Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ТРЕЩИН С ПЕРЕМЕННОЙ СКОРОСТЬЮ

Б. В. Костров

(Москва)

Рассматривается плоская задача о распространении прямолинейной трещины в упругой среде под действием произвольных переменных нагрузок. Положение края трещины задается как произвольная монотонно возрастающая дифференцируемая функция времени, такая, что скорость распространения трещины в любой момент времени меньше скорости волн Релея. Получено выражение для напряжений на продолжении трещины, в частности коэффициенты интенсивности напряжений у ее края.

Для анализа распространения трещин в механике разрушения используется критерий разрушения, позволяющий определить закон распространения края трещины при заданных внешних условиях. В частности, для идеально-хрупкой линейно-упругой среды можно применить энергетический критерий Гриффитса, который можно записать в виде [1]

$$2\gamma(v) = \frac{\pi}{2\mu b^2 v R(1/v)}\left(\sqrt{v^{-2}-a^{-2}}\,k_1^2 + \sqrt{v^{-2}-b^{-2}}\,k_2^2\right) + \frac{\pi}{2\mu v\sqrt{v^{-2}-b^{-2}}}\,k_3^2 \tag{0.1}$$

$$R(s) = (2s^2 - b^{-2})^2 + 4s^2\sqrt{a^{-2}-s^{-2}}\,\sqrt{b^{-2}-s^{-2}}$$

Здесь μ — модуль сдвига, a и b — скорости продольных и поперечных волн, v — скорость распространения трещины, $\gamma(v)$ — эффективная поверхностная энергия, которая считается характерной для данного материала функцией скорости распространения трещины, а k_1, k_2, k_3 — коэффициенты интенсивности напряжений для трех основных видов разрушения: отрыва, скола (поперечного сдвига) и среза (продольного сдвига) соответственно. Функция $R(s)$ обращается в нуль в точках $s = \pm c^{-1}$, где c — скорость волн Релея.

Чтобы применить критерий (0.1) к конкретной задаче, необходимо знать коэффициенты интенсивности напряжений k_i как функционалы от закона распространения трещины, для чего требуется получить решение соответствующей динамической задачи теории упругости для произвольного закона распространения трещины. В работе [2] это было сделано для частного случая трещины среза. Этот случай является простейшим, так как при этом возникают только поперечные волны, поляризованные параллельно краю трещины. Недавно Фройнд [3], используя остроумный полуобратный метод, нашел выражение коэффициента интенсивности для полубесконечной трещины отрыва, распространяющейся под действием статических нагрузок с кусочно-постоянной скоростью. Рассматривая распространение с произвольной переменной скоростью как предельный случай кусочно-постоянной скорости, он пришел к выводу, что полученное им выражение справедливо и в общем случае. Результат Фройнда обладает двумя недостатками. Прежде всего, этот результат необоснован. Действительно, коэффициент интенсивности напряжения определяется как предел

$$k_i = \lim \sqrt{2(x - l(t))}\,\sigma_i(x, t) \tag{0.2}$$

где $l(t)$ — координата края трещины в момент времени t, $\sigma_i(x, t)$ — компоненты вектора напряжения на продолжении трещины. Для вычисления коэффициента интенсивности у края трещины, распространяющейся по произвольному закону, следовало бы сначала перейти к пределу от кусочно-постоянной скорости к переменной, а затем вычислить предел (0.2). В то же время Фройнд сначала перешел к пределу по формуле

(0.2) для трещины, распространяющейся с кусочно-постоянной скоростью, а лишь затем совершил предельный переход к произвольной скорости распространения. Возможность же изменения порядка предельного перехода не очевидна и никак не обоснована в работе [3] [1]. Впрочем, как будет показано ниже, результат Фройнда оказывается верным. Второй недостаток заключается в том, что Фройнду удалось получить решение лишь для частных случаев не зависящих от времени нагрузок [3] и нагружения полубесконечной трещины плоской волной [4], что позволяет рассматривать распространение конечной трещины даже для этих частных и простейших нагрузок только для моментов времени, предшествующих моменту прихода продольной волны от одного края трещины ко второму ее краю.

