ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
2. *Рейсснер Э.* Некоторые проблемы теории оболочек. В сб.: Упругие оболочки. М., Изд-во иностр. лит. 1962.
3. *Ровин Л. А., Гордон Л. А.* Общие уравнения теории оболочек Рейсснера при произвольной нагрузке. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1969, т. 90.
4. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inèquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
5. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, вып. 1.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек, ч. I. ЛГУ, 1962.
7. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
8. *Шереметьев М. П., Лунь Е. И.* Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Тр. IV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Изд-во АН АрмССР, 1964.

УДК 531.36

КРИТЕРИИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ФОРМ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

А. Н. Вейссенберг

(Ярославль)

Формулируются необходимые и достаточные условия знакоопределенности форм высшего порядка, полученные на основании соответствующей теоремы Вейерштрасса и метода неопределенных множителей Лагранжа. Указывается алгоритм покрытия некоторого многообразия, позволяющий выявить знакоопределенность формы. Алгоритм предполагает использование ЭВМ.

При изучении устойчивости движения возникает необходимость выявления знакоопределенности форм высшего порядка [1,2]. В точках бифуркации гессиан потенциальной энергии обращается в нуль, и изолированный минимум потенциальной энергии в принципе не может быть установлен по членам низшего порядка. Подобный случай упоминается и в работе [3]. Известно, что общих эффективных критериев знакоопределенности форм высшего порядка не существует [4,5].

1. Пусть E_m — вещественное m-мерное пространство и $V(x)$ — однородная форма степени $2n$ (коэффициенты $a_{i_1 \ldots i_m}$ вещественны)

$$V(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_m=2n} a_{i_1 \ldots i_m} (x^1)^{i_1} \ldots (x^m)^{i_m}$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием определенной положительности формы $V(x)$ является ее положительность на всех вещественных решениях нелинейной системы уравнений ($a \neq 0$ — вещественное число)

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x^j} - 2\frac{n}{a^2} V(x)\, x^j = 0, \quad x'x = a^2 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $V(x)$ положительна на всех вещественных решениях системы уравнений (1.1). Тогда эта форма положительна на элементе x_*, минимизирующем ее на многообразии $K = \{x : x'x = a^2\}$. Действительно, вещественный элемент x_* существует на основании теоремы Вейерштрасса в силу непрерывности функции $V(x)$, ограниченности и замкнутости многообразия K. С другой стороны, x_* вместе со специально подобранным скаляром λ удовлетворяет системе уравнений

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x^j} + 2\lambda x^j = 0, \quad x'x = a^2 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.2}$$

к которой приводит метод неопределенных множителей Лагранжа нахождения необходимых условий условного экстремума. Умножая j-е уравнение системы (1.2) на x^j и складывая эти уравнения, с учетом формулы Эйлера для однородных форм получим $\lambda = - nV(x) / a^2$. Поэтому элемент x_* необходимо является решением системы уравнений (1.1).

Таким образом, из положительности формы $V(x)$ на всех вещественных решениях системы уравнений (1.1) следует

$$V(x_*) = \min_{x \in K} V(x) > 0$$

Для всякого $x \in E_m$ всегда можно подобрать такой скаляр $\xi \neq 0$, что $\xi x \in K$. Но $V(\xi x) \geqslant V(x_*)$. Поэтому $V(x) = V(\xi x) / \xi^{2n} > 0$, что и требовалось доказать.

Если $V(x) = x'Ax$ (A — постоянная симметрическая матрица) и $a = 1$, то система уравнений (1.1) принимает вид

$$Ax - (x'Ax)x = 0, \quad x'x = 1$$

Эта система не имеет других решений, кроме нормированных собственных векторов h_j матрицы A, отвечающих собственным числам $\varkappa_j$ этой матрицы, причем $V(h_j) = h_j'Ah_j = \varkappa_j$. Применение теоремы 1 для квадратичной формы приводит к известному факту: необходимое и достаточное условие определенной положительности квадратичной формы состоит в положительности всех собственных чисел матрицы A.

В общем случае для нахождения множества D всех вещественных решений системы уравнений (1.1) полезен следующий прием. Рассматриваются подмножества D_0, D_1 всех вещественных решений этой системы, для которых соответственно $x^1 = 0$ и $x^1 \neq 0$; $D = D_0 \cup D_1$. Положив в (1.1) $x^1 = 0$, получаем более простые уравнения для отыскания D_0. Нахождение D_1 сводится к разрешению уравнений

$$x^j \frac{\partial V(x)}{\partial x^1} = x^1 \frac{\partial V(x)}{\partial x^j} \quad (j = 2, \ldots, m) \tag{1.3}$$

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x^1} = 2nx^1 \frac{V(x)}{a^2}, \quad x'x = a^2$$

После замены переменных $x^j = k^j x^1$ ($j = 2, \ldots, m$) первые $m - 1$ уравнения оказываются не зависящими от x^1 и могут рассматриваться отдельно. Полезность сформулированного подхода можно продемонстрировать на примере формы четвертой степени, зависящей от двух переменных. Нетрудно убедиться, что фактически задача о выявлении знакоопределенности сведется к нахождению корней одного алгебраического уравнения четвертой степени. Следует отметить возможность расщепления множества D на подмножества D_0, D_s, для которых $x^s = 0$ и $x^s \neq 0$ (s — любое из чисел $1, \ldots, m$).

Другой подход для нахождения D опирается на численные методы. Теоретическим обоснованием его служит следующее простое соображение. Положительность формы $V(x)$ в некоторой точке x_1 свидетельствует о ее положительности в некоторой окрестности x_1. Если элементы множества D вычислены достаточно точно, то положительность формы $V(x)$ на приближениях решений системы (1.1) свидетельствует о положительности этой формы на решениях систем уравнений (1.1). Соответствующая оценка окрестности точки x_1 дается ниже.

Сформулированный в теореме 1 критерий знакоопределенности можно применить для исследования более сложных по сравнению с однородными формами функций, для которых положительность на многообразии K гарантирует их определенную положительность. Простейший подобный подкласс функций образован суммами знакоположительных однородных форм. Действительно, если

$$V(x) = \sum_{s=0}^{p} V_{2(n+s)}(x)$$

(p — целое положительное число и $V_{2(n+s)}(x)$ — однородная форма степени $2(n+s)$), то для всякого $x \in E_m$ найдутся скаляр $\xi \neq 0$ и целое число q такие, что

$$\xi x \in K, \quad V(x) \geqslant V_{2(n+q)}(x) = V_{2(n+q)}(\xi x) / \xi^{2(n+q)} > 0$$

При этом система уравнений, аналогичная системе (1.1), несколько усложнится.

2. В пространстве E_m введем норму $|x| = \max\limits_{1 \leqslant s \leqslant m} |x^s|$ и рассмотрим многообразие $K = \{x : |x| = a^2\}$.

Рассмотрим следующий алгоритм для выявления положительности однородной формы на многообразии K. Пусть $x_1 \in K$ и $V(x_1) > 0$. Запишем соотношение

$$V(x_1 + \Delta x) - V(x_1) = \sum_{i=1}^{2n} d^i \frac{V(x_1)}{i!} \tag{2.1}$$

где

$$d^i V(x_1) = \left[\left(\frac{\partial}{\partial x^1} dx^1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x^m} dx^m\right)^i V(x)\right]\Bigg|_{x_1} \tag{2.2}$$

Справа в соотношении (2.2) стоит дифференциальный оператор, полученный формальным возведением в степень выражения в круглых скобках. Фигурирующие при этом в разных степенях дифференциалы в точности равны приращениям Δx^j. Дифференциал $d^i V(x_1)$ есть форма степени i относительно $dx^1, \ldots, dx^m$, коэффициенты которой — i-е частные производные от $V(x)$, умноженных на «полиномиальные» постоянные.

Имеет место оценка

$$|d^i V(x_1) / i!| \leqslant b_i |\Delta x|^i \quad (i = 1, \ldots, 2n)$$

где в качестве b_i может быть взят поделенный на $i!$ наибольший модуль коэффициентов формы $d^i V(x_1)$. Ясно, что

$$|V(x_1 + \Delta x) - V(x_1)| \leqslant \sum_{i=1}^{2n} b_i |\Delta x|^i$$

Пусть ξ_1 — корень уравнения

$$F(\xi, V(x_1)) = \sum_{i=1}^{2n} b_i \xi^i - V(x_1) = 0 \tag{2.3}$$

Тогда, если $x \in H_1 = \{x : |x - x_1| < \xi_1\}$, то $V(x) > 0$.

