УДК 539.3

О ТЕОРЕМАХ СУЩЕСТВОВАНИЯ В ЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ ОБОЛОЧЕК

Б. А. Шойхет

(Ленинград)

Доказывается обобщение неравенства Корна, позволяющее свести доказательство разрешимости задачи минимизации полной энергии оболочки на некотором классе допустимых смещений к проверке некоторого алгебраического условия, которому должны удовлетворять деформации, и к доказательству теоремы единственности решения (или к проверке условий равновесия). По указанной схеме доказываются теоремы существования в теории оболочек В. В. Новожилова — К. И. Болабуха [1], и в теории Рейсснера [2, 3].

1. Пусть Ω — область переменных $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_m)$ — вектор-функция, будем говорить, что $\mathbf{u} \in W_2^1(\Omega)$, если $u_i \in W_2^1(\Omega)$, $i = 1, \ldots, m$.

Пусть заданы линейные дифференциальные операторы первого порядка с переменными коэффициентами

$$\varepsilon_i^\circ(\mathbf{u}) = a_i^{jk} u_{j,k}, \qquad i = 1, \ldots, N \qquad (f_{,i} \equiv \partial f / \partial x_i)$$

$$\varepsilon_i(\mathbf{u}) = \varepsilon_i^\circ(\mathbf{u}) + b_i^j u_j, \qquad i = 1, \ldots, N$$

Поставим вопрос: при каких условиях на операторы $\varepsilon_i(\mathbf{u})$ для любой вектор-функции $\mathbf{u} \in W_2^1(\Omega)$ справедливо неравенство, обобщающее неравенство Корна [4, 5] (библиографию см. в [5])

$$\|\mathbf{u}\|_{W^1_2(\Omega)} \leqslant c_1 \left(\sum_{i=1}^{N} \|\varepsilon_i(\mathbf{u})\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)} \right)^{1/2} \tag{1.1}$$

Теорема 1. Пусть Ω такова, что ее замыкание Ω^c гомеоморфно отображается на некоторый куб или шар с помощью отображения $T(\mathbf{x})$ класса $C^3(\Omega^c)$, такого, что якобиан $|T'|$ ограничен снизу положительной постоянной c_T. Пусть $a_i^{jk} \in C^2(\Omega^c)$, $b_i^j \in C(\Omega^c)$. Образуя всевозможные первые производные от операторов $\varepsilon_i^\circ(\mathbf{u})$ и выделив члены, содержащие вторые производные от функций u_j, получим дифференциальные выражения

$$\varepsilon_{ip} \equiv a_i^{jk} u_{j,kp}, \qquad f_{,ij} \equiv \partial^2 f / \partial x_i \partial x_j$$

Для справедливости (1.1) достаточно, чтобы выполнялось следующее алгебраическое условие: найдутся функции $M_{lts}^{ip} \in C^1(\Omega^c)$ такие, что имеют место тождества

$$u_{l,ts} = M_{lts}^{ip} \varepsilon_{ip}(\mathbf{u}) \equiv M_{lts}^{ip} a_i^{jk} u_{j,kp} \tag{1.2}$$

Другими словами, любую вторую производную от функций u_j можно выразить через линейную комбинацию дифференциальных выражений $\varepsilon_{ip}(\mathbf{u})$. Константа c_1 в (1.1) зависит от норм функций a_i^{jk}, M_{lts}^{ip}, b_i^j соответственно в $C^2(\Omega^c)$, $C^1(\Omega^c)$, $C(\Omega^c)$, нормы отображения T в $C^3(\Omega^c)$, константы c_T и размеров Ω (с уменьшением размеров c_1 возрастает).

Из теоремы 1, очевидно, следует утверждение.

Теорема 2. Пусть область Ω такова, что ее замыкание

$$\Omega^c = \Omega_1^c \cup \ldots \cup \Omega_k^c, \qquad \Omega_i \cap \Omega_j = \Lambda, \qquad i \neq j.$$

и для каждой области Ω_i выполнены условия теоремы 1. Тогда имеет место неравенство (1.1), причем константа c_1 в (1.1) равна максимальной из констант для областей Ω_i.

