Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ ОДНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ СБЛИЖЕНИЯ — УКЛОНЕНИЯ

А. Г. Ченцов

(Свердловск)

Исследуются условия разрешимости дифференциальной игры на базе программной конструкции, аналогичной [1, 2]. Приводятся условия существования ситуации равновесия в чистых стратегиях. Статья примыкает к исследованиям [1–8].

1. Рассматривается конфликтно-управляемая система

$$dx/dt = f(t, x, u, v), \qquad x(t_0) = x_0$$
$$x \in R^n, \quad u \in P \subset R^p, \quad v \in Q \subset R^q$$

Здесь $f(\cdot)$ — непрерывная по совокупности и непрерывно дифференцируемая по x функция, удовлетворяющая сформулированному в [3, 7, 8] условию равномерной продолжимости решений, P и Q — компактные множества допустимых управлений первого и второго игроков.

На отрезке $[t_0, \vartheta_0]$ выделено замкнутое множество Θ. Предполагается, что на множестве $\{(\vartheta, x, m) : (\vartheta, m) \in M, x \in R^n\}$ задана функция $\omega(\vartheta, x, m)$, причем M — компактное подмножество $\Theta \times R^m$, а $\omega(\cdot)$ — непрерывна по совокупности и непрерывно дифференцируема по x в области $\omega_0 < \omega < \omega^\circ$. Не нарушая общности, полагаем, что сечения

$$M_\vartheta = \{m : (\vartheta, m) \in M, m \in R^m\}$$

непусты при всех $\vartheta \in \Theta$ и $\max_\theta \vartheta = \vartheta_0$.

Будем полагать, что стратегии U и V, контрстратегии U_v и порожденные ими движения определены аналогично [8] предельным переходом от соответствующих ломаных Эйлера.

Задача 1. Построить стратегию U° либо контрстратегию U_v°, гарантирующие на любом движении $x_{U^\circ}[t]$ и соответственно $x_{U_v^\circ}[t]$ выполнение неравенства (ε — наперед заданное число)

$$\min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U^\circ}[\vartheta], m) \leqslant \varepsilon \tag{1.1}$$

$$\min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U_v^\circ}[\vartheta], m) \leqslant \varepsilon \tag{1.2}$$

Задача 2. Построить пару стратегий (U°, V°), для которых на всяком движении $x^\circ[t] = x_{U^\circ, V^\circ}[t]$ выполняется неравенство

$$\sup_{\{x_{U^\circ,V}[t]\}} \min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U^\circ, V}[\vartheta], m) \leqslant$$
$$\leqslant \min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x^\circ[\vartheta], m) \leqslant$$
$$\leqslant \inf_{\{x_{U,V^\circ}[t]\}} \min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{U,V^\circ}[\vartheta], m)$$

каковы бы ни были стратегии U, V.

Задача 3. Построить стратегию V°, гарантирующую на любом движении $x_{V^\circ}[t]$ неравенство (ε — заданное число)

$$\min_\theta \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x_{V^\circ}[\vartheta], m) \geqslant \varepsilon$$

2. Рассмотрим модификацию программной конструкции [7,8]. Пусть $\{H(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ — класс допустимых программных управлений $\eta(\cdot)$, $\{K(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ — класс программных управлений $\mu(\cdot)$ первого игрока, $\{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ — класс программных управлений $\nu(\cdot)$ второго игрока, отождествленные соответственно с совокупностями всех регулярных борелевских мер на произведениях $[t_*, \vartheta] \times P \times Q$, $[t_*, \vartheta] \times P$ и $[t_*, \vartheta] \times Q$, имеющих лебеговскую проекцию [7,8] на $[t_*, \vartheta]$. Пусть $\sigma_{[t_*, \vartheta]}$ — σ-алгебра борелевских подмножеств $[t_*, \vartheta]$. Тогда для всякой меры $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ существует единственная с точностью до значений на множестве лебеговской меры нуль функция $\eta_t(\cdot)$, именуемая ниже мгновенным программным управлением, значения которой при каждом $t \in [t_*, \vartheta]$ — вероятности на $P \times Q$, причем для всякого борелевского подмножества $K \subset P \times Q$ функция $\eta_t(K)$ $\sigma_{[t_*, \vartheta]}$ измерима и

$$\eta(\{(t, u, v) : t \in \Gamma, (u, v) \in K\}) = \int_\Gamma \eta_t(K) m(dt)$$

для любых борелевских множеств $\Gamma \subset [t_*, \vartheta]$ и $K \subset P \times Q$. Аналогично определяются мгновенные программные управления $\mu_t(\cdot)$ и $\nu_t(\cdot)$ первого и второго игроков, отвечающие мерам $\mu(\cdot) \in \{K(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ и $\nu(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ соответственно.

Для произвольной $\sigma_{[t_*, \vartheta]}$-измеримой функции $u(\cdot)$ будем обозначать $\delta_{u(t)}$ мгновенное программное управление $\mu_t(\cdot)$, сосредоточенное при каждом t в точке $u_t = u(t)$. Аналогичный смысл будет иметь обозначение $\delta_{v(t)}$. Пусть $\{K^*(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$, $\{E^*(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ — подклассы $\{K(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ и $\{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$, состоящие соответственно из всех таких управлений $\mu^*(\cdot)$ и $\nu^*(\cdot)$, что отвечающие им мгновенные управления $\mu_t^*(\cdot)$ и $\nu_t^*(\cdot)$ суть $\delta_{u^*(t)}$ и $\delta_{u^*(t)}$ соответственно, где $u^*(t) \in P$, $v^*(t) \in Q$ — $\sigma_{[t_*, \vartheta]}$-измеримые вектор-функции.

Под слабой сходимостью программных управлений $\eta(\cdot)$, $\mu(\cdot)$ и $\nu(\cdot)$ будем понимать их сходимость в $*$-слабой топологии пространств, сопряженных к $C([t_*, \vartheta] \times P \times Q)$, $C([t_*, \vartheta] \times P)$ и $C([t_*, \vartheta] \times Q)$ соответственно. С учетом результатов [7] доказывается следующая лемма.

Лемма 2.1. Множества $\{K^*(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ и $\{E^*(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ слабо плотны в $\{K(m(\cdot)), [t_*, \vartheta]\}$ и $\{E(m(\cdot), [t_*, \vartheta]\}$ соответственно.

Произвольной позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0]$ сопоставим величину

$$\begin{aligned}
(2.1) \qquad & \varepsilon_0(t_*, x_*) = \\
& = \max_{\{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}} \min_{X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))} \min_{\Theta_{t_*}} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x(\vartheta), m) = \\
& = \max_{\{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}} \rho_M(X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot)))
\end{aligned}$$

где $X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))$ — пучок всех программных достижений [3,7,8], порождаемых программой $\{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$ [7,8], $\Theta_{t_*} = \Theta \cap [t_*, \vartheta_0]$.

Подчеркнем, что соответствующие максимумы и минимумы в (2.1) действительно достигаются, что вытекает из слабой компактности в себе программ класса $\{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$, а также из результатов [7]. С учетом леммы 2.1 можно показать, что

$$\varepsilon_0(t_*, x_*) = $$
$$= \sup_{\{v(\cdot)\}} \inf_{\{u(\cdot)\}} \min\nolimits_{\Theta_{t_*}} \min\nolimits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot)), m)$$

где $\{u(\cdot)\}$ и $\{v(\cdot)\}$ — совокупности всех $\sigma_{[t_*, \vartheta]}$-измеримых функций, $\varphi(t, t_*, x_*, u(\cdot), v(\cdot))$ — решение дифференциального уравнения

$$dx/dt = f(t, x, u(t), v(t)), \quad x(t_*) = x_*$$

Заметим, что в выражении для $\varepsilon_0(\cdot)$ множества $\{u(\cdot)\}$ и $\{v(\cdot)\}$ можно также полагать множествами всех кусочно-постоянных вектор-функций со значениями в P и Q соответственно. Величину $\rho_M(X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot)))$, участвующую в (2.1), можно определить также через области достижимости [1] $G(\vartheta, t_*, x_*, \nu(\cdot))$ для программы $\{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$ следующим образом:

$$\rho_M(X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot)) = \min\nolimits_{\Theta_{t_*}} \min\nolimits_{G(\vartheta, t_*, x_*, \nu(\cdot))} \min\nolimits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x, m)$$

Обозначим $\sigma(t_*, x_*)$ — множество всех оптимальных программных управлений второго игрока, доставляющих максимум в (2.1), и $X^\circ(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))$ и $\{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] | t_*, x_*\}_0$ — множества всех оптимальных в пучке $X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))$ программных движений [2,3,7,8] и оптимальных управлений из программы $\{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$ соответственно: для каждого $x^\circ(\cdot) \in X^\circ(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))$

$$\rho_M(X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))) = \min\nolimits_{\Theta_{t_*}} \min\nolimits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, x^\circ(\vartheta), m)$$

Для каждого управления $\eta(\cdot) \in \{H(m(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$ введем множество $\Theta(t_*, x_*, \eta(\cdot))$, всех моментов ϑ°, доставляющих

$$\min\nolimits_{\Theta_{t_*}} \min\nolimits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta(\cdot)), m)$$

