Выше приведены первые пять низших безразмерных частот собственных колебаний $\lambda = r_1\omega\sqrt{\rho / E}$, вычисленных в соответствии с изложенным алгоритмом, при $\nu = 0.3$, $h = 1$.

Сопоставление приведенных частот привело к полному совпадению с результатами расчетов на основе трансцендентного уравнения, полученного аналогично [1].

Авторы благодарят В. П. Шмакова за обсуждение работы.

Поступила 6 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herrmann G., Mirsky I.* Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
2. *Gazis C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation. II. Numerical Results. J. Acoust. Soc. of America, 1959, vol. 31, No. 5.
3. *Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А.* Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн. ПМТФ, 1971, № 4.
4. *Крылов А. Н.* Радиальные колебания полого цилиндра. Собр. тр. т. 3, ч. II М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949.
5. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М., Изд-во МГУ, 1963.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1948.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.

УДК 539.3

О ХАРАКТЕРЕ ПОГРАНСЛОЯ У ЛИНИИ РАЗРЫВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ В ПЛАСТИНКЕ

А. В. Колос, М. Д. Солодовник

(Ворошиловград)

При построении уточненных теорий деформации тонких упругих тел (оболочки, пластинки) напряженное состояние его часто представляется в виде суммы внутреннего напряженного состояния и погранслоя [1-3]. Внутреннее напряженное состояние распространяется на всю область, занятую телом, напряженное состояние погранслоя локализуется у краев тела или других линий искажения и быстро затухает при удалении от этих линий.

Характер погранслоя у края пластинки или оболочки и взаимодействие его с внутренним напряженным состоянием было изучено достаточно детально [3,4].

Ниже рассматривается вопрос о наличии погранслоя и сравнительной величине его напряжений у линии разрыва непрерывности поверхностной нагрузки на примере изгиба круглой пластинки.

Круглая пластинка радиуса b и толщиной $2h$ изгибается нормальной кусочно-непрерывной нагрузкой

$$p(r, \varphi) = \begin{cases} p_1(r, \varphi), & r \leqslant a \\ p_2(r, \varphi), & a \leqslant r \leqslant b \end{cases} \quad (p_1 \neq p_2)$$

Напряженное состояние пластинки вблизи цилиндрической поверхности $r = a$ будем представлять в каждой из областей, на которые эта поверхность делит пластинку, в виде суммы внутреннего напряженного состояния и погранслоя. Эти напряженные состояния будем строить с помощью основного и вспомогательного итерационных процессов [3], т. е. в каждом приближении будем определять [4] для двух полученных областей в пластинке две бигармонические функции $w^{(s)}(r, \varphi)$ и $\Phi^{(s)}(\xi, \zeta)$ и одну гармоническую $\psi^{(s)}(\xi, \zeta)$ $(h\zeta = z,\ h\xi = r - a)$.

В каждой точке сечения $r = a$ тензор напряжений и вектор перемещений непрерывны. Из условий непрерывности с помощью процедуры, подробно описанной ранее [4], получим при $r = a$

$$\begin{aligned}
(1)\qquad & \sigma_{r(1)}^{(s)} + \sigma_{r[1]}^{(s)} = \sigma_{r(2)}^{(s)} + \sigma_{r[2]}^{(s)}, \quad u_{r(1)}^{(s)} + u_{r[1]}^{(s-1)} = u_{r(2)}^{(s)} + u_{r[2]}^{(s-1)} \\
& \tau_{r\theta(1)}^{(s)} + \tau_{r\theta[1]}^{(s)} = \tau_{r\theta(2)}^{(s)} + \tau_{r\theta[2]}^{(s)}, \quad u_{\theta(1)}^{(s)} + u_{\theta[1]}^{(s-1)} = u_{\theta(2)}^{(s)} + u_{\theta[2]}^{(s-1)} \\
& \tau_{rz(1)}^{(s-1)} + \tau_{rz[1]}^{(s)} = \tau_{rz(2)}^{(s-1)} + \tau_{rz[2]}^{(s)}, \quad W_{(1)}^{(s)} + W_{[1]}^{(s-2)} = W_{(2)}^{(s)} + W_{[2]}^{(s-2)}
\end{aligned}$$

Здесь величины с нижними индексами (1) и (2) относятся к внутреннему напряженному состоянию в областях $r \leqslant a$ и $a \leqslant r \leqslant b$ соответственно, величины с индексами [1] и [2] — напряжения и перемещения погранслоев.

