй — распоряжается управлениями, стесненными геометрическими ограничениями. Сформулирована игровая задача и доказана теорема, которая в классе рассматриваемых игр дает ответ на поставленную задачу. Приводятся примеры. Материал статьи примыкает к работам [1–5].

1. Пусть уравнения движения имеют следующий вид:

$$dz = Bz\,dt + v\,dt + N\,d\Phi, \quad z \in R^n, \quad v \in V \subset R^n \tag{1.1}$$

Здесь R^n — n-мерное евклидово пространство, B — постоянная квадратная матрица размерности n, N — постоянная матрица, имеющая n строк и r столбцов, V — выпуклый компакт.

Пусть $t > 0$ и $C\,[0, t]$ — банахово пространство непрерывных r-мерных вектор-функций $x(\tau)$, определенных на $[0, t]$, с нормой $\varkappa([0, t], x(\tau)) = \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| x(\tau) \|$, где $\| x(\tau) \|$ — норма в r-мерном линейном нормированном пространстве R^r. Через $W\,[0, t]$ обозначим пространство r-мерных вектор-функций $\Phi(\tau)$, имеющих на $[0, t]$ ограниченное изменение, причем норма в $W\,[0, t]$, обозначенная через $\rho([0, t], \Phi(\tau))$, порождается нормой $\varkappa([0, t], x(\tau))$, как в сопряженном к $C\,[0, t]$ пространстве.

Пусть заданы $z_0 \in R^n$, $\sigma > 0$, $\Phi(\tau) \in W\,[0, \sigma]$ и измеримая на $[0, \sigma]$ вектор-функция $v(\tau) \in V$. Считаем, что под воздействием функций $\Phi(\tau)$, $v(\tau)$ фазовая точка z в силу системы (1.1) из начального положения сместится в момент σ в точку

$$z(\sigma) = e^{\sigma B} z_0 + \int_0^\sigma e^{(\sigma-\tau)B} v(\tau)\,d\tau + \int_0^\sigma e^{(\sigma-\tau)B} N\,d\Phi(\tau) \tag{1.2}$$

где последний интеграл понимается в смысле Римана — Стилтьеса.

Введем в рассмотрение переменную μ, изменяющуюся по следующему правилу:

$$\mu(\sigma) = \mu_0 - \rho([0, \sigma], \Phi(\tau)) \tag{1.3}$$

Запишем ограничения на выбор функции $\Phi(\tau)$ в виде неравенства

$$\mu(\sigma) \geqslant 0 \tag{1.4}$$

Обозначим через I множество $\mu \geqslant 0$, а через $R^n \times I$ — прямое произведение R^n на I. В рассмотренной ниже игровой задаче используется следующее правило. Первый игрок распоряжается выбором функции $\Phi(\tau)$, второй игрок — функции $\mathrm{v}(\tau) \in V$. Пусть $[\mathrm{z}_0;\ \mu_0] \in R^n \times I$ — начальная позиция игры. Второй игрок выбирает по своему усмотрению $\sigma_1 > 0$ и измеримое на $[0, \sigma_1]$ управление $\mathrm{v}_1(\tau) \in V$. О своем выборе он сообщает первому игроку. Зная о выборе второго игрока, первый игрок выбирает на $[0, \sigma_1)$ управление $\Phi_1(\tau) \in W[0, \sigma_1]$ такое, чтобы выполнялось (1.4). Под воздействием выбранных управлений точка $[\mathrm{z}_0;\ \mu_0] \in R^n \times I$ сместится в точку $[\mathrm{z}(\sigma_1);\ \mu(\sigma_1)] \in R^n \times I$ (см. (1.2) и (1.3)). Затем второй игрок выбирает $\sigma_2 > 0$, управление $\mathrm{v}_2(\tau)$ на $[0, \sigma_2]$ и сообщает первому игроку и т. д. Это так называемые σ-стратегии.