Введем обозначение $S_1 = K \cap H_1$ и $\bar{S}_1$ — замыкание множества S_1. Выберем такой элемент из E_m, что $x_2 \in K$ и $x_2 \in \bar{S}_1 \setminus S_1$. Пусть $V(x_2) > 0$. Найдем корень ξ_2 уравнения $F(\xi, V(x_2)) = 0$ и окрестность $H_2 = \{x : |x - x_2| < \xi_2\}$.

Рассмотрим множество $S_2 = K \cap (H_1 \cup H_2)$ и его замыкание $\bar{S}_2$. Для $x_3 \in K$ и $x_3 \in \bar{S}_2 \setminus S_2$ построим множества H_3, $S_3 = K \cap (H_1 \cup H_2 \cup H_3)$ и так далее.

Определение. Многообразие K называется покрываемым, если существует такое конечное число N, что $\bar{S}_N \cap K = K$.

Теорема 2. Необходимое и достаточное условие определенной положительности формы $V(x)$ состоит в покрываемости многообразия K.

Доказательство. Необходимость. Из определенной положительности $V(x)$ следует существование такого числа ε, что $\min_{x \in K} V(x) \geqslant \varepsilon > 0$.

Уравнение $F(\xi, \varepsilon) = 0$ на полуинтервале $[0, \infty)$ имеет единственный корень. Действительно, предположим противное: $\xi' \neq \xi$, и эти числа — корни уравнения.

Тогда

$$F(\xi', \varepsilon) - F(\xi, \varepsilon) = \sum_{i=1}^{2n} b_i [(\xi')^i - \xi^i]$$

а это невозможно, так как слева стоит нуль, а выражение справа строго положительно либо строго отрицательно. Далее ясно, что корень уравнения $F(\xi, \varepsilon) = 0$ монотонно возрастает с ростом ε. Но функция $V(x)$ ограничена на K снизу. Поэтому и корень $\xi(x)$ уравнения $F(\xi, V(x)) = 0$ ограничен снизу некоторым числом $\delta > 0$, зависящим от ε, т. е. $\xi_{x \in K}(x) \geqslant \delta > 0$. Следовательно, при реализации алгоритма покрытия для всех i окажется $\xi_i \geqslant \delta$ $(i = 1, 2, \ldots)$.

Предположим теперь, что не существует такого конечного числа N, что $\bar{S}_N \cap K = K$ и процесс бесконечен. Тогда на многообразии K имеется бесконечная расходящаяся последовательность $\{x_i \in K\}$, поскольку каждый ее элемент отстоит от всех других на расстоянии, большем или равном δ. Но многообразие K — компактное подмножество полного метрического пространства [6]. Поэтому из последовательности $\{x_i\}$ можно выбрать сходящуюся подпоследовательность. Противоречие свидетельствует, что в результате реализации алгоритма многообразие K будет покрыто конечным числом шаров, и найдется такое конечное число N, что $\bar{S}_N \cap K = K$.

Достаточность. Если многообразие K покрываемо, то $V_{x \in K}(x) > 0$. В силу однородности формы это означает ее определенную положительность, следовательно, теорема 2 доказана.

Использование алгоритма покрытия многообразия K целесообразно для изучения знакоопределенности форм при численном задании их коэффициентов. Имея в виду весьма хорошие аналитические свойства форм, можно предложить и другие алгоритмы для выявления положительности форм на многообразии K. Выберем конечное множество U всех узлов решетки, равномерно нанесенной на грани m-мерного куба $|x| \leqslant a^2$. Ясно, что $U \subset K$. Пусть длина стороны наименьшей ячейки на грани куба выбрана равной a^2 / ν (ν — целое число). Если ν достаточно велико, то положительность $V(x)$ на U свидетельствует о положительности $V(x)$ на K. Следовательно, задача сводится к вычислению значений функции $V(x)$ в конечном числе точек.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные замечания при обсуждении результатов.

Поступила 7 VIII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ляпунов А. М.* Общая задача об устойчивости движения. М. — Л., Гостехиздат, 1950.
2. *Румянцев В. В.* Об устойчивости стационарных движений спутников. М., ВЦ АН СССР, 1967.
3. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.
4. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. М., «Наука», 1966.
5. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
6. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М., «Наука», 1968.