Доказательство теоремы 1. Введем обозначения: $D(\Omega)$ — пространство основных функций, $D'(\Omega)$ — пространство распределений, $W_2^{1,0}(\Omega)$ — пространство функций, принадлежащих $W_2^1(\Omega)$ и равных нулю на границе Ω, $W^{-1}(\Omega)$ — двойственное к $W_2^{1,0}(\Omega)$ пространство, $W^{-1}(\Omega) \subset D'(\Omega)$. Если $f \in D'(\Omega)$, $\varphi \in D(\Omega)$, то значение f на функции φ обозначим через $(f, \varphi)_\Omega$.

Введем гильбертово пространство $Y(\Omega)$, состоящее из распределений $f \in W^{-1}(\Omega)$ таких, что $f_{,i} \in W^{-1}(\Omega)$, $i = 1, \ldots, n$, и положим

$$\|f\|_{Y(\Omega)} \equiv \left(\|f\|^2_{W^{-1}(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \|f_{,i}\|^2_{W^{-1}(\Omega)}\right)^{1/2} \tag{1.3}$$

Лемма 1. $L_2(\Omega)$ непрерывно вложено в $W^{-1}(\Omega)$ и в $Y(\Omega)$, причем

$$\|f_{,i}\|_{W^{-1}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}, \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$\|f\|_{W^{-1}(\Omega)} \leqslant \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|f\|_{Y(\Omega)} \leqslant c_2 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad c_2 = n + 1$$

Лемма 2 (основная). Пространство $Y(\Omega)$ непрерывно вложено в $L_2(\Omega)$, т. е. если распределение $f \in Y(\Omega)$, то $f \in L_2(\Omega)$, и

$$\|f\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_3 \|f\|_{Y(\Omega)} \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть T — отображение, переводящее Ω в куб (или шар) G. Построим отображение P из $Y(\Omega)$ в $Y(G)$

$$(Pf, \varphi)_G \equiv (f, \varphi T)_\Omega$$

(φT — суперпозиция φ и T). Можно проверить, что P есть линейный гомеоморфизм между $Y(\Omega)$ и $Y(G)$, причем

$$\|Pf\|_{Y(G)} \leqslant c_4 \|f\|_{Y(\Omega)}, \quad \|P^{-1}g\|_{Y(\Omega)} \leqslant c_4 \|g\|_{Y(G)} \tag{1.5}$$

где c_4 зависит от нормы T в $C^3(\Omega^c)$ и константы c_T. Можно проверить, что P есть также линейный гомеоморфизм между $L_2(\Omega)$ и $L_2(G)$, причем если $f \in L_2(\Omega)$, $g \in L_2(G)$, то

$$\|Pf\|_{L_2(G)} \leqslant c_5 \|f\|_{L_2(\Omega)}, \quad \|P^{-1}g\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_5 \|g\|_{L_2(G)} \tag{1.6}$$

где c_5 зависит от нормы T в $C^1(\Omega^c)$ и константы c_T.

Для произвольной области с гладкой границей (а следовательно, и для шара G) лемма 2 доказана в [4]. Небольшое дополнение позволяет доказать лемму 2 для куба G, т. е. если $g \in Y(G)$, то $g \in L_2(G)$, и $\|g\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c_6 \|g\|_{Y(G)}$, тогда из (1.5), (1.6) следует (1.4) с константой $c_3 = c_4 c_5 c_6$.

По условию (1.2)

$$u_{l,ts} = M^{ip}_{lts} \varepsilon_{ip}(\mathbf{u}) \equiv M^{ip}_{lts} [\overset{\circ}{\varepsilon}_{i,p}(\mathbf{u}) - a^{jk}_{i,p} u_{j,k}] \tag{1.7}$$

Из лемм 1, 2, (1.3), (1.7) следует, что ($I \equiv \|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}$)

$$\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(\Omega)} \leqslant I + c_3^2 \sum_{l,t} \|u_{l,t}\|^2_{Y(\Omega)} = I + c_3^2 \sum_{l,t} \|u_{l,t}\|^2_{W^{-1}(\Omega)} + \tag{1.8}$$

$$+ c_3^2 \sum_{l,t,s} \|u_{l,ts}\|^2_{W^{-1}(\Omega)} \leqslant (1 + c_3^2 n) I + c_3^2 \sum_{l,t,s} \|M^{ip}_{lts} \overset{\circ}{\varepsilon}_{i,p}\|^2_{W^{-1}(\Omega)} +$$

$$+ c_3^2 \sum_{l,t,s} \|M^{ip}_{lts} a^{jk}_{i,p} u_{j,k}\|^2_{W^{-1}(\Omega)}$$

Неравенство (1.1) вытекает из (1.8) и следующего утверждения: пусть $f \in L_2(\Omega)$, $g \in C^1(\Omega)$, тогда $gf_{,i} \in W^{-1}(\Omega)$, и

$$\|gf_{,i}\|_{W^{-1}(\Omega)} \leqslant \|g\|_{C^1(\Omega^c)} \|f\|_{L_2(\Omega)}$$

2. Пусть срединная поверхность оболочки S задается уравнением $\mathbf{r} = \mathbf{r}(\mathbf{x})$, гомеоморфно отображающем S на область Ω переменных $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$, удовлетворяющую условию теоремы 2, коэффициенты Ляме $A_1, A_2 \in C^2(\Omega^c)$, $A_1, A_2 \geqslant m > 0$, $m = \mathrm{const}$, кривизны $R_1^{-1}, R_2^{-1} \in C^1(\Omega^c)$.

Исследуем разрешимость уравнений оболочек В. В. Новожилова — К. И. Болабуха [1]. Введем пространство полей смещений и известные функции

$$H_1(\Omega)=\{\mathbf{U}\mid \mathbf{U}=(\mathbf{u},w),\ \mathbf{u}=(u_1,u_2),\ \mathbf{u}\in W_2^1(\Omega),\ w\in W_2^2(\Omega)\}$$

$$\|\mathbf{U}\|_{H_1(\Omega)}\equiv(\|\mathbf{u}\|^2_{W_2^1(\Omega)}+\|w\|^2_{W_2^2(\Omega)})^{1/2}$$

(2.1) $$\vartheta_1=-A_1^{-1}w_{,1}+R_1^{-1}u_1,\qquad \vartheta_2=-A_2^{-1}w_{,2}+R_2^{-1}u_2$$

(2.2) $$\omega_1=A_1^{-1}u_{2,1}-A_{1,2}(A_1A_2)^{-1}u_1,\qquad \omega_2=A_2^{-1}u_{1,2}-A_{2,1}(A_1A_2)^{-1}u_2$$

(2.3) $$\tau_1=A_1^{-1}\vartheta_{2,1}-A_{1,2}(A_1A_2)^{-1}\vartheta_2,\quad \tau_2=A_2^{-1}\vartheta_{1,2}-A_{2,1}(A_1A_2)^{-1}\vartheta_1$$

Обозначим через ε совокупность деформаций

(2.4) $$\varepsilon_1=A_1^{-1}u_{1,1}+(A_1A_2)^{-1}A_{1,2}u_2+R_1^{-1}w,\quad \varepsilon_2=A_2^{-1}u_{2,2}+(A_1A_2)^{-1}A_{2,1}u_1+ + R_2^{-1}w$$

(2.5) $$\varkappa_1=A_1^{-1}\vartheta_{1,1}+(A_1A_2)^{-1}A_{1,2}\vartheta_2,\qquad \varkappa_2=A_2^{-1}\vartheta_{2,2}+(A_1A_2)^{-1}A_{2,1}\vartheta_1$$

$$\omega=\omega_1+\omega_2,\ \tau=2^{-1}(\tau_1+\tau_2+R_1^{-1}\omega_2+R_2^{-1}\omega_1)$$

$$\varepsilon=(\varepsilon_1,\varepsilon_2,\omega,\varkappa_1,\varkappa_2,\tau),\ \|\varepsilon\|_{L_2(\Omega)}\equiv\left[\int\limits_\Omega(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\omega^2+\varkappa_1^2+\varkappa_2^2+\tau^2)\,d\mathbf{x}\right]^{1/2}$$

Теорема 3. Для любого поля $\mathbf{U}\in H_1(\Omega)$ имеет место неравенство

(2.6) $$\|\mathbf{U}\|_{H_1(\Omega)}\leqslant c_7(\|\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}+\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|w\|^2_{W_2^1(\Omega)})^{1/2}$$

Доказательство. Образуя всевозможные первые производные от деформаций ε_1, ε_2, ω, и выделив члены, содержащие вторые производные от функций u_1, u_2, получим дифференциальные выражения, удовлетворяющие условию (1.2)

$$\varepsilon_{11}\equiv A_1^{-1}u_{1,11},\ \varepsilon_{12}\equiv A_1^{-1}u_{1,12},\ \varepsilon_{21}\equiv A_2^{-1}u_{2,21},\ \varepsilon_{22}\equiv A_2^{-1}u_{2,22}$$

$$\omega_{11}\equiv A_1^{-1}u_{2,11}+A_2^{-1}u_{1,21},\quad \omega_{22}\equiv A_1^{-1}u_{2,12}+A_2^{-1}u_{1,22}$$

Действительно, $u_{1,11}=A_1\varepsilon_{11}$, $u_{1,12}=A_1\varepsilon_{12}$, $u_{1,22}=A_2\omega_{22}-A_1^{-1}A_2^2\varepsilon_{21}$ аналогично выражаются производные от u_2, поэтому из теоремы 2 следует неравенство

(2.7) $$\|\mathbf{u}\|_{W_2^1(\Omega)}\leqslant c_8\left[\int\limits_\Omega(\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+w^2)\,d\mathbf{x}+\|\mathbf{u}\|^2_{L_2(\Omega)}+\|w\|^2_{L_2(\Omega)}\right]^{1/2}$$

Так как деформации $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, τ содержат старшие члены — $A_1^{-2}w_{,11}$, — $A_2^{-2}w_{,22}$, — $(A_1A_2)^{-1}w_{,12}$, соответственно, из (2.7) получаем (2.6).

Введем функционал полной энергии $\Phi_1(\mathbf{U})=E_1(\mathbf{U})-L_1(\mathbf{U})$, $E_1(\mathbf{U})$ — энергия деформации [1], $L_1(\mathbf{U})$ — работа внешних сил (линейный непрерывный в $H_1(\Omega)$ функционал).

Обозначим через $H_1^\circ(\Omega)$ подпространство $H_1(\Omega)$, состоящее из таких полей $\mathbf{U}$, что $\varepsilon=0$. Известно [6], что $H_1^\circ(\Omega)$ состоит из полей смещений оболочки как жесткого целого.

Теорема 4. Для того чтобы задача минимизации функционала $\Phi_1(\mathbf{U})$ на пространстве допустимых полей смещений $H_1^*(\Omega)\subset H_2(\Omega)$ имела решение, необходимо и достаточно выполнение условий равновесия: для любого поля $\mathbf{U}\in R_1^\circ(\Omega)\equiv H_1^\circ(\Omega)\cap\cap H_1^*(\Omega)$, $L_1(\mathbf{U})=0$; решение определяется с точностью до произвольного поля из $R_1^\circ(\Omega)$. В частности, если $R_1^\circ(\Omega)=0$ (т. е. граничные условия запрещают смещение оболочки как жесткого целого), условие равновесия тривиально выполняется, решение существует и единственно.

Доказательство. Образуем фактор-пространство $H(\Omega)=H_1^*(\Omega)\,/\,R_1^\circ(\Omega)$, норму в $H(\Omega)$ определим так:

$$\|\mathbf{U}\|_{H(\Omega)}\equiv[E_1(\mathbf{U})]^{1/2}$$

Рассуждая от противного и используя (2.6), а также неравенство $E_1(\mathbf{U})\geqslant\geqslant c_9\|\varepsilon\|^2_{L_2(\Omega)}$, можно показать, что функционал $L_1(\mathbf{U})$ непрерывен в $H(\Omega)$, откуда [7] следует утверждение теоремы.

3. Исследуем разрешимость уравнений оболочек Рейсснера [2,3]. Введем пространство полей смещений

$$H_2(\Omega) = \{\mathbf{V} \mid \mathbf{V} = (u_1, u_2, w, \vartheta_1, \vartheta_2),\ \mathbf{V} \in W_2^1(\Omega)\}$$

Сохраняются обозначения (2.2), (2.3), формулы (2.4), (2.5) задают деформации ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$,

$$\tau_1^\circ \equiv \tau_1 + R_1^{-1}\omega_2, \qquad \tau_2^\circ \equiv \tau_2 + R_2^{-1}\omega_1$$

$$\varepsilon_{12} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} + \frac{h^2}{48}(R_2^{-1} - R_1^{-1})\left[\tau_1^\circ - \tau_2^\circ + \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}(R_2^{-1} - R_1^{-1})\right]$$

$$\varkappa_{12} = \frac{\tau_1^\circ + \tau_2^\circ}{2} - \frac{1}{4}(R_2^{-1} + R_1^{-1})(\omega_1 + \omega_2)$$

$$\gamma_1 = A_1^{-1}w_{,1} - R_1^{-1}u_1 + \vartheta_1, \qquad \gamma_2 = A_2^{-1}w_{,2} - R_2^{-1}u_2 + \vartheta_2$$

$$\varepsilon_R \equiv (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_{12}, \varkappa_1, \varkappa_2, \varkappa_{12}, \gamma_1, \gamma_2)$$

$$\|\varepsilon_R\|_{L_2(\Omega)} \equiv \left[\int\limits_\Omega (\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varkappa_1^2 + \varkappa_2^2 + \varkappa_{12}^2 + \gamma_1^2 + \gamma_2^2)\,dx\right]^{1/2}$$

Здесь h — толщина оболочки. Можно доказать, что если

$$\max\{hR_1^{-1}, hR_2^{-1}\} \leqslant 1 - \nu \tag{3.1}$$

(ν — коэффициент Пуассона), то энергия деформации оболочки Рейсснера—положительно определенная квадратичная форма деформаций ε_R.

Теорема 5. Для любого поля $V \in H_2(\Omega)$ справедливо неравенство

$$\|\mathbf{V}\|_{W_2^1(\Omega)} \leqslant c_{10}(\|\varepsilon_R\|^2_{L_2(\Omega)} + \|\mathbf{V}\|^2_{L_2(\Omega)})^{1/2} \tag{3.2}$$

Доказательство. Продифференцируем деформации ε_1, ε_2, $\varkappa_1$, $\varkappa_2$, γ_1, γ_2 и выделим члены, содержащие вторые производные от функций u_1, u_2, ϑ_1, ϑ_2, w. Через получившиеся таким образом дифференциальные выражения можно выразить все вторые производные функций u_1, u_2, ϑ_1, ϑ_2, w, кроме $u_{1,22}$, $u_{2,11}$, $\vartheta_{1,22}$, $\vartheta_{2,11}$.

Продифференцировав ε_{12} и $\varkappa_{12}$ по x_2 и перенося влево члены, содержащие $u_{1,22}$, $\vartheta_{1,22}$, получим для их определения систему

$$\left\{\frac{h^2}{48}(R_2^{-1} - R_1^{-1})R_1^{-1}A_2^{-1} + \frac{1}{2}A_2^{-1}\left[1 + \frac{h^2}{48}(R_2^{-1} - R_1^{-1})^2\right]\right\}u_{1,22} - \tag{3.3}$$
$$- \frac{h^2}{48}(R_2^{-1} - R_1^{-1})A_2^{-1}\vartheta_{1,22} = b_1$$
$$^1/_4(R_1^{-1} - R_2^{-1})A_2^{-1}u_{1,22} + {}^1/_2A_2^{-1}\vartheta_{1,22} = b_2$$

Правые части b_1, b_2 в (3.3) составлены из уже найденных производных.

При условии (3.1) система (3.3) разрешима, условия (1.2) выполнены и (3.2) следует из теоремы 2.

Обозначим через $H_2^\circ(\Omega)$ подпространство $\mathrm{H}_2(\Omega)$, состоящее из полей $\mathbf{V}$, таких, что $\varepsilon_R = 0$. Тогда функции ϑ_1, ϑ_2 выражаются через u_1, u_2, w по (2.1), поэтому $H_2^\circ(\Omega)$ имеет вид

$$H_2^\circ(\Omega) = \{\mathbf{V} \mid \mathbf{V} = (u_1, u_2, w, \vartheta_1, \vartheta_2),\ (u_1, u_2, w) \in H_1^\circ(\Omega),\ \vartheta_i = -A_i^{-1}w_{,i} +$$
$$+ R_i^{-1}u_i,\ i = 1,2\}$$

Имеет место теорема существования решения, полностью аналогичная теореме 4.

По той же схеме можно исследовать и другие уравнения оболочек, например, [8].

Поступила 14 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Новожилов В. В.* Теория тонких оболочек. Л., Судпромгиз, 1962.
2. *Рейсснер Э.* Некоторые проблемы теории оболочек. В сб.: Упругие оболочки. М., Изд-во иностр. лит. 1962.
3. *Розин Л. А., Гордон Л. А.* Общие уравнения теории оболочек Рейсснера при произвольной нагрузке. Изв. Всес. н.-и. ин-та гидротехники, 1969, т. 90.
4. *Duvaut G., Lions J. L.* Les inèquations en mécanique et en physique. Paris, Dunod, 1972.
5. *Мосолов П. П., Мясников В. П.* Доказательство неравенства Корна. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, вып. 1.
6. *Черных К. Ф.* Линейная теория оболочек, ч. I. ЛГУ, 1962.
7. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. М., «Наука», 1972.
8. *Шереметьев М. П., Лунь Е. И.* Уточнение линейной моментной теории тонких оболочек. Тр. IV Всес. конф. по теории пластин и оболочек. Изд-во АН АрмССР, 1964.

УДК 531.36

КРИТЕРИИ ЗНАКООПРЕДЕЛЕННОСТИ ФОРМ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

А. Н. Вейссенберг

(Ярославль)

Формулируются необходимые и достаточные условия знакоопределенности форм высшего порядка, полученные на основании соответствующей теоремы Вейерштрасса и метода неопределенных множителей Лагранжа. Указывается алгоритм покрытия некоторого многообразия, позволяющий выявить знакоопределенность формы. Алгоритм предполагает использование ЭВМ.

При изучении устойчивости движения возникает необходимость выявления знакоопределенности форм высшего порядка [1,2]. В точках бифуркации гессиан потенциальной энергии обращается в нуль, и изолированный минимум потенциальной энергии в принципе не может быть установлен по членам низшего порядка. Подобный случай упоминается и в работе [3]. Известно, что общих эффективных критериев знакоопределенности форм высшего порядка не существует [4,5].

1. Пусть E_m — вещественное m-мерное пространство и $V(x)$ — однородная форма степени $2n$ (коэффициенты $a_{i_1\ldots i_m}$ вещественны)

$$V(x) = \sum_{i_1+\ldots+i_m=2n} a_{i_1\ldots i_m} (x^1)^{i_1} \ldots (x^m)^{i_m}$$

Теорема 1. Необходимым и достаточным условием определенной положительности формы $V(x)$ является ее положительность на всех вещественных решениях нелинейной системы уравнений ($a \neq 0$ — вещественное число)

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x^j} - 2\frac{n}{a^2} V(x)\, x^j = 0, \quad x'x = a^2 \quad (j = 1, \ldots, m) \tag{1.1}$$

Доказательство. Необходимость очевидна. Достаточность. Пусть $V(x)$ положительна на всех вещественных решениях системы уравнений (1.1). Тогда эта форма положительна на элементе x_*, минимизирующем ее на многообразии $K = \{x : x'x = a^2\}$. Действительно, вещественный элемент x_* существует на основании теоремы Вейерштрасса в силу непрерывности функции $V(x)$, ограниченности и замкнутости многообразия K. С другой стороны, x_* вместе со специально подобранным скаляром λ удовлет-