Пусть π — линейное отображение R^n в R^q, где R^q — q-мерное линейное евклидово пространство. При каждом $t > 0$ рассмотрим множество

$$A(t) = \left\{\mathrm{y} \in R^q:\ \mathrm{y} = \int_0^t \pi e^{(t-\tau)B} N\, d\Phi(\tau),\ \rho([0, t]\,\Phi(\tau)) = 1\right\} \tag{1.5}$$

Можно показать, используя слабую компактность шара в $W[0, t]$, что при каждом $t > 0$ множество $A(t)$ является выпуклым компактом в R^q, задаваемым системой неравенств (звездочка означает транспонирование)

$$(\mathrm{y}, \psi) \leqslant \max_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \| N^* e^{\tau B^*} \pi^* \psi \| \tag{1.6}$$

Положим $A(0) = \bigcap_{t>0} A(t)$. Пусть в R^q задано замкнутое множество G.

Определение 1. Игра из точки $[\mathrm{z};\ \mu] \in R^n \times I$ может быть закончена в момент $t_1 > 0$, если для любой σ-стратегии второго игрока существует σ-стратегия первого игрока такая, что $\pi \mathrm{z}(t_1) \in G + \mu(t_1) A_1(0)$.

В связи с данным определением можно сформулировать следующую задачу.

Задача 1. Пусть заданы $G \subset R^q$ и $t_1 > 0$, требуется определить множество тех точек $[\mathrm{z};\ \mu] \in R^n \times I$, из которых игра может быть закончена в момент t_1.

2. Будем решать задачу 1 при следующих предположениях:

1) $\pi e^{\tau B} V = \mathrm{y}(\tau) + k(\tau) S, \quad \tau \geqslant 0$

2) $\| N^* e^{\tau B^*} \pi^* \psi \| = \beta(\tau)\, c(\psi), \quad \tau \geqslant 0,\ \psi \in R^q$

3) $m(t) = \max\limits_{0 \leqslant \tau \leqslant t} \beta(\tau) > 0, \quad t > 0$

4) $G = \mathrm{a} + \varepsilon S, \quad \mathrm{a} \in R^q, \quad \mathrm{a} = \mathrm{const}$

Здесь S — некоторый выпуклый, симметрический относительно начала координат компакт в R^q, содержащий нулевой вектор в качестве внутренней точки, $c(\psi)$ — опорная функция к S

$$c(\psi) = \max\nolimits_{s \in S} (s, \psi) \quad \text{для } \psi \in R^q$$

$k(\tau)$ и $\beta(\tau)$ — непрерывные скалярные функции, $k(\tau) \geqslant 0$, $\beta(\tau) \geqslant 0$ при $\tau \geqslant 0$, $\mathrm{y}(\tau)$ — непрерывная q-мерная вектор-функция.

Из предположений 1) и 2) и из (1.5), (1.6) можно получить, что при любых $\tau_1 \geqslant 0$, $\tau_2 \geqslant 0$

$$\left\{\mathbf{w} \in R^q\colon \mathbf{w} = \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \pi e^{\tau B}\mathbf{v}(\tau)\,d\tau,\ \mathbf{v}(\tau) \in V\right\} = \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} \mathbf{y}(\tau)\,d\tau + \int_{\tau_1}^{\tau_1+\tau_2} k(\tau)\,d\tau\cdot S \tag{2.1}$$

$$\pi e^{\tau_1 B}A(\tau_2) = \max_{\tau_1 \leqslant \tau \leqslant \tau_1+\tau_2} \beta(\tau)\cdot S \tag{2.2}$$

Обозначим через t_2 максимальное из чисел $t \geqslant 0$, для которых

$$\varepsilon - \int_0^t k(\tau)\,d\tau \geqslant 0$$

Если это неравенство выполняется для всех $t \geqslant 0$, то положим $t_2 = +\infty$.

Лемма 1. Пусть $0 \leqslant t_1 \leqslant t_2$; для того, чтобы игру из точки $[\mathbf{z}; \mu] \in R^n \times I$ можно было закончить в момент t_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_0^{t_1} \mathbf{y}(\tau)\,d\tau - \mathbf{a} \in (\mu m(t_1) + \varepsilon - K_1)\,S, \quad K_1 = \int_0^{t_1} k(\tau)\,d\tau \tag{2.3}$$

Доказательство. Используя определения операции $\overset{*}{-}$ (см., например, [1]), можно показать, что

$$(\mu m(t_1) + \varepsilon - K_1)\,S = (\mu m(t_1) + \varepsilon)\,S \overset{*}{-} K_1 S \tag{2.4}$$

$$(\mu m(t_1) + \varepsilon - K_1)\,S = \mu m(t_1)\,S + (\varepsilon S \overset{*}{-} K_1 S) \tag{2.5}$$

Необходимость. Пусть (2.3) не выполняется, тогда из (2.1) и (2.4) следует существование измеримого на $[0, t_1]$ управления $\mathbf{v}_1(\tau) \in V$ такого, что

$$\pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-\tau)B}\,\mathbf{v}_1(\tau)\,d\tau - \mathbf{a} \mathrel{\overline{\in}} (\mu m(t_1) + \varepsilon)\,S \tag{2.6}$$

Пусть первый игрок выбрал управление $\Phi_1(\tau) \in W[0, t_1]$, удовлетворяющее (1.4). Тогда существует $\lambda \in [0, 1]$ такое, что

$$\lambda\mu = \rho([0, t_1], \Phi_1(\tau)), \qquad \mu(t_1) = (1 - \lambda)\,\mu$$

Отсюда и соотношений (1.5) и (2.2) следует существование вектора $s_1 \in S$ такого, что

$$\int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-\tau)B}\,N d\Phi(\tau) = \lambda\mu m(t_1)\,s_1$$

Тогда из (2.6) следует, что

$$\pi\mathbf{z}(t_1) = \pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-\tau)B}\,\mathbf{v}_1(\tau)\,d\tau + \lambda\mu m(t_1)\,s_1 \mathrel{\overline{\in}} \mathbf{a} + (1-\lambda)\,\mu A(0) + \varepsilon S$$

ибо при любых $\lambda \in [0, 1]$ и $s \in S$ имеем

$$\mathbf{a} - \lambda\mu m(t_1)\,s + (1-\lambda)\,\mu A_1(0) + \varepsilon S \subset \mathbf{a} + (\mu m(t_1) + \varepsilon)\,S$$

Достаточность. Пусть имеет место (2.3), тогда из (2.5) следует, что существует $s_1 \in S$ такое, что

$$\pi e^{t_1 B} z + \int_0^{t_1} \pi e^{(t_1-\tau)B} v(\tau)\, d\tau + \mu m(t_1) s_1 \in a + \varepsilon S \tag{2.7}$$

для всех измеримых на $[0, t_1]$ функций $v(\tau) \in V$. Из (2.7) с использованием (1.5) и (2.2) вытекает доказательство достаточности.

Рассмотрим теперь случай, когда $t_1 > t_2$.

Теорема 1. Для того, чтобы игру из точки $[z; \mu] \in R^n \times \mathrm{I}$ можно было окончить в момент $t_1 > t_2$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi e^{t_1 B} z + \int_0^{t_1} y(\tau)\, d\tau - a + m(t_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)}\, d\tau \cdot S \subset \mu m(t_1) S \tag{2.8}$$

Доказательство. Необходимость. При каждом целом $j \geqslant 1$ определим

$$b(j) = \sum_{i=1}^{j} \left[\left(\int_{t_2+(i-1)\sigma}^{t_2+i\sigma} k(\tau)\, d\tau \right) \Big/ m(t_2 + i\sigma) \right], \qquad \sigma = \frac{t_1 - t_2}{j}$$

Как нетрудно видеть

$$\lim_{j\to\infty} b(j) = \int_{t_2}^{t_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)}\, d\tau$$

Пусть (2.8) не выполняется, тогда существует число j_1 такое, что

$$\pi e^{t_1 B} z + \int_0^{t_1} y(\tau)\, d\tau - a + m(t_1) b(j_1) S \not\subset \mu m(t_1) S \tag{2.9}$$

Положим

$$\eta_i = \left(\int_{t_2+(i-1)\sigma_1}^{t_2+i\sigma_1} k(\tau)\, d\tau \right) \Big/ m(t_2 + i\sigma_1), \qquad \sigma_1 = \frac{t_1 - t_2}{j_1}$$

Тогда можно записать, что $b(j_1) = \eta_1 + \eta_2 + \ldots + \eta_{j_1}$.

Из (2.9) и выпуклости компакта S следует, что существует ненулевой вектор $\psi_1 \in R^q$ и число $\nu > 0$ такие, что

$$\left(\pi e^{t_1 B} z + \int_0^{t_1} y(\tau)\, d\tau - a, \psi \right) + m(t_1) b(j_1) c(\psi_1) \geqslant \mu m(t_1) c(\psi_1) + \nu \tag{2.10}$$

Пусть вектор $s_1 \in S$ такой, что $c(\psi_1) = (s_1, \psi_1)$. Из (2.1) следует существование измеримого на $[0, \sigma_1]$ управления $v_1(\tau)$ такого, что

$$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B} \int_0^{\sigma_1} e^{(\sigma_1-\tau)B} v_1(\tau)\, d\tau = \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} y(\tau)\, d\tau + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} k(\tau)\, d\tau \cdot s_1 \tag{2.11}$$

Покажем, что если второй игрок возьмет σ_1 и $v_1(\tau) \in V$, на $[0, \sigma_1]$, то для любого управления

$$\begin{gathered} \pi e^{(t_1-\sigma_1)B} z(\sigma_1) + \\ + \int_0^{t_1-\sigma_1} y(\tau)\, d\tau - a + m(t_1 - \sigma_1)(b(j_1) - \eta_{j_1}) S \not\subset \mu(\sigma_1) m(t_1 - \sigma_1) S \end{gathered} \tag{2.12}$$

В силу (1.4) и (2.2) можем считать, что существуют $s \in S$ и $\lambda \in [0, 1]$ такие, что

(2.13) $$\mu(\sigma_1) = (1-\lambda)\mu$$

(2.14) $$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B} \int_0^{\sigma_1} e^{(\sigma_1-\tau)B} N\, d\Phi(\tau) = \lambda\mu \max_{t_1-\sigma_1 \leqslant \tau \leqslant t_1} \beta(\tau) \cdot s$$

Тогда из (2.11) и (2.14) следует, что

(2.15) $$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B} \mathbf{z}(\sigma_1) + \int_0^{t_1-\sigma_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau = \pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_0^{t_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau + {}$$
$$+ \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} k(\tau)\, d\tau \cdot s_1 + \lambda\mu \max_{t_1-\sigma_1 \leqslant \tau \leqslant t_1} \beta(\tau) \cdot s$$

Пусть $\mu \leqslant b(j_1) - \eta_{j_1}$, тогда (2.12) всегда имеет место, так как

$$\mu(\sigma_1) = (1-\lambda)\mu \leqslant b(j_1) - \eta_{j_1}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $\mu > b(j_1) - \eta_{j_1}$. Если $\lambda \in [0, 1]$ такое, что $\mu(\sigma_1) < b(j_1) - \eta_{j_1}$, то (2.12) имеет место.

Рассмотрим $\lambda \in [0, 1]$ такие, что $\mu(\sigma_1) \geqslant b(j_1) - \eta_{j_1}$, т. е.

(2.16) $$0 \leqslant \lambda\mu \leqslant \mu - (b(j_1) - \eta_{j_1})$$

Из (2.15) и (2.10) следует, что

$$(\pi e^{(t_1-\sigma_1)B}\mathbf{z}(\sigma_1), \psi_1) + \left(\int_0^{t_1-\sigma_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau - \mathbf{a}, \psi_1 \right) + {}$$
$$+ m(t_1-\sigma_1)(b(j_1) - \eta_{j_1}) c(\psi_1) - {}$$
$$- \mu(\sigma_1) m(t_1-\sigma_1) c(\psi_1) \geqslant \mu(t_1) m(t_1) c(\psi_1) - m(t_1) b(j_1) c(\psi_1) + {}$$
$$+ \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} k(\tau)\, d\tau c(\psi_1) - \lambda\mu \max_{t_1-\sigma_1 \leqslant \tau \leqslant t_1} \beta(\tau) c(\psi_1) + {}$$
$$+ m(t_1-\sigma_1)(b(j_1) - \eta_{j_1}) c(\psi_1) - {}$$
$$- (1-\lambda)\mu m(t_1-\sigma_1) c(\psi_1) + \nu = g(\lambda)$$

