УДК 517.564:539.3

О ЛОГАРИФМИЧЕСКИХ ПРОИЗВОДНЫХ ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЛЕЖАНДРА ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОМПЛЕКСНОЙ СТЕПЕНИ

А. Д. Лизарев, Н. Б. Ростанина

(Гомель)

При решении некоторых задач теории колебаний сферических оболочек удобней вычислять не сами присоединенные функции Лежандра $P_n^m(\cos\theta)$ и их производные, а логарифмические производные

$$F_n^m(\cos\theta) = \frac{d}{d\theta}[\ln P_n^m(\cos\theta)] = \frac{d}{d\theta} P_n^m(\cos\theta) \,/\, P_n^m(\cos\theta)$$

Рассмотрим случай $\theta = \pi/2$, когда точное вычисление логарифмической производной $P_n^m(\cos\theta)$, где $n = u + i\tau$ — произвольное комплексное число, возможно без применения гипергеометрических рядов. Воспользовавшись известными выражениями для функции $P_n^m(0)$ и ее первой производной через гамма-функции [1], получим

$$F_n^m(0) = -2\frac{\Gamma(1+l_+)\,\Gamma(1+l_-)}{\Gamma(1/2+l_+)\,\Gamma(1/2+l_-)}\operatorname{tg}(l_+\pi), \quad l_\pm = \frac{n\pm m}{2} \tag{1}$$

В дальнейшем следует различать случаи, когда порядок m функции $P_n^m(0)$ является нечетным или четным. Многократно применим к каждой из гамма-функций в выражении (1) рекуррентную формулу $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$ и учтем, что [2]

$$(1-n)\left(1+\frac{n}{2}\right)\left(1-\frac{n}{3}\right)\left(1+\frac{n}{4}\right)\ldots = \sqrt{\pi}\left[\Gamma\left(1+\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}-\frac{n}{2}\right)\right]^{-1}$$

После ряда преобразований найдем окончательные выражения логарифмических производных $P_n^m(0)$

$$F_n^m(0) = \prod_{s=1,3,5,\ldots}^{m} A_s \prod_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_k \Big/ \prod_{k=2,4,6,\ldots}^{\infty} B_k \quad (\text{нечетные } m) \tag{2}$$

$$F_n^m(0) = -p \prod_{s=2,4,6,\ldots}^{m} A_s \prod_{k=2,4,6,\ldots}^{\infty} B_k \Big/ \prod_{k=1,3,5,\ldots}^{\infty} B_k \quad (\text{четные } m)$$

$$A_s = \frac{p - s(s-1)}{p-(s-1)(s-2)}, \quad B_k = 1 - \frac{p}{k(k+1)}, \quad p = n(n+1)$$

При одинаковых степенях n и различных порядках m функции $F_n^m(0)$ могут быть вычислены по рекуррентным формулам

$$F_n^{m+1}(0) = [m(m+1) - p] \,/\, F_n^m(0), \qquad F_n^{m+2}(0) = A_{m+2}F_n^m(0)$$

При выводе асимптотического выражения $F_n^m(\cos\theta)$ для больших значений τ и любого угла θ воспользуемся тригонометрическим разложением присоединенных функций Лежандра [1]. Полагая, что величина τ настолько велика, что $\operatorname{sh}\tau\theta \approx \operatorname{ch}\tau\theta \approx e^{\tau\theta/2}$, получим асимптотические формулы (α, β, φ_0 — действительные)

$$P_n^m(\cos\theta) \approx \frac{\exp(\tau\theta+\alpha)}{\sqrt{2\pi\sin\theta}}[\cos(\varphi_0-\beta) - i\sin(\varphi_0-\beta)] \tag{3}$$

$$\alpha + i\beta = \ln[\Gamma(n+m+1) \,/\, \Gamma(n+3/2)]$$

$$\varphi_0 = \left(u+\frac{1}{2}\right)\theta + \left(m-\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2}, \quad u = \operatorname{Re} n$$

Из формул (3) следует, что

$$F_n{}^m (\cos\theta) \approx \tau - {}^1/_2 \operatorname{ctg}\theta - i\,(u + {}^1/_2)$$

Таким образом, при больших τ логарифмические производные присоединенных функций Лежандра практически не зависят от порядков m.

Поступила 3 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. Гипергеометрическая функция. Функции Лежандра. М., «Наука», 1965.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 25/III-1974 г. Т-07868 Подписано к печати 24/V-1974 г. Тираж 2890 экз.
Зак. 332 Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 15,8

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10