1. Постановка задачи. Пусть безграничная упругая среда с модулем сдвига μ и скоростями распространения продольных и поперечных волн a и b соответственно заполняет пространство вне трещины

$$x_1 = 0, \quad l_-(t) < x_2 < l_+(t), \quad -\infty < x_3 < \infty \tag{1.1}$$

Примем, что все усилия, приложенные к среде, не зависят от координаты x_3 (плоская задача). Уравнения движения и закон Гука запишем в виде

$$\begin{gathered}\sigma_{\alpha,\beta\beta} = \rho u_\alpha^{\cdot\cdot}, \quad \sigma_{3\alpha,\alpha} = \rho u_3^{\cdot\cdot}, \quad \rho = \mu b^{-2} \\ \sigma_{\alpha\beta} = \mu(\delta_{\alpha\beta}(\varkappa^2 - 2)u_{\lambda,\lambda} + u_{\alpha,\beta} + u_{\beta,\alpha}) \\ \sigma_{3\alpha} = \mu u_{3,\alpha}, \quad \alpha, \beta, \lambda = 1, 2, \quad \varkappa = a / b\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь точки означают дифференцирование по времени t, а индекс после запятой — дифференцирование по соответствующей координате. Здесь и далее по повторяющимся греческим индексам производится суммирование.

По латинским индексам суммирование не производится. В уравнениях движения не учтено действие объемных сил.

Если на среду действуют объемные силы и начальные условия неоднородны, то, пользуясь линейностью уравнений, можно поступить следующим образом. Обозначим σ_{ik}°, u_i° решение, соответствующее тем же объемным силам и начальным условиям, но для среды без трещины. Построение такого решения, в принципе, не вызывает затруднений. Представим решение задачи для среды с трещиной в виде суммы: $\sigma_{ik}+\sigma_{ik}^\circ$, $u_k + u_k^\circ$. Тогда u_k, σ_{ik} будут удовлетворять уравнениям движения в отсутствие массовых сил (1.2) и однородным начальным условиям

$$u_k = u_k^{\cdot} = 0 \quad \text{при } t \leqslant 0 \tag{1.3}$$

Пусть на трещине заданы усилия — $p_i^\circ(x_2, t)$, тогда граничные условия для σ_{ik}

$$\begin{gathered}\sigma_i(x_2, t) \equiv \sigma_{i1}(0, x_2, t) = -p_i(x_2, t) \\ \text{при } x_1 = 0, \ l_-(t) < x_2 < l_+(t)\end{gathered} \tag{1.4}$$

где

$$p_i(x_2, t) = p_i^\circ(x_2, t) + \sigma_{i1}^\circ(x_2, 0, t)$$

[1] В последнее время Фройнд [4] рассмотрел таким же методом случай падения плоской волны напряжения на полубесконечную распространяющуюся трещину. Сделанные здесь замечания остаются в силе также и по отношению к работе [4].

Относительно функций $l_-(t)$, $l_+(t)$, определяющих закон распространения трещины, примем

$$-c < l_-^{\boldsymbol{\cdot}}(t) \leqslant 0, \qquad 0 \leqslant l_+^{\boldsymbol{\cdot}}(t) < c \tag{1.5}$$

Эти условия можно ослабить в случае трещины среза, когда все приложенные к среде усилия параллельны оси x_3 (т. е. краю трещины), заменяя в (1.5) c на b.

Уравнения (1.2) будем решать с помощью двойного преобразования Лапласа по координате x_2 и времени t. Образы функций будем обозначать теми же буквами, что и оригиналы, делая различие (где необходимо) путем явного выписывания аргументов

$$u_i(x_1, q, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \int_{-\infty}^\infty e^{-qx_2} u_i(x_1, x_2, t)\, dx_2\, dt \tag{1.6}$$

$$\sigma_{ik}(x_1, q, p) = \int_0^\infty e^{-pt} \int_{-\infty}^\infty e^{-qx_2} \sigma_{ik}(x_1, x_2, t)\, dx_2 dt$$

Через $\sigma_i(q, p)$ будем обозначать для краткости преобразование Лапласа от граничных значений компонент вектора напряжения на оси $x_2 : \sigma_i(x_2, t) = \sigma_{i1}(0, x_2, t)$.