Произволы интегрирования уравнений для функций $W_{(i)}^{(s)}$, $\Phi_{[i]}^{(s)}$, $\Psi_{[i]}^{(s)}$ $(i = 1, 2)$ позволяют удовлетворить на поверхности $r = a$ шести условиям (1) и четырем условиям затухания погранслоев в полуполосах $|\zeta| \leqslant 1$, $\xi \leqslant 0$, и $|\zeta| \leqslant 1$, $\xi \geqslant 0$, определяемых функциями $\Phi_{[1]}$ и $\Phi_{[2]}$.

Эти условия затухания для однородной кососимметричной задачи плоской деформации полуполосы представляются для каждого из погранслоев в виде некоторой пары из следующих четырех равенств [5]:

$$\begin{aligned}
(2)\qquad & \int_{-1}^{1} \tau_{rz}(0, \zeta)\, d\zeta = 0, \qquad \int_{-1}^{1} \zeta\sigma_r(0, \zeta)\, d\zeta = 0 \\
& \frac{\nu}{2}\int_{-1}^{1} \zeta^2\tau_{rz}(0, \zeta)\, d\zeta + \frac{E}{1+\nu}\int_{-1}^{1} \zeta u_r(0, \zeta)\, d\zeta = 0 \\
& \frac{2-\nu}{3}\int_{-1}^{1} \zeta^3\sigma_r(0, \zeta)\, d\zeta - \frac{E}{1+\nu}\int_{-1}^{1} (\zeta^2 - 1)\, W(0, \zeta)\, d\zeta = 0
\end{aligned}$$

В работе [5] в зависимости от того, что предполагалось заданным на торце полуполосы, эти условия были получены в виде комбинаций первого и второго, первого и третьего, второго и четвертого условий (2).

Разделив краевые задачи внутреннего напряженного состояния и погранслоя [4] и построив погранслой, можем определить на краю полуполосы те величины, которые там не были заданы. (Например, если воспользоваться условиями затухания в виде комбинации первого и второго условий (2) и получить на краю полуполосы граничные условия в виде $\sigma_r(0, \zeta) = f_1(\zeta)$, $\tau_{rz}(0, \zeta) = f_2(\zeta)$, то, построив погранслой, можно определить $u_r(0, \zeta)$ и $W(0, \zeta)$. Для этих величин неиспользованные равенства (2) должны выполняться тождественно.) Последнее означает, что в случаях, когда это окажется необходимым, можно, не переопределяя задачу, использовать для разделения краевых задач внутреннего напряженного состояния и погранслоя все четыре условия (2).

В рассматриваемой задаче для выделения условий сопряжения внутренней задачи на линии $r = a$ из условий (1) воспользуемся всеми условиями (2) для каждого из предполагаемых у поверхности $r = a$ $(\xi = 0)$ погранслоев.

Используя последовательно условия (1) и (2) и принимая во внимание, что в каждом приближении напряжения погранслоев должны удовлетворять [4] однородным условиям на $\zeta = \pm 1$, получим для внутреннего напряженного состояния уравнения (с погрешностью порядка $O(h^3)$ и условия сопряжения при $r = a$

$$\begin{aligned}
(3)\qquad & D\Delta\Delta w_{(i)} = p_i - \frac{(8 - 3\nu)\, h^2}{10\,(1 - \nu)}\,\Delta p_i \\
& w = h^{-3}\left(w^{(0)} + h w^{(1)} + h^2 w^{(2)}\right), \quad i = 1,\ 2
\end{aligned}$$

$$w_{(1)} = w_{(2)}, \quad \frac{\partial w_{(1)}}{\partial r} = \frac{\partial w_{(2)}}{\partial r} \tag{4}$$

$$\frac{\partial^2 w_{(1)}}{\partial r^2} - \frac{\partial^2 w_{(2)}}{\partial r^2} = -\frac{h^2 (8 - 3\nu)}{10D(1-\nu)}(p_1 - p_2)$$

$$\frac{\partial^3 w_{(1)}}{\partial r^3} - \frac{\partial^3 w_{(2)}}{\partial r^3} = \frac{h^2 (8 - 3\nu)}{10D(1-\nu)}\left[\frac{p_1 - p_2}{a} - \frac{\partial}{\partial r}(p_1 - p_2)\right]$$

Для погранслоев

$$\Psi_{[1]}^{(n)} = \Psi_{[2]}^{(n)} \equiv 0 \quad (n = 0, 1, 2), \qquad \Phi_{[1]}^{(k)} = \Phi_{[2]}^{(k)} \equiv 0 \quad (k = 0, 1) \tag{5}$$

$$\Phi_{[1]}^{(2)} = -\frac{p_1 - p_2}{4} \sum \frac{1}{\lambda_k^2 \sin^4 \lambda_k} e^{\lambda_k \xi} F_k(\zeta), \quad -\infty < \xi \leqslant 0$$

$$\Phi_{[2]}^{(2)} = \frac{p_1 - p_2}{4} \sum \frac{1}{\lambda_k^2 \sin^4 \lambda_k} e^{-\lambda_k \xi} F_k(\zeta), \quad 0 \leqslant \xi < \infty$$

$$F_k(\zeta) = \lambda_k \cos \lambda_k \sin \lambda_k \zeta - \lambda_k \zeta \sin \lambda_k \cos \lambda_k \zeta$$

$$\left(\sigma_{r[i]}^{(2)} = \frac{\partial^2 \Phi_{[i]}^{(2)}}{\partial \zeta^2}, \; \sigma_{z[i]}^{(2)} = \frac{\partial^2 \Phi_{[i]}^{(2)}}{\partial \xi^2}, \; \sigma_{\theta[i]}^{(2)} = \nu \Delta \Phi_{[i]}^{(2)}, \; \tau_{rz[i]}^{(2)} = -\frac{\partial^2 \Phi_{[i]}^{(2)}}{\partial \xi \, \partial \zeta}\right)$$

Здесь λ_k — корни уравнения $\sin 2\lambda - 2\lambda = 0$, имеющие положительную действительную часть (по ним ведется суммирование в (5)), $F_k(\zeta)$ — нечетные функции Папковича.

Проведем анализ полученных результатов.

Для напряжений внутреннего напряженного состояния имеем

$$\sigma = h^{-q} \sum_{s=0}^{S} h^s \sigma^{(s)} \tag{6}$$

Здесь $q = 2$ для $\sigma_r, \sigma_\theta, \tau_{r\theta}$; $q = 1$ для τ_{rz}; $\tau_{\theta z}$ $q = 0$ для σ_z.

Для напряжений погранслоя $q = 2$.

Из равенств (5) и (6) следует: а) у линии разрыва непрерывности поверхностной нагрузки имеется погранслой — плоская деформация в плоскостях, перпендикулярных линии $r = a$; б) напряжения погранслоя имеют порядок h^0 (на краю пластинки напряжения погранслоя имеют порядок h^{-2}, т. е. такой же, как у основных напряжений классической теории).

Отсюда вытекает, что у линии разрыва непрерывности поверхностной нагрузки погрешность классической теории имеет тот же порядок h по сравнению с h^0, что и вдали от этой линии.

Поступила 14 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Гольденвейзер А. Л.* Построение приближенной теории изгиба пластинки методом асимптотического интегрирования уравнений теории упругости. ПММ, 1962, т. 26, вып. 4.
2. *Аксентян О. К., Ворович И. И.* Напряженное состояние плиты малой толщины. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
3. *Гольденвейзер А. Л.* Методы обоснования и уточнения теории оболочек. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. *Колос А. В.* Методы уточнения классической теории изгиба и растяжения пластинок. ПММ, 1965, т. 29, вып. 4.
5. *Гусейн-Заде М. И.* Об условиях существования затухающих решений плоской задачи теории упругости для полуполосы. ПММ, 1965, т. 29, вып. 2.