Можно показать, что при $\lambda \in [0, 1]$ и удовлетворяющих (2.16) выполняется неравенство $g(\lambda) \geqslant \nu$. А это означает, что имеет место (2.12).

Повторяя это рассуждение j_1 раз, найдем σ-стратегию второго игрока такую, что при любой σ-стратегии первого игрока в момент времени $t_1 - t_2$ будет выполняться

$$\pi e^{t_2 B}\mathbf{z}(t_1 - t_2) + \int_0^{t_2} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau - \mathbf{a} \in \mu(t_1 - t_2) m(t_2) S$$

причем $\sigma_i = \sigma_1$. Применение леммы 1 завершает доказательство необходимости.

Достаточность. Пусть имеет место (2.8), тогда необходимо должно выполняться

$$\mu \geqslant \int_{t_2}^{t_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau \tag{2.17}$$

Так как $m(t_1) \geqslant m(\tau)$ для $0 \leqslant \tau \leqslant t_1$, то для любого $\sigma \in [t_2, t_1]$

$$\int_{t_1-\sigma}^{t_1} k(\tau)\, d\tau + m(t_1) \int_{t_2}^{t_1-\sigma} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau \leqslant m(t_1) \int_{t_2}^{t_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau \tag{2.18}$$

Из (2.8), (2.17) и (2.18) следует, что

$$\begin{gathered} \pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau - \mathbf{a} + \int_{t_2}^{t_1} k(\tau)\, d\tau \times \\ \times S \subset \left(\mu m(t_1) - m(t_1) \int_{t_2}^{t_1-\sigma} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau\right) S \end{gathered} \tag{2.19}$$

Пусть второй игрок выбрал $0 < \sigma_1 \leqslant t_1 - t_2$ и управление $\mathbf{v}_1(\tau) \in V$ на $[0, \sigma_1]$, тогда существует $s_1 \in S$ такое, что имеет место (2.11).

Рассмотрим вначале случай, когда $m(t_1 - \sigma_1) < m(t_1)$. Тогда, согласно (2.19), существует $s_2 \in S$ такое, что

$$\begin{gathered} \pi e^{t_1 B}\mathbf{z} + \int_{t_2}^{t_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau - \mathbf{a} + \\ + \int_{t_1-\sigma_1}^{t_1} k(\tau)\, d\tau s_1 + m(t_1)\left(\mu - \int_{t_2}^{t_1-\sigma_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau\right) s_2 = \theta \end{gathered} \tag{2.20}$$

где $\theta \in R^q$ — нулевой вектор. Для $s_2 \in S$ можно указать функцию $\Phi(\tau) \in W[0, \sigma_1]$, $\rho([0, \sigma_1], \Phi(\tau)) = 1$ такую, что

$$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B} \int_0^{\sigma_1} e^{(\sigma_1-\tau)B} N\, d\Phi(\tau) = \max_{t_1-\sigma_1 \leqslant \tau \leqslant t_1} \beta(\tau) \cdot s_2 = m(t_1)\, s_2 \tag{2.21}$$

Припишем первому игроку управление

$$\Phi_1(\tau) = \left(\mu - \int_{t_2}^{t_1-\sigma_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau\right) \Phi(\tau)$$

Тогда в силу (2.20) и (2.21)

$$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B}\mathbf{z}(\sigma_1) + \int_0^{t_1-\sigma_1} \mathbf{y}(\tau)\, d\tau - \mathbf{a} = \theta$$

Кроме того

$$\mu(\sigma_1) = \int_{t_1}^{t_1-\sigma_1} \frac{k(\tau)}{m(\tau)} d\tau$$

Следовательно

$$\pi e^{(t_1-\sigma_1)B}\mathbf{z}(\sigma_1)+ \tag{2.22}$$

$$+\int\limits_0^{t_1-\sigma_1}\mathbf{y}(\tau)\,d\tau-\mathbf{a}+m(t_1-\sigma_1)\int\limits_{t_1}^{t_1-\sigma_1}\frac{k(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau\cdot S\subset\mu(\sigma_1)\,m(t_1-\sigma_1)\,S$$

Пусть теперь $m(t_1-\sigma_1)=m(t_1)$, тогда припишем первому игроку $\Phi_1(\tau)\equiv 0$. Так как в (2.18) в случае $m(t_1-\sigma_1)=m(t_1)$ стоит строгое равенство, то левая часть включения (2.22) равна

$$\pi e^{t_1B}\mathbf{z}+\int\limits_0^{t_1}\mathbf{y}(\tau)\,d\tau-\mathbf{a}+\int\limits_{t_1-\sigma_1}^{t_1}k(\tau)\,d\tau\cdot s_1+m(t_1)\int\limits_{t_2}^{t_1-\sigma_1}\frac{k(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau\cdot S$$

Таким образом, показано, что первый игрок всегда может поддерживать включение (2.22). Следовательно, в момент времени t_1-t_2 будет выполняться включение

$$\pi e^{t_2B}\mathbf{z}(t_1-t_2)+\int\limits_0^{t_2}\mathbf{y}(\tau)\,d\tau-\mathbf{a}\in\mu(t_1-t_2)\,m(t_2)\,S$$

Доказательство завершается применением леммы 1.

Рассмотрим теперь случай, когда $\varepsilon=0$.

Теорема 2. 1) Пусть

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{t_1}\frac{k(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau<+\infty$$

Для того, чтобы игру из точки $[\mathbf{z};\mu]\in R^n\times \mathrm{I}$ можно было закончить в момент t_1, необходимо и достаточно, чтобы

$$\pi e^{t_1B}\mathbf{z}+\int\limits_0^{t_1}\mathbf{y}(\tau)\,d\tau-\mathbf{a}+m(t_1)\int\limits_0^{t_1}\frac{k(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau\cdot S\subset\mu m(t_1)\,S$$

2) Пусть

$$\lim_{\delta\to 0}\int\limits_\delta^{t_1}\frac{k(\tau)}{m(\tau)}\,d\tau=+\infty$$

Тогда из любой точки $[\mathbf{z};\mu]\in R^n\times \mathrm{I}$ игру в момент $t_1>0$ закончить нельзя.

Доказательство этой теоремы проводится аналогично доказательству теоремы 1.

3. Приведем несколько примеров, иллюстрирующих теоремы 1 и 2.

Пример 1. Пусть уравнения движения имеют вид (1.1). Будем считать, что V — выпуклый, симметрический относительно начала координат компакт в R^n. Пусть $R^q=R^1$, а множество G — отрезок $[\varepsilon_1,\varepsilon_2]$. В случае $q=1$ матрица π является n-мерным вектор-строкой. Обозначим через S отрезок $[-1, 1]$, тогда $G=a+\varepsilon S$, где $a=(\varepsilon_1+\varepsilon_2)/2$, $\varepsilon=(\varepsilon_2-\varepsilon_1)/2$.

Нетрудно проверить, что предположения 1), 2), 4), сформулированные в п. 2, выполнены, причем

$$\beta(\tau) = \| N^* e^{\tau B^*} \pi^* \|, \quad y(\tau) = 0, \quad k(\tau) = \max_{v \in V} (e^{\tau B^*} \pi^*, v)$$

Для выполнения предположения 3) потребуем, чтобы $\beta(\tau) > 0$ для $0 < \tau \leqslant \sigma$, где σ — некоторое число.

Пример 2. Рассмотрим игру, когда уравнения движения имеют вид

$$dz_1 = z_2 dt + v dt, \quad dz_2 = k_1 z_1 dt + k_2 z_2 dt + d\Phi$$

где z_1, z_2 — r-мерные векторы, k_1 и k_2 — некоторые числа. Нетрудно видеть, что

$$N = \begin{Vmatrix} \Theta \\ E \end{Vmatrix}$$

где E и Θ — r-мерные единичная и нулевая матрицы соответственно.

Определим в R^r множество

$$S = \{ w \in R^r : (w, \psi) \leqslant \| \psi \| \text{ для } \psi \in R^r \}$$

Будем считать, что $v \in \delta S$, где $\delta > 0$. Положим $q = r$ и $\pi = (E, 0)$, тогда $\pi z \in \varepsilon S$ означает, что $z_1 \in \varepsilon S$.

В этом примере предположения 1)—4) выполнены, причем

$$\pi e^{\tau B} V = \delta \,|\, \alpha(\tau) \,|\, S, \qquad \| N^* e^{\tau B^*} \pi^* \psi \| = |\, \gamma(\tau) \,|\, \| \psi \|$$

Здесь $\alpha(\tau)$ и $\gamma(\tau)$ — решения следующих уравнений:

$$\alpha^{\cdot\cdot} = k_1 \alpha + k_2 \alpha^{\cdot}, \quad \alpha(0) = 1, \quad \alpha^{\cdot}(0) = 0$$
$$\gamma^{\cdot\cdot} = k_1 \gamma + k_2 \gamma^{\cdot}, \quad \gamma(0) = 0, \quad \gamma^{\cdot}(0) = 1$$

Пример 3. Пусть уравнения движения имеют вид

$$dz_1 = z_2 dt, \quad dz_2 = -k_1 z_2 dt + B_1 z_2 dt + d\Phi$$
$$dy_1 = y_2 dt, \quad dy_2 = -k_2 y_2 dt + B_2 y_2 dt + v dt$$

Здесь z_1, z_2, y_1, y_2 — r-мерные векторы, k_1, k_2 — некоторые числа, B_1 и B_2 — постоянные $r \times r$-матрицы, удовлетворяющие условиям

$$B_i^* = -B_i, \quad B_i^2 = -\omega_i^2 E, \quad i = 1, 2$$

где ω_i — некоторые неотрицательные числа, E — r-мерная единичная матрица. Считаем, что $v \in \delta S$, где S — r-мерный замкнутый евклидов шар единичного радиуса, $\delta > 0$.

В качестве нормы в R^r возьмем евклидову норму, тогда (см., например, [6])

$$\rho([0, t], \Phi(\tau)) = \int_0^t \left(\sum_{i=1}^r d\Phi_i^2(\tau) \right)^{1/2}$$

Положим $q = r$ и $\pi = (E, 0, -E, 0)$, тогда $\pi z \in \varepsilon S$ означает, что $z_1 - y_1 \in \varepsilon S$. Можно проверить, что

$$\pi e^{\tau B} V = \delta \alpha(\tau) S, \qquad \| N^* e^{\tau B^*} \pi^* \psi \| = \beta(\tau) \| \psi \|$$

где

$$\alpha(\tau) = (f_2^2(\tau) + g_2^2(\tau))^{1/2}, \quad \beta(\tau) = (f_1^2(\tau) + g_1^2(\tau))^{1/2}$$

$$f_i(\tau) = \int_0^\tau e^{-k_i t} \cos \omega_i t \, dt, \quad g_i(\tau) = \int_0^\tau e^{-k_i t} \sin \omega_i t \, dt, \quad i = 1, 2$$

Поступила 12 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2 Докл. АН СССР, 1967, т. 195, № 4.
2. *Красовский Н. Н., Третьяков В. Е.* К задаче о преследовании в случае ограничений на импульсы управляющих сил. Дифференциальные уравнения, 1966, т. 2, № 5.
3. *Красовский Н. Н.* Об игровой встрече движений с ограничениями на импульсы. ПММ, 1968, т. 32, вып. 2.
4. *Пожарицкий Г. К.* К задаче об импульсной встрече движений. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
5. *Пожарицкий Г. К.* Игровая задача импульсной «мягкой» встречи двух материальных точек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
6. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.