Уравнения (1.2) решаются стандартным образом, и решение имеет вид

$$\begin{gathered} u_1(x_1, q, p) = \frac{1}{\mu R(q/p)p}\Bigl(e^{-|x_1|pr_a}\Bigl(2\frac{q}{p} r_a r_b \sigma_2(q, p) - \\ - \Bigl(b^{-2} - \frac{2q^2}{p^2}\Bigr) r_a \sigma_1(q, p) \operatorname{sgn} x_1\Bigr) - \\ - \frac{q}{p} e^{-|x_1|pr_b}\Bigl(\Bigl(b^2 - \frac{2q^2}{p^2}\Bigr)\sigma_2(q, p) + 2\frac{q}{p} r_a \sigma_1(q, p) \operatorname{sgn} x_1\Bigr)\Bigr) \\ u_2(x_1, q, p) = \frac{1}{\mu R(q/p)p}\Bigl(\frac{q}{p} e^{-|x_1|pr_a}\Bigl(\Bigl(b^2 - \frac{2q^2}{p^2}\Bigr)\sigma_1(q, p) - \\ - 2\frac{q}{p} r_b \sigma_2(q, p) \operatorname{sgn} x_1\Bigr) - e^{-|x_1|pr_b}\Bigl(2\frac{q}{p} r_a r_b \sigma_1(q, p) - \\ - \Bigl(b^2 - \frac{2q^2}{p^2}\Bigr) r_b \sigma_2(q, p) \operatorname{sgn} x_1\Bigr)\Bigr) \\ u_3(x_1, q, p) = -\frac{1}{\mu p r_b} e^{-|x_1|pr_b}\sigma_3(q, p) \operatorname{sgn} x_1 \\ r_a = \sqrt{a^{-2} - \frac{q^2}{p^2}}, \qquad r_b = \sqrt{b^{-2} - \frac{q^2}{p^2}} \end{gathered} \tag{1.7}$$

Обозначим через $w_i(x_2, t)$ скачок смещения на оси x_2

$$w_i(x_2, t) = u_i(+0, x_2, t) - u_i(-0, x_2, t)$$

а через $w_i(q, p)$ — соответствующее преобразование Лапласа. Тогда из (1.7) получим

$$\sigma_i(q, p) + pK_{(i)}(q/p) w_i(q, p) = 0 \tag{1.8}$$

$$K_{(1)}(s) = \frac{\mu b^2 R(s)}{2\sqrt{a^{-2} - s^2}}, \quad K_{(2)}(s) = \frac{\mu b^2 R(s)}{2\sqrt{b^{-2} - s^2}}, \quad K_{(3)}(s) = {}^1/_2\mu\sqrt{b^{-2} - s^2} \tag{1.9}$$

Выражения (1.7) давали бы решение задачи, если бы из граничных условий можно было вычислить функции $\sigma_i(q, p)$, т. е. если бы напряже ния были известны на всей оси x_2. Однако условия (1.4) дают значения напряжения лишь на трещине. Зато вне трещины должны быть непрерывны смещения, т. е.

$$w_i(x_2, t) = 0 \quad \text{при } x_2 < l_-(t),\ l_+(t) < x_2 \tag{1.10}$$

Таким образом, задача свелась к отысканию напряжений $\sigma_i(x_2, t)$ на продолжении трещины из условий (1.4) и (1.10) и функционального уравнения (1.8).

Функции $K_{(i)}(s)$ встречаются при решении задач дифракции упругих волн на свободной полуплоскости — трещине. Можно показать, что для функции $R(s)$ справедливо представление

$$R(s) = (b^{-2} - a^{-2})(c^{-2} - s^{-2})S(s)S(-s) \tag{1.11}$$

$$S(s) = \exp\left(-\frac{1}{\pi}\int_{a^{-2}}^{b^{-2}} \operatorname{arctg}\frac{4\xi^2\sqrt{\xi^2 - a^{-2}}\sqrt{b^{-2} - \xi^2}}{(2\xi^2 - b^{-2})^2}\frac{d\xi}{\xi + s}\right)$$

Функция $S(s)$ регулярна в комплексной плоскости s, разрезанной вдоль отрезка действительной оси от точки $s = -a^{-1}$ до $s = -b^{-1}$, и стремится к единице при $s \to \infty$. Разложение (1.11) является основой решения уравнения (1.8) методом Винера — Хопфа для неподвижной или распространяющейся с постоянной скоростью полубесконечной трещины. Хотя метод Винера — Хопфа непосредственно неприменим к задаче о неравномерном распространении трещины, разложение (1.11) позволяет построить решение и в этом случае путем сведения задачи к решению интегрального уравнения, встречающегося в теории сверхзвукового обтекания и использованного в работе [2] для решения задачи о трещине среза (продольного сдвига).

2. Решение для полубесконечной трещины. Рассмотрим пока частный случай полубесконечной трещины, когда $l_-(t) = -\infty$. В этом случае будем писать $l(t)$ вместо $l_+(t)$. Кроме того, для краткости будем опускать индекс у координаты x_2. Граничные условия (1.4) и (1.10) примут тогда вид

$$\begin{aligned} \sigma_i(x, t) &= -p_i(x, t) && \text{при } -\infty < x < l(t) \\ w_i(x, t) &= 0 && \text{при } l(t) < x < \infty \end{aligned} \tag{2.1}$$

Необходимо найти решение уравнений (1.8) при условиях (2.1), такое, что

$$\sigma_i(x, t) = \frac{k_i(t)}{\sqrt{2(x - l(t))}} + O(1) \quad \text{при } x \to l(t) + 0$$

Введем новые функции $F_i(x, t)$, $G_i(x, t)$, определяемые следующим образом:

$$F_\alpha(q, p) = \frac{\sqrt{a^{-1} + q/p}\sqrt{b^{-1} + q/p}}{c^{-1} + q/p} S^{-1}\left(\frac{q}{p}\right)\sigma_\alpha(q, p), \quad \alpha = 1, 2 \tag{2.2}$$

$$F_3(q, p) = \sigma_3(q, p)$$

$$G_\alpha(q, p) = \frac{\mu(1 - \varkappa^{-2})(c^{-1} - q/p)}{4\sqrt{a^{-1} - q/p}\sqrt{b^{-1} - q/p}} S\left(\frac{-q}{p}\right) w_\alpha(q, p), \quad \alpha = 1, 2$$

$$G_3(q, p) = {}^1/_2\mu w_3(q, p)$$

Тогда уравнения (1.8) примут вид

(2.3) $$\frac{1}{p\sqrt{v_i^{-2}-q^2/p^2}}F_i(q,p)+G_i(q,p)\equiv 0,\ v_1=v_3=b,\ v_2=a$$

Соотношения (2.2) в физических переменных x и t имеют вид

(2.4) $$F_i(x,t)=\mathrm{A}_i^+\sigma_i\equiv\sigma_i(x,t)-$$
$$-(1-\delta_{i3})\frac{\partial}{\partial t}\Big[D(-c^{-1})\sqrt{c^{-1}-a^{-1}}\sqrt{c^{-1}-b^{-1}}\int_0^{ct}\sigma_i(x-\eta,t-$$
$$-c^{-1}\eta)\,d\eta+\frac{1}{2\pi}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\{D(-s)\}\frac{\sqrt{s-a^{-1}}\sqrt{b^{-1}-s}}{c^{-1}-s}\int_0^{t/s}\sigma_i(x-\eta,t-s\eta)\,d\eta ds\Big]$$
$$D(s)=(S(s))^{-1},\ \{D(s)\}=D(s+i0)+D(s-i0)$$
$$G_i(x,t)=\mathrm{B}_i^+w_i\equiv C_i\Big[w_i(x,t)+$$
$$+(1-\delta_{i3})\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\{S(-s)\}\frac{(c^{-1}-s)}{\sqrt{s-a^{-1}}\sqrt{b^{-1}-s}}\int_0^{t/s}w_i(x+\eta,t-s\eta)\,d\eta\,ds\Big]$$
$$C_\alpha={}^1/_4\mu(1-\varkappa^{-2}),\quad \alpha=1,2,\quad C_3={}^1/_2\mu$$

Преобразования (2.4) обладают замечательным свойством, состоящим в том, что при $x<l(t)$ (т. е. на трещине) $F_i(x,t)$ вычисляются через значения $\sigma_i(x',t')$, где $x'<l(t)$ (напомним, что по предположенному $l(t)<c$). Точно так же значения $G_i(x,t)$ на продолжении трещины вычисляются через значения w_i на продолжении трещины. Поэтому вместо условий (2.1) получаем

(2.5) $$F_i(x,t)=-f_i(x,t)\qquad \text{при } x<l(t)$$
$$G_i(x,t)=0\qquad \text{при } x>l(t)$$

Здесь $f_i(x,t)$ — известная функция, связанная с $p_i(x,t)$ преобразованием (2.4)

(2.6) $$f_i(x,t)=\mathrm{A}_i^+p_i$$

Преобразования типа свертки (2.4) обратимы. Обратные преобразования имеют вид

(2.7) $$\sigma_i(x,t)=(\mathrm{A}_i^+)^{-1}F_i\equiv F_i(x,t)+(1-\delta_{i3})\times$$
$$\times\frac{1}{2\pi}\frac{\partial}{\partial t}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\{S(-s)\}\frac{c^{-1}-s}{\sqrt{s-a^{-1}}\sqrt{b^{-1}-s}}\int_0^{t/s}F_i(x-\eta,t-s\eta)\,d\eta\,ds$$
$$w_i(x,t)=(\mathrm{B}_i^+)^{-1}G_i=C_i^{-1}\Big(G_i(x,t)-(1-\delta_{i3})\times$$
$$\times\frac{\partial}{\partial t}\Big[D(-c^{-1})\sqrt{c^{-1}-a^{-1}}\sqrt{c^{-1}-b^{-1}}\int_0^{ct}G_i(x+\eta,t-c^{-1}-\eta)\,d\eta+$$
$$+\frac{1}{2\pi}\int_{a^{-1}}^{b^{-1}}\{D(-s)\}\frac{\sqrt{s-a^{-1}}\sqrt{b^{-1}-s}}{c^{-1}-s}\int_0^{t/s}G_i(x+\eta,t-s\eta)\,d\eta\,ds\Big]\Big)$$

Таким образом, задача сведена к нахождению функции $F_i(x, t)$ из уравнений (2.3) и граничных условий (2.5).

Асимптотическое поведение $F_i(x, t)$ при $x \to l(t)$ аналогично поведению $\sigma_i(x, t)$

$$F_i(x, t) = \frac{m_i(t)}{\sqrt{2(x - l(t))}} + O(1) \quad \text{при } x \to l(t) + 0$$

Здесь коэффициенты интенсивности $m_i(t)$ вычисляются через $k_i(t)$ с помощью (2.4) в виде

$$m_i(t) = k_i(t)\left(\delta_{i3} + (1 - \delta_{i3}) D\left(\frac{-1}{v(t)}\right)\frac{\sqrt{1 - v(t)/a}\,\sqrt{1 - v(t)/b}}{1 - v(t)/c}\right) \tag{2.8}$$

где $v(t) = l^{\cdot}(t)$ — скорость распространения трещины в момент времени t.

Запишем уравнение (2.3) в физических переменных, произведя обратное преобразование Лапласа. В частности, при $x_0 > l(t_0)$ имеем в силу (2.5)

$$\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Delta_i} \frac{F_i(x, t)\,dx\,dt}{\sqrt{v_i^2(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2}} = 0 \tag{2.9}$$

(Δ_i — треугольник $v_i^2(t_0 - t)^2 - (x_0 - x)^2 \geqslant 0$, $0 \leqslant t \leqslant t_0$).

Это уравнение в точности совпадает с уравнением (2.5) работы [2]. Метод его решения ничем не отличается от использованного в работе [2]. Пользуясь тем, что при $x_0 > v_i t_0 + l(0)$ край трещины не попадает в область Δ_i, можно доказать, что $F_i(x, t) \equiv 0$ при $x > v_i t + l(0)$. Далее, введем характеристические переменные

$$\xi = (v_i t - x) / \sqrt{2}, \qquad \eta = (v_i t + x) / \sqrt{2}$$

и обозначим через $\eta^*(\xi)$ координату края трещины в характеристических переменных, т. е. решение уравнения

$$\eta^* - \xi = \sqrt{2}\, l\left(\frac{\eta^* + \xi}{v_i\sqrt{2}}\right)$$

Тогда уравнение (2.9) запишем в виде

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_{-l(0)/\sqrt{2}}^{\xi_0} \frac{d\xi}{\sqrt{\xi_0 - \xi}} \int\limits_{-\xi}^{\eta_0} \frac{F_i(\xi, \eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = 0 \quad \text{при } \eta_0 > \eta^*(\xi_0)$$

Или, обращая оператор Абеля по ξ

$$\int\limits_{-\xi}^{\eta_0} \frac{F_i(\xi, \eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = 0 \quad \text{при } \eta_0 > \eta^*(\xi)$$

Поскольку в силу (2.5) $F_i(\xi, \eta)$ известны при $\eta < \eta^*(\xi)$, это уравнение перепишем в виде

$$\int\limits_{\eta^*(\xi)}^{\eta_0} \frac{F_i(\xi, \eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}} = -\int\limits_{-\xi}^{\eta^*(\xi)} \frac{f_i(\xi, \eta)\,d\eta}{\sqrt{\eta_0 - \eta}}$$

В физических переменных x, t решение этого интегрального уравнения Абеля приводится к виду

$$(2.10)\qquad F_i(x_0,t_0)=C_i^+f_i\equiv\frac{1}{\pi\sqrt{x_0-l(t^*)}}\int\limits_{x_0-v_it_0}^{l(t^*)}f_i\left(x,\,t_0\,\frac{x_0-x}{v_i}\right)\frac{\sqrt{l(t^*)-x}}{x_0-x}\,dx$$

где t^* — решение уравнения

$$v_it_0-x_0=v_it^*-l(t^*)$$

Теперь уравнения (2.10), (2.6), (2.7) дают решение задачи для полубесконечной трещины. Из (2.10), в частности, получаем

$$m_i(t_0)=\frac{\sqrt{2\,(1-v\,(t_0)/v_i)}}{\pi}\int\limits_{l(t_0)-v_it_0}^{l(t_0)}f_i\left(x,t_0-\frac{l\,(t_0)-x}{v_i}\right)\frac{dx}{\sqrt{l\,(t_0)-x}}$$

Или, в силу (2.8)

$$(2.11)\qquad k_i(t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\delta_{i3}\sqrt{\frac{1-v\,(t)}{v_3}}+\right.$$

$$\left.+(1-\delta_{i3})\,S\left(-\frac{1}{v\,(t)}\right)\frac{(1-v\,(t)/c)\sqrt{1-v\,(t)/v_i}}{\sqrt{1-v\,(t)/a}\,\sqrt{1-v\,(t)/b}}\right]\int\limits_0^{v_it}f_i\left(l\,(t)-x,\,t-\frac{x}{v_i}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

В выражении для k_3 можно, очевидно, писать p_3 вместо f_3, поскольку в силу (2.6) эти функции совпадают.

Теперь можно, в частности, обосновать результаты Фройнда. Выражение в скобках в формуле (2.11) зависит лишь от скорости распространения трещины $v\,(t)$ и обращается в единицу при $v\,(t)=0$. В то же время величины

$$k_i^\circ(l,\,t)=\frac{\sqrt{2}}{\pi}\int\limits_0^{v_it}f_i\left(l-x,\,t-\frac{x}{v_i}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}$$

зависят от положения края трещины l как от параметра и представляют собой, как легко догадаться, коэффициенты интенсивности напряжений, вычисленные для тех же нагрузок, но для неподвижной трещины, край которой с самого начала находится в точке $x=l$. Таким образом, выражение (2.11) можно переписать в виде

$$(2.12)\qquad k_i\,(t)=K_i\,(v\,(t))\,k^\circ_i\,(l\,(t),\,t)$$

$$K_i\,(v)=\delta_{i3}\sqrt{1-\frac{v\,(t)}{b}}+(1-\delta_{i3})\,S\left(-\frac{1}{v\,(t)}\right)\frac{(1-v\,(t)/c)\sqrt{1-v\,(t)/v_i}}{\sqrt{1-v\,(t)/a}\,\sqrt{1-v\,(t)/b}}$$

Выражение (2.12) формально совпадает с результатами, полученными Фройндом для частных случаев статической нагрузки [3] и падения на трещину плоской волны [4], и является обобщением его результатов на случай полубесконечной трещины под действием произвольных зависящих от времени нагрузок.

3. Решение для конечной трещины. Решение (2.10) справедливо также и для трещины конечной длины до момента времени, когда волны от левого края трещины достигнут правого края, т. е. при t, меньшем чем t_1^+, где t_1^+ — решение уравнения

$$(3.1)\qquad l_+(t_1^+)-at_1^+=l_-(0)$$

При этом условии в формулах (2.6) и (2.10) (где, конечно, вместо $l(t)$ нужно везде писать $l_+(t)$) интегрирование производится по поверхности трещины. В общем случае напряжения при $x > l_+(t)$ выразятся в виде, аналогичном (2.7)

$$\sigma_i(x, t) = (A_i^+)^{-1} F_i^+(x, t) \tag{3.2}$$

Значения F_i^+ при $x > l_+(t)$ выражаются через значения при $x < l_+(t)$ уравнением (2.10)

$$F_i^+(x_0, t_0) = C_i^+ F_i^+ \tag{3.3}$$

где вместо $l(t)$, t^* пишем $l_+(t)$, t_+^*, а значения F_i^+ при $x < l_+(t)$ выражаются через значения $\sigma_i(x, t)$ при $x < l_+(t)$ соотношением (2.4)

$$F_i^+(x, t) = \mathrm{A}_i^+ \sigma_i(x, t) \tag{3.4}$$

Аналогично, повторяя рассуждения п. 2, получим, что напряжения при $x < l_-(t)$ выражаются в виде

$$\sigma_i(x, t) = (\mathrm{A}_i^-)^{-1} F_i^- \equiv F_i^-(x, t) + (1 - \delta_{i3}) \times \\ \times \frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial t} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \{S(-s)\} \frac{c^{-1} - s}{\sqrt{s - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}} \int_0^{t/s} F_i^-(x + \eta, t - s\eta)\, d\eta ds \tag{3.5}$$

Значения $F_i^-(x, t)$ при $x < l_-(t)$ выражаются через значения при $x > l_-(t)$ уравнением

$$F_i^-(x_0, t_0) = \mathrm{C}_i^- F_i^- \equiv \\ \equiv -\frac{1}{\pi\sqrt{l_-(t_-^*) - x_0}} \int_{x_0 + v_i t_0}^{l_-(t_-^*)} F_i^-\left(x, t_0 + \frac{x_0 - x}{v_i}\right) \frac{\sqrt{x - l_-(t_-^*)}}{x_0 - x}\, dx \tag{3.6}$$

где t_-^* — решение уравнения

$$v_i t_0 + x_0 = v_i t_-^* + l_-(t_-^*) \tag{3.7}$$

а значения $F_i^-(x, t)$ при $x > l_-(t)$ выражаются через $\sigma_i(x, t)$ при $x > l_-(t)$ соотношением, аналогичным (2.4)

$$F_i^-(x, t) = \mathrm{A}_i^- \sigma_i \equiv \sigma_i(x, t) - \\ - (1 - \delta_{i3}) \frac{\partial}{\partial t}\Big[D(-c^{-1})\sqrt{c^{-1} - a^{-1}}\sqrt{c^{-1} - b^{-1}} \int_0^{ct} \sigma_i(x + \eta, t - \\ - c^{-1}\eta)\, d\eta + \frac{1}{2\pi} \int_{a^{-1}}^{b^{-1}} \{D(-s)\} \frac{\sqrt{s - a^{-1}}\sqrt{b^{-1} - s}}{c^{-1} - s} \int_0^{t/s} \sigma_i(x + \eta, t - s\eta)\, d\eta ds\Big] \tag{3.8}$$

При $t < t_1^-$, где t_1^- — решение уравнения

$$l_-(t_1^-) + a t_1^- = l_+(0) \tag{3.9}$$

интегрирование в (3.6) и (3.6) происходит по поверхности трещины, где $\sigma_i(x, t)$ заданы и равны $-p_i(x, t)$, так что соотношения (3.5) — (3.8) дают непосредственно значения $\sigma_i(x, t)$ при $x < l_-(t)$. Если эти значения вычислены, то соотношения (3.2) — (3.4) позволяют вычислить $F_i^+(x, t)$ и $\sigma_i(x, t)$ в интервале времени $t_1^+ < t < t_2^+$, где t_2^+ — решение уравнения

$$(3.10) \qquad l_+(t_2^+) - a(t_2^+ - t_1^-) = l_-(t_1^-)$$

Аналогично, после вычисления $\sigma_i(x, t)$ при $x > l_+(t)$ для $t < t_1^+$, уравнения (3.5), (3.6) позволяют вычислить $\sigