УДК 539.3

ДИНАМИКА ПОЛОГО СИММЕТРИЧНО НАГРУЖЕННОГО УПРУГОГО КРУГОВОГО ЦИЛИНДРА

Г. А. Брусиловская, Л. В. Ершов

(Москва)

Приводится решение динамической осесимметричной задачи теории упругости для полого упругого кругового цилиндра, позволяющее определять как перемещения, так и напряжения в любой точке цилиндра при симметричном нагружении его боковой поверхности.

Задача о собственных колебаниях полого упругого толстостенного цилиндра рассматривалась в [1,2]. В работе [1] выведено трансцендентное уравнение для получения собственных частот в случае осесимметричных колебаний цилиндра, в работе [2] исследуется распространение упругих волн в полом круговом цилиндре на основе общих уравнений упругости.

Численный метод решения задач подобного класса изложен в работе [3].

Исходя из уравнений Ляме, нетрудно показать, что исследование напряженно-деформированного состояния полого цилиндра в предположении, что вынуждающие силы распределены по объему, сводится к решению следующей задачи (в безразмерных переменных):

$$\frac{\partial \mathbf{u}_n(r,t)}{\partial r} = \mathrm{A}_n(r)\,\mathbf{u}_n(r,t) + \mathrm{B}\mathbf{G}_n(r,t) + \mathrm{B}\frac{\partial^2 \mathbf{u}_n(r,t)}{\partial t^2} \tag{1}$$

$$\mathrm{N}\mathbf{u}_n = 0 \quad \text{при } r = 1,\ r = \alpha \tag{2}$$

$$\mathbf{u}_n = 0, \quad \frac{\partial u_{zn}}{\partial t} = \frac{\partial u_{rn}}{\partial t} = 0 \quad \text{при } t = 0 \tag{3}$$

$$B = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ E_0 & 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{N} = \begin{Vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & E_0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{G}_n = \begin{Vmatrix} G_{zn} \\ G_{rn} \\ 0 \\ 0 \end{Vmatrix}, \quad \mathrm{A}_n(r) = \| a_{ij}(r) \|$$

$$\mathbf{u}_n = \{u_{zn}/r_1,\ u_{rn}/r_1,\ \tau_n/E,\ \sigma_{rn}/E\}$$

$$a_{12} = -a_{43} = n, \quad a_{13} = 2(1+\nu), \quad a_{21} = -a_{34} = -\frac{n\nu}{1-\nu}, \quad a_{22} = -\frac{\nu}{(1-\nu)r}$$

$$a_{24} = \frac{(1+\nu)(1-2\nu)}{1-\nu}, \quad a_{31} = \frac{n^2}{1-\nu^2}, \quad a_{32} = a_{41} = \frac{\nu n}{(1-\nu^2)r}, \quad a_{33} = -\frac{1}{r}$$

$$a_{42} = \frac{1}{(1-\nu^2)r^2}, \quad a_{44} = -\frac{1-2\nu}{(1-\nu)r}, \quad a_{11} = a_{14} = a_{23} = a_{43} = 0$$

Здесь линейные размеры отнесены к внутреннему радиусу цилиндра r_1, время — к $\sqrt{\rho/E}\, r_1$; α — отношение внешнего радиуса к внутреннему, n — волновое число, E, ρ, ν — соответственно модуль упругости, плотность материала, коэффициент Пуассона, $G_{zn}(r,t)$, $G_{rn}(r,t)$ — объемные силы [4,5], отнесенные к E/r_1^2, E_0— единичная матрица 2×2.

При этом имеем для продольных и радиальных перемещений

$$u_{zn}(z,r,t) = u_{zn}(r,t)\sin nz, \quad u_{rn}(z,r,t) = u_{rn}(r,t)\cos nz$$

для касательных и нормальных напряжений

$$\tau_n(z,r,t) = \tau_n(r,t)\sin nz, \quad \sigma_n(z,r,t) = \sigma_n(r,t)\cos nz$$

Наложение этих решений позволяет рассматривать динамическую задачу в случае симметричного нагружения вида $g(z)\,f(t)$ (в дальнейшем индекс n опускается).

Применяя к (1) обобщенное комплексное преобразование Фурье

$$u_v{}^*(r,\omega)=\int_0^\infty u(r,t)\,e^{-vt}e^{i\omega t}\,dt \tag{4}$$

$$u(r,t)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u^*(r,\omega+iv)\,e^{-i\omega t}e^{vt}\,d\omega$$

и используя условие (3), систему (1) преобразуем к виду

$$\partial\mathbf{u}^*/\partial r=[A(r)-\omega^2 B]\,\mathbf{u}^*+B\mathbf{G}^*(r,\omega) \tag{5}$$

при граничных условиях

$$N\mathbf{u}^*=0 \text{ при } r=1,\ r=\alpha \tag{6}$$

Будем исходить из решения следующей задачи:

$$d\mathbf{u}/dr=A(r)\mathbf{u}+\mathbf{g}(r) \tag{7}$$

$$N\mathbf{u}=0 \text{ при } r=1,\ r=\alpha \tag{8}$$

Здесь $\mathbf{g}(r)$ — четырехмерный вектор-столбец, составляющие которого — непрерывные на $[1,\alpha]$ функции.

Решение системы (7) возьмем в виде [6]

$$\mathbf{u}(r)=c_1\mathbf{u}_1(r)+c_2\mathbf{u}_2(r)+\int_1^\alpha W(r,x)\,\mathbf{g}(x)\,dx,\quad W=\|w_{ij}(r,x)\| \tag{9}$$

$$w_{ij}=\begin{cases}\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2}u_{ik}(r)\,v_{kj}(x)+\sum\limits_{k=3}^{4}u_{ik}(r)\,v_{kj}(x), & 1\leqslant x<r\leqslant\alpha\\ -\dfrac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^{2}u_{ik}(r)\,v_{kj}(x), & 1\leqslant r<x\leqslant\alpha\end{cases}$$

Здесь $\|u_{ik}(r)\|=U(r)$ — фундаментальная матрица однородной системы, соответствующей (7), $\|v_{ik}(r)\|=U^{-1}(r)$ — обратная матрица.

Легко проверить, что если первые два из решений фундаментальной системы удовлетворяют условиям (8) на левом конце, то и (9) удовлетворяет (8) при $r=1$. Для такой фундаментальной системы решений из граничных условий на правом конце получим систему алгебраических уравнений для определения произвольных постоянных c_1 и и c_2. Имеем

$$c_m=-\frac{1}{2}\int_1^\alpha\sum_{i=3}^{4}v_{mi}(x)\,g_i(x)\,dx-\frac{1}{\Delta(\alpha)}\sum_{i=3}^{4}\sum_{l}^{4}\sum_{3}^{4}\sum_{s=3}^{4}\Delta_{lm}(\alpha)\times \tag{10}$$

$$\times\, u_{ls}(\alpha)\int_1^\alpha v_{si}(x)\,g_i(x)\,dx\qquad(m=1,2)$$

$$\Delta(\alpha)=\begin{vmatrix}u_{31}(\alpha) & u_{32}(\alpha)\\ u_{41}(\alpha) & u_{42}(\alpha)\end{vmatrix}$$

Здесь $\Delta_{ij}(\alpha)$— алгебраические дополнения элементов $u_{ij}(\alpha)$.

Подставляя (10) в формулу (9), получим

$$\mathbf{u}(r)=\int_1^\alpha[P(r,x)+Q(r,x)]\,\mathbf{g}(x)\,dx \tag{11}$$

$$p_{ij}(r,x)=\begin{cases}\sum\limits_{k=3}^{4} u_{ik}(r)\,v_{kj}(x), & 1\leqslant x<r\leqslant \alpha\\ -\sum\limits_{k=1}^{2} u_{ik}(r)\,v_{kj}(x), & 1\leqslant r<x\leqslant \alpha\end{cases} \tag{12}$$

$$q_{ij}(r,x)=-\frac{1}{\Delta(\alpha)}\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=3}^{4}\sum_{l=3}^{4}\Delta_{ls}(\alpha)\,u_{lp}(\alpha)\,u_{is}(r)\,v_{pj}(x) \tag{13}$$

Как следует из (9), нетривиальное решение однородной системы, соответствующей (5), (6), возможно лишь при определенных значениях параметра $\omega=\omega_k$, для которых

$$\Delta(\alpha)=\Delta(\alpha,\ \omega_k)=0 \tag{14}$$

Решение уравнения (14) производится численным методом. Значения ω_k образуют бесконечную последовательность собственных частот, причем кратные частоты отсутствуют. При фиксированном ω_k можно построить фундаментальную матрицу $\| u_{ij}(r)\|$ для однородной системы дифференциальных уравнений, соответствующей задаче, следующим образом зависящей от параметра ω:

$$d\mathbf{u}/dr=(A\,(r)-\omega^2 B)\mathbf{u}+\mathbf{q}\,(r) \tag{15}$$

При граничных условиях (8) решение системы (15) на основании (11) и разложения мероморфной функции (13) можно представить в виде

$$\mathbf{u}(r,\omega)=\int_1^{\alpha}[P(r,x,\omega^2)+\varphi(\omega)\,g(x)]\,dx+\sum_{k=1}^{\infty}\int_1^{\alpha}\frac{R(r,x,\omega_k^2)}{\omega_k^2-\omega^2}\mathbf{g}(x)\,dx \tag{16}$$

$$R_{ij}(r,x,\omega_k^2)=-\operatorname{Res}\omega_k^2\,[q_{ij}(r,x,\omega^2)]=\frac{1}{\Delta'(\alpha,\omega_k^2)}\times$$

$$\times\sum_{s=1}^{2}\sum_{p=3}^{4}\sum_{p=3}^{4}\Delta_{ls}(\alpha,\omega_k^2)\,u_{lp}(\alpha,\omega_k^2)\,u_{is}(r,\omega_k^2)\,v_{pj}(x,\omega_k^2)$$

Здесь $P(r,x,\omega)$ имеет вид (12), $\varphi(\omega)$ — целая функция. Используя при обратном преобразовании решения (16) вторую из формул (4), по лемме Жордана имеем

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-i\omega t}\,d\omega}{\omega_k^2-(\omega+iv)^2}=e^{-vt}\,\frac{\sin\omega_k t}{\omega_k}$$

и, следовательно, решение исходной задачи (1) — (3) принимает вид [7]

$$\mathbf{u}(r,t)=\sum_{k=1}^{\infty}\int_1^{\alpha}\frac{R(r,x,\omega_k^2)}{\omega_k}\int_0^{t}\sin\omega_k(t-\tau)\,B\mathrm{G}(x,\tau)\,dx\,d\tau \tag{17}$$

Следует отметить, что формулы (17), (4) могут служить исходными для определения перемещений и напряжений упругого цилиндра при симметричном динамическом нагружении его боковой поверхности, так как в этом случае от неоднородных краевых условий нетрудно перейти к граничным условиям типа (2) и неоднородным исходным дифференциальным уравнениям.

n	$\alpha=1.25$	$\alpha=1.5$	$\alpha=2.0$	$\alpha=2.5$
1	0.8194	0.7637	0.6798	0.6324
2	1.1416	1.1137	1.0859	1.0679
3	7.8925	4.0867	2.2914	1.7550
4	14.4995	7.1678	3.5140	2.3288
5	15.7460	8.0599	4.2839	3.0546

Выше приведены первые пять низших безразмерных частот собственных колебаний $\lambda = r_1\omega\sqrt{\rho / E}$, вычисленных в соответствии с изложенным алгоритмом, при $\nu = 0.3$, $h = 1$.

Сопоставление приведенных частот привело к полному совпадению с результатами расчетов на основе трансцендентного уравнения, полученного аналогично [1].

Авторы благодарят В. П. Шмакова за обсуждение работы.

Поступила 6 XII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Herrmann G., Mirsky I.* Three-dimensional and shell-theory analysis of axially symmetric motions of cylinders. J. Appl. Mech., 1956, vol. 23, No. 4.
2. *Gazis C.* Three-dimensional investigation of the propagation of waves in hollow circular cylinders. I. Analytical Foundation. II. Numerical Results. J. Acoust. Soc. of America, 1959, vol. 31, No. 5.
3. *Сабодаш П. Ф., Чередниченко Р. А.* Применение метода пространственных характеристик к решению осесимметричных задач по распространению упругих волн. ПМТФ, 1971, № 4.
4. *Крылов А. Н.* Радиальные колебания полого цилиндра. Собр. тр. т. 3, ч. II М.— Л., Изд-во АН СССР, 1949.
5. *Огибалов П. М.* Вопросы динамики и устойчивости оболочек. М., Изд-во МГУ, 1963.
6. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. М., Гостехиздат, 1948.
7. *Владимиров В. С.* Уравнения математической физики. М., «Наука», 1967.

УДК 539.3

О ХАРАКТЕРЕ ПОГРАНСЛОЯ У ЛИНИИ РАЗРЫВА НЕПРЕРЫВНОСТИ ПОВЕРХНОСТНОЙ НАГРУЗКИ В ПЛАСТИНКЕ

А. В. Колос, М. Д. Солодовник

(Ворошиловград)

При построении уточненных теорий деформации тонких упругих тел (оболочки, пластинки) напряженное состояние его часто представляется в виде суммы внутреннего напряженного состояния и погранслоя [1-3]. Внутреннее напряженное состояние распространяется на всю область, занятую телом, напряженное состояние погранслоя локализуется у краев тела или других линий искажения и быстро затухает при удалении от этих линий.

Характер погранслоя у края пластинки или оболочки и взаимодействие его с внутренним напряженным состоянием было изучено достаточно детально [3,4].

Ниже рассматривается вопрос о наличии погранслоя и сравнительной величине его напряжений у линии разрыва непрерывности поверхностной нагрузки на примере изгиба круглой пластинки.

Круглая пластинка радиуса b и толщиной $2h$ изгибается нормальной кусочно-непрерывной нагрузкой

$$p(r, \varphi) = \begin{cases} p_1(r, \varphi), & r \leqslant a \\ p_2(r, \varphi), & a \leqslant r \leqslant b \end{cases} \quad (p_1 \neq p_2)$$

Напряженное состояние пластинки вблизи цилиндрической поверхности $r = a$ будем представлять в каждой из областей, на которые эта поверхность делит пластинку, в виде суммы внутреннего напряженного состояния и погранслоя. Эти напряженные состояния будем строить с помощью основного и вспомогательного итерационных процессов [3], т. е. в каждом приближении будем определять [4] для двух полученных