Здесь $\varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta(\cdot))$ — программное движение из позиции (t_*, x_*), порожденное управлением $\eta(\cdot)$. Пусть, кроме того

$$\Theta(t_*, x_*, \nu(\cdot)) = \bigcup_{\{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] | t_*, x_*\}_0} \Theta(t_*, x_*, \eta(\cdot))$$
$$\Theta(t_*, x_*) = \bigcup_{\sigma(t_*, x_*)} \Theta(t_*, x_*, \nu(\cdot))$$
$$M^\circ(\eta(\cdot), \vartheta, t_*, x_*) = \{m^\circ : m^\circ \in M_\vartheta, \min\nolimits_{M_\vartheta} \omega(\vartheta,$$
$$\varphi(\vartheta, t_*, x_*, \eta(\cdot)), m) = \omega(\vartheta, \varphi, (\vartheta, t_*, x_*, \eta(\cdot)), m^\circ)\}$$

Тогда для всякой позиции ($\omega_0 < \varepsilon_0(t_*, x_*) < \omega^\circ$) и управления $\nu_0(\cdot) \in \in \Sigma(t_*, x_*)$ обозначим $S_0(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$ множество всех векторов s_0, для которых

$$s_0' = \left[\frac{\partial}{\partial x} \omega(\vartheta^\circ, \varphi(\vartheta^\circ, t_*, x_*, \eta_0(\cdot)), m_0)\right]' S(\vartheta^\circ, t_*, \varphi_0(\cdot), \eta_0(\cdot))$$

где $S(\vartheta, t, \varphi_0(\cdot), \eta_0(\cdot))$ — фундаментальная матрица решений [3,7] для уравнения в вариациях, отвечающая управлению $\eta_0(\cdot)$ и программному движению

$$\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot, t_*, x_*, \eta_0(\cdot))$$
$$\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0, \ \vartheta^\circ \in \Theta(t_*, x_*, \eta_0(\cdot))$$
$$m_0 \in M^\circ(\eta_0(\cdot), \vartheta^\circ, t_*, x_*)$$

Введем также множество

$$S_0(t_*, x_*) = \bigcup_{\Sigma(t_*, x_*)} S_0(t_*, x_*, \nu(\cdot))$$

Оптимальное в программе управление необходимо удовлетворяет следующему условию, которое выражает принцип максимума Л. С. Понтрягина [6] в данной программной задаче.

Теорема 2.1. Пусть $\rho_M(X(\cdot, t_*, x_*, \nu(\cdot))) \in (\omega_0, \omega^\circ)$. Тогда для всякого управления $\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\nu(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$, момента $\vartheta^\circ \in \Theta(t_*, x_*, \eta_0(\cdot))$ и точки $m_0 \in M^\circ(\eta_0(\cdot), \vartheta^\circ, t_*, x_*)$ на всяком множестве $\Delta \in \sigma_{[t_*, \vartheta^\circ]}$ выполняется равенство

$$\int\limits_\Delta\int\limits_P\int\limits_Q s_0'(t) f(t, \varphi_0(t), u, v)\eta_0(dt \times du \times dv) = \int\limits_\Delta\int\limits_Q \min\nolimits_P [s_0'(t) f(t, \varphi_0(t), u, v)]\nu(dt \times dv)$$

Здесь

$$s_0'(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta^\circ, \varphi_0(\vartheta^\circ), m_0)\right]' S(\vartheta^\circ, t, \varphi_0(\cdot), \eta_0(\cdot))$$
$$\varphi_0(t) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta_0(\cdot))$$

Скажем, что управление $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$ регулярно, если оно удовлетворяет следующим условиям:

1) Множество $\Theta(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$ состоит из единственной точки $\vartheta^\circ = \vartheta^\circ(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$.

2) Всякое управление $\eta^{\circ\circ}(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$ совпадает на борелевских подмножествах произведения $[t_*, \vartheta^\circ] \times P \times Q$ с некоторым программным управлением $\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta^\circ]\}$, где $\{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta^\circ]\}$ — программа на отрезке $[t_*, \vartheta^\circ]$, отвечающая управлению $\nu_0(\cdot)$ [7].

3) Множество $M^\circ(\eta_0(\cdot), \vartheta^\circ, t_*, x_*)$ состоит из единственной точки m_0.

Теорема 2.2. Пусть $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (\omega_0, \omega^\circ)$ и управление $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$ регулярно. Тогда всякое управление $\eta^{\circ\circ}(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$, разрешающее (2.1), необходимо удовлетворяет следующему условию максимина:

$$\int\limits_\Delta\int\limits_P\int\limits_Q s_0'(t) f(t, \varphi^{\circ\circ}(t), u, v)\eta^{\circ\circ}(dt \times du \times dv) =$$
$$= \int\limits_\Delta \max\nolimits_Q \min\nolimits_P [s_0'(t) f(t, \varphi^{\circ\circ}(t), u, v)] m(dt)$$

Здесь

$$\varphi^{\circ\circ}(t) = \varphi(t, t_*, x_*, \eta^{\circ\circ}(\cdot))$$
$$s_0'(t) = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\upsilon^\circ, \varphi^{\circ\circ}(\upsilon^\circ), m^{\circ\circ})\right]' S(\vartheta^\circ, t, \varphi^{\circ\circ}(\cdot), \eta^{\circ\circ}(\cdot))$$
$$m^{\circ\circ} \in M^\circ(\eta^{\circ\circ}(\cdot), \vartheta^\circ, t_*, x_*), \qquad \vartheta^\circ = \vartheta^\circ(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$$

(Δ — любое борелевское подмножество отрезка $[t_*, \vartheta^\circ]$).

Доказательство проводится по схеме, аналогичной [7].

Используя свойства программных движений можно показать, что функция $\varepsilon_0(t, x)$ непрерывна справа в каждой позиции (t_*, x_*)

$$t_* \in [t_0, \vartheta_0) \setminus \Theta(t_*, x_*) \tag{2.2}$$

а множества $\Theta(t_*, x_*, \nu(\cdot))$ $(\nu(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\})$ и $\Theta(t_*, x_*)$ замкнуты. Кроме того, множества $\Sigma(t, x)$ слабо полунепрерывны сверху по включению справа в каждой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (2.2).

3. Выполним следующие вспомогательные построения.

Пусть (t, x) и (t_*, x_*) — две позиции $(t \geqslant t_*)$, $\xi(\cdot)$ — вероятность на борелевских подмножествах Q, $\nu^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$, $\nu_\xi^\circ(\cdot)$ образована склеиванием с вероятностью $\xi(\cdot)$, которое заключается в продолжении на полуинтервал $[t_*, t)$ мгновенного управления $\nu_t^\circ(\cdot)$ постоянным управлением $\xi(\cdot)$. В программе $\{\Pi(\nu_\xi^\circ(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$ выберем любое оптимальное для позиции (t_*, x_*) управление $\eta_\xi^\circ(\cdot)$, а в множестве $\Theta(t_*, x_*, \eta_\xi^\circ(\cdot))$ любую точку ϑ_ξ°. Затем из множества $M^\circ(\eta_\xi^\circ(\cdot), \vartheta_\xi^\circ, t_*, x_*)$ выберем любой элемент m_ξ°.

Обозначим $O_\delta(t_*, x_*)$ правую δ-полуокрестность позиции (t_*, x_*): $0 \leqslant t - t_* < \delta$, $\|x - x_*\| < \delta$.

Лемма 3.1. Для любой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0)$ и любого числа $\alpha > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при произвольном выборе позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$, управлений $\nu^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$, $\xi(\cdot)$ и $\eta_\xi^\circ(\cdot) \in \{\Pi(\nu_\xi^\circ(\cdot)), [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$

$$\Theta(t_*, x_*, \eta_\xi^\circ(\cdot)) \subset \Theta^\alpha(t_*, x_*)$$

Доказательство опирается на слабую полунепрерывность сверху по включению множеств $\Sigma(t, x)$.

В силу замкнутости множества $\Theta(t_*, x_*)$ и леммы 3.1 для всякой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0) \setminus \Theta(t_*, x_*)$, существует такое $\delta > 0$, что для всякой позиции из $O_\delta(t_*, x_*)$ при произвольном выборе $\nu^\circ(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\eta_\xi^\circ(\cdot)$ из соответствующих множеств

$$\Theta(t_*, x_*, \eta_\xi^\circ(\cdot)) \subset \Theta_t$$

Ниже полагается, что соседняя позиция (t, x) выбирается из этого условия. Будем обозначать $\bar\eta_\xi^\circ(\cdot)$ управление из $\{\Pi(\nu^\circ(\cdot)), [t, \vartheta_0]\}$, совпадающее на $[t, \vartheta_0] \times P \times Q$ с $\eta_\xi^\circ(\cdot)$. Тогда можно показать, что для всякой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0) \setminus \Theta(t_*, x_*)$, по любому $\alpha > 0$ можно указать $\delta > 0$ такое, что для всякой позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$ при произвольном выборе $\nu^\circ(\cdot)$, $\xi(\cdot)$, $\eta_\xi^\circ(\cdot)$, ϑ_ξ° и m_ξ° из соответствующих множеств

$$|\omega(\vartheta_\xi^\circ, \bar\varphi_\xi^\circ(\vartheta_\xi^\circ), m_\xi^\circ) - \varepsilon_0(t_*, x_*)| < \alpha$$

где

$$\bar\varphi_\xi^\circ(\vartheta_\xi^\circ) = \varphi(\vartheta_\xi^\circ, t, x, \bar\eta_\xi^\circ(\cdot))$$

С учетом этого для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей условию

$$\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (\omega_0, \omega^\circ), \quad t_* \in [t_0, \vartheta_0) \setminus \Theta(t_*, x_*) \tag{3.1}$$

и любой позиции (t, x) из достаточно малой правой δ-полуокрестности (t_*, x_*) при каждом $v^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$ и $\xi(\cdot)$ определим множество $S_*(t, x \mid t_*, x_*, v^\circ(\cdot), \xi(\cdot))$, составленное из всех векторов s таких, что

$$s' = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\vartheta_\xi^\circ, \bar{\varphi}_\xi^\circ(\vartheta_\xi^\circ), m_\xi^\circ)\right]' S(\vartheta_\xi^\circ, t, \bar{\varphi}_\xi^\circ(\cdot), \bar{\eta}_\xi^\circ(\cdot)) \tag{3.2}$$

где

$$\eta_\xi^\circ(\cdot) \in \{\Pi(v_\xi^\circ(\cdot)),\ [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$$
$$\vartheta_\xi^\circ \in \Theta(t_*, x_*, \eta_\xi^\circ(\cdot)),\ m_\xi^\circ \in M^\circ(\eta_\xi^\circ(\cdot), \vartheta_\xi^\circ, t_*, x_*)$$

Лемма 3.2. Для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1) и любого числа $\alpha > 0$, найдется такое $\delta > 0$, что для каждой позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$ для любого управления $v^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$ существует управление $v_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$, для которого

$$\bigcup_{\{\xi(\cdot)\}_Q} S_*(t, x \mid t_*, x_*, v^\circ(\cdot), \xi(\cdot)) = \tag{3.3}$$
$$= S_*(t, x \mid t_*, x_*, v^\circ(\cdot)) \subset S_0^\alpha(t_*, x_*, v_0(\cdot))$$

где S^α — α-окрестность множества S в эвклидовой метрике $\|\cdot\|$, а $\{\xi(\cdot)\}_Q$ — совокупность всех вероятностных мер на Q.

Ниже полагается выполненным следующее условие.

Условие А. Для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1) и любого управления $v_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$, существует вектор $v_0 \in Q$, для которого на всяком векторе $s_0 \in S_0(t_*, x_*, v_0(\cdot))$ выполняется равенство

$$\min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v_0) = \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)$$

Теорема 3.1. Для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), по любому числу $\gamma > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$

$$\varepsilon_0(t, x) - \varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant \max_{S_0(t_*, x_*)} [s'(x - x_*) - \tag{3.4}$$
$$- \max_Q \min_P s' f(t_*, x_*, u, v)(t - t_*)] + \gamma \max(t - t_*, \|x - x_*\|)$$

Доказательство. Пусть (t_*, x_*) удовлетворяет условиям леммы и α — любое положительное число. Положим, что соседняя позиция (t, x) выбрана из такой окрестности (t_*, x_*), что выполняется (3.3) (такая окрестность существует в силу леммы 3.2).

С другой стороны

$$\varepsilon_0(t, x) - \varepsilon_0(t_*, x_*) \leqslant \omega(\vartheta_\xi^\circ, \bar{\varphi}_\xi^\circ(\vartheta_\xi^\circ), m_\xi^\circ) - \omega(\vartheta_\xi^\circ, \varphi_\xi^\circ(\vartheta_\xi^\circ), m_\xi^\circ) \tag{3.5}$$

для любых $v^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$, $\xi(\cdot)$, $\eta_\xi^\circ(\cdot) \in \{\Pi(v_\xi^\circ(\cdot)),\ [t_*, \vartheta_0] \mid t_*, x_*\}_0$, $\vartheta_\xi^\circ \in \Theta(t_*, x_*, \eta_\xi^\circ(\cdot))$ и $m_\xi^\circ \in M^\circ(\eta_\xi^\circ(\cdot), \vartheta_\xi^\circ, t_*, x_*)$. Тогда, выбрав любое управление $v^\circ(\cdot) \in \Sigma(t, x)$, подберем такое управление $v_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$, что будет выполняться (3.3), после чего с учетом условия А выберем такую вероятность $\xi(\cdot)$, что на любом векторе $s_0 \in S_0(t_*, x_*, v_0(\cdot))$ выполняется равенство

$$\int_Q \min_P [s_0' f(t_*, x_*, u, v)]\, \xi(dv) = \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)$$

Указанные $\nu^\circ(\cdot)$ и $\xi(\cdot)$ используем в оценке (3.5). Дальнейший вывод проводится с учетом этой оценки и дифференцируемости по x функции $\omega(\cdot)$ аналогично [8].

4. Пусть W_ε — множество всех позиций (t, x), $t \in [t_0, \vartheta_0]$, для которых $\varepsilon_0(t, x) \leqslant \varepsilon$. Для всякого ε это множество замкнуто.

Скажем, что вероятность $\mu(\cdot)$ на $P \times Q$ согласована с вероятностью $\xi(\cdot)$ на Q, если для каждого борелевского множества $B \subset Q$ $\mu(P \times B) = \xi(B)$. (Под вероятностью мы понимаем нормированную меру на σ-алгебре борелевских подмножеств соответствующего пространства.)

Условие Б. Для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), и любой вероятности $\xi(\cdot)$ на Q существует такая согласованная с $\xi(\cdot)$ вероятность $\mu(\cdot)$ на $P \times Q$, что равномерно по $s_0 \in S_0(t_*, x_*)$

$$s_0' \int_P \int_Q f(t_*, x_*, u, v)\,\mu(du \times dv) \leqslant \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)$$

Аналогично [8] с учетом теоремы 3.1 доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполнены условия А, Б. Тогда для всякого $\varepsilon \in [\omega_0, \omega^\circ)$ множества W_ε u-стабильны: для всякой позиции $(t_*, x_*) \in W_\varepsilon$, вероятности $\xi(\cdot)$ на Q и момента $t^* \in [t_*, \vartheta_0]$ в семействе всевозможных программных движений на $[t_*, t^*]$, порожденных управлениями из программы $\{\Pi(\nu^{(\xi)}(\cdot)), [t_*, t^*]\}$ найдется либо движение $\varphi^\circ(t)$, для которого

$$\min_{\Theta \cap [t_*, t^*]} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi^\circ(\vartheta), m) \leqslant \varepsilon$$

либо движение $\varphi_0(t)$, для которого позиция $(t, \varphi_0(t)) \in W_\varepsilon$ при всех $t \in [t_*, t^*]$. Здесь $\nu^{(\xi)}(\cdot)$ такое управление из класса $\{E(m(\cdot)), [t_*, t^*]\}$ [8], что отвечающее ему мгновенное управление $\nu_t^{(\xi)}(\cdot)$ — вероятность $\xi(\cdot)$ для почти всех $t \in [t_*, t^*]$.

Для получения необходимых условий u-стабильности множеств W_ε $(\varepsilon \in [\omega_0, \omega^\circ))$ выполним следующие вспомогательные построения. Пусть снова (t_*, x_*) и (t, x) таковы, что $t_* \in [t_0, \vartheta_0)$ и $t \geqslant t_*$. Пусть, далее, $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$, $\bar\nu_0(\cdot) \in \{E(m(\cdot)), [t, \vartheta_0]\}$ и на $[t, \vartheta_0] \times Q$ совпадает с $\nu_0(\cdot)$

$$\bar\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\bar\nu_0(\cdot)), [t, \vartheta_0] \mid t, x\}_0$$
$$\bar\vartheta^\circ \in \Theta(t, x, \bar\eta_0(\cdot)), \quad \bar m_0 \in M^\circ(\bar\eta_0(\cdot), \bar\vartheta^\circ, t, x)$$
$$\eta_0(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_*, \vartheta_0]\}$$

причем на борелевских подмножествах $[t, \vartheta_0] \times P \times Q$ значения мер $\eta_0(\cdot)$ и $\bar\eta_0(\cdot)$ совпадают. Тогда

$$\varepsilon_0(t, x) - \varepsilon_0(t_*, x_*) \geqslant \omega(\bar\vartheta^\circ, \bar\varphi_0(\bar\vartheta^\circ), \bar m_0) - \omega(\bar\vartheta^\circ, \varphi_0(\bar\vartheta^\circ), \bar m_0) \tag{4.1}$$
$$\bar\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot, t_*, x_*, \bar\eta_0(\cdot)), \qquad \bar\varphi_0(\cdot) = \varphi(\cdot, t, x, \eta_0(\cdot))$$

Можно показать, что для всякой позиции (t_*, x_*), $t_* \in [t_0, \vartheta_0) \setminus \Theta(t_*, x_*)$, по любому $\alpha > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для любой соседней позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$ при произвольном выборе $\nu_0(\cdot)$, $\bar\eta_0(\cdot)$, $\bar\vartheta^\circ$ и $\bar m_0$ из соответствующих множеств

$$|\,\omega(\bar{\vartheta}^\circ, \bar{\varphi}_0(\bar{\vartheta}^\circ), \bar{m}_0) - \varepsilon_0(t_*, x_*)\,| < \alpha$$

Поэтому для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), и любой соседней позиции (t, x) из достаточно малой правой δ-полуокрестности (t_*, x_*) для каждого управления $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$ можно определить множества $S^*(t, x \mid t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$ всех векторов s

$$s' = \left[\frac{\partial}{\partial x}\omega(\bar{\vartheta}^\circ, \bar{\varphi}_0(\bar{\vartheta}^\circ), \bar{m}_0)\right]' S(\bar{\vartheta}^\circ, t, \bar{\varphi}_0(\cdot), \bar{\eta}_0(\cdot))$$

Лемма 4.1. Для любой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), любого управления $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$ для всякого $\alpha > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для каждой позиции $(t, x) \in O_\delta(t_*, x_*)$

$$S^*(t, x \mid t_*, x_*, \nu_0(\cdot)) \subset S_0^\alpha(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$$

Теорема 4.2. Пусть для всякого $\varepsilon \in [\omega_0, \omega^\circ)$ множество W_ε u-стабильно. Тогда для каждой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), и любой вероятности $\xi(\cdot)$ на Q существует такая вероятность $\mu(\cdot)$ на $P \times Q$, согласованная с $\xi(\cdot)$, что для каждого управления $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$

$$\min_{S_0(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))}\Big[s_0' \int_P\int_Q f(t_*, x_*, u, v) \times \tag{4.2}$$
$$\times\, \mu(du \times dv) - \max_Q \min_P s_0' f(t_*, x_*, u, v)\Big] \leqslant 0$$

Схема доказательства. Для всякой позиции, удовлетворяющей условиям леммы, существует момент $\tau^* > t_*$ такой, что при всякой наперед выбранной вероятности $\xi(\cdot)$ для любого программного движения $\varphi(t, t_*, x_*, \eta(\cdot))$, для которого $\eta_t(P \times B) = \xi(B)$ для любых борелевских подмножеств Q, выполняется неравенство

$$\min_{\Theta \cap [t_*, \tau^*]} \min_{M_\vartheta} \omega(\vartheta, \varphi, \vartheta(\vartheta, t_*, x_*, \eta(\cdot)), m) > \varepsilon_0(t_*, x_*)$$

По определению u-стабильности приходим к выводу, что для каждой вероятности $\xi(\cdot)$ должно существовать такое управление $\eta^*(\cdot)$, согласованное с $\xi(\cdot)$, что

$$\varepsilon_0(t, \varphi(t, t_*, x_*, \eta^*(\cdot))) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*) \quad \text{при всех } t \in [t_*, \tau^*]$$

Предположим, что теорема неверна. Тогда, с учетом сказанного выше, в позиции (t_*, x_*), где (4.2) нарушено для некоторых $\xi(\cdot)$ и $\nu_0(\cdot)$, для некоторой последовательности $\{\tau_n\}$, сходящейся к t_* справа ($\tau_n > t_*$), можно использовать оценку (4.1) как раз при том управлении $\nu_0(\cdot)$, на котором условие (4.2) при наперед выбранном $\xi(\cdot)$ нарушается. Но тогда, с учетом дифференцируемости по x функции $\omega(\cdot)$ и леммы 4.1, для достаточно больших n получим

$$\varepsilon_0(\tau_n, x_n) > \varepsilon_0(t_*, x_*), \qquad x_n = \varphi(\tau_n, t_*, x_*, \eta^*(\cdot))$$

Следствие. Пусть для всякой позиции (t_*, x_*), удовлетворяющей (3.1), при каждом управлении $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_*, x_*)$ множество $S_0(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$ состоит из единственного вектора $s_0 = s_0(t_*, x_*, \nu_0(\cdot))$. Тогда условие Б необходимо и достаточно для того, чтобы при всяком $\varepsilon \in [\omega_0, \omega^\circ)$ множества W_ε были u-стабильными.

5. Пусть U^e — стратегия, экстремальная [2] к множеству W_ε, а U_v^e — контрстратегия [8], экстремальная к тому же множеству.

Теорема 5.1. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0(t_0, x_0) \in [\omega_0, \omega^\circ)$ и выполнены условия А, Б. Тогда при условии существования в маленькой игре [2] седловой точки по (u, v) стратегия $U^\circ = U^e$, экстремальная к множеству W_ε, разрешает задачу 1, гарантируя выполнение (1.1).

Теорема 5.2. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0(t_0, x_0) \in [\omega_0, \omega^\circ)$ и выполнены условия А, Б. Тогда контрстратегия $U_v{}^\circ = U_v{}^e$, экстремальная к множеству W_ε, разрешает задачу 1, гарантируя при этом выполнение (1.2).

Для управления $\nu_0(\cdot) \in \Sigma(t_0, x_0)$ образуем множество $W(\nu_0(\cdot))$ всех позиций (t, w)

$$w = \varphi(t, t_0, x_0, \eta(\cdot)), \qquad \eta(\cdot) \in \{\Pi(\nu_0(\cdot)), [t_0, \vartheta_0]\}$$

Пусть V^e — стратегия второго игрока [8], экстремальная [2] к множеству $W(\nu_0(\cdot))$.

Теорема 5.3. Стратегия V^e обеспечивает решение задачи 3 при любом $\varepsilon \leqslant \varepsilon_0(t_0, x_0)$.

Схема доказательства. Пусть $x_{\Delta^{(i)}}[t]$ — ломаная Эйлера, отвечающая стратегии V^e, и $\tau_k{}^{(i)} = t_*$ — узел разбиения $\Delta^{(i)}$, причем

$$x_* = x_{\Delta^{(i)}}[t_*] \overline{\in} W_{t_*}(\nu_0(\cdot))$$

$$W_{t_*}(\nu_0(\cdot)) = \{w: (t_*, w) \in W(\nu_0(\cdot))\}$$

Пусть, кроме того, $v^e = v[t_*]$, $u[t]$ — управления, реализующие данную ломаную Эйлера, s — вектор $w^\circ - x_*$, где w° — ближайшая к x_* в евклидовой метрике точка множества $W_{t_*}(\nu_0(\cdot))$, причем

$$\min_P s'f(t_*, x_*, u, v^e) = \max_Q \min_R s'f(t_*, x_*, u, v)$$

Тогда в программе $\{\Pi(\nu_0(\cdot)), [\tau_k{}^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)}]\}$ найдется управление $\eta^*(\cdot)$ такое, что при всяком $t \in [\tau_k{}^{(i)}, \tau_{k+1}^{(i)}]$

$$s' \int_{t_*}^{t} \int_P \int_Q f(t_*, x_*, u, v)\, \eta^*(d\tau \times du \times dv) =$$
$$= \int_{t_*}^{t} \int_Q \min_P [s'f(t_*, x_*, u, v)]\, \nu_0(d\tau \times dv)$$

Отсюда с учетом неравенства

$$s' \int_{t_*}^{t} f(t_*, x_*, u[\tau], v^e)\, m(d\tau) \geqslant \int_{t_*}^{t} \max_Q \min_P [s'f(t_*, x_*, u, v)]\, m(d\tau) \geqslant$$
$$\geqslant \int_{t_*}^{t} \int_Q \min_P [s'f(t_*, x_*, u, v)]\, \nu_0(d\tau \times dv)$$

выводится локальная оценка, аналогичная используемой в работе [4]. Из этой оценки аналогично [4] выводятся барьерные свойства стратегии V^e.

Теорема 5.4. Пусть $\varepsilon = \varepsilon_0(t_0, x_0) \in [\omega_0, \omega^\circ)$ и выполнены условия А, Б и седловой точки маленькой игры. Тогда пара стратегий $(U^\circ = U^e,$ $V^p = V^e)$ разрешает задачу 2. При этом $\varepsilon = \varepsilon_0(t_0, x_0)$ является ценой игры в чистых стратегиях.

Задачи 1—3 допускают наглядное геометрическое представление в случае, когда M — замкнутое подмножество $\Theta \times R^n$, а $\omega(\vartheta, x, m) = \|x - m\|$. Возможная некомпактность M здесь несущественна, так как задача сводится к задаче сближения — уклонения с некоторым компактным подмножеством M.

Автор приносит благодарность Н. Н. Красовскому за постоянное внимание к работе.

Поступила 22 II 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Игровые задачи о встрече движений. М., «Наука», 1970.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I, II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2—3.
3. *Батухтин В. Д., Красовский Н. Н.* Задача программного управления на максимин. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1972, № 6.
4. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
5. *Пшеничный Б. Н.* Структура дифференциальных игр. В сб.: Теория оптимальных решений, вып. 1. Киев, 1968.
6. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
7. *Ченцов А. Г.* Об игровой задаче программного управления. Докл. АН СССР 1973, т. 213, № 2.
8. *Ченцов А. Г.* Об игровых задачах сближения — уклонения. ПММ, 1974, т. 38 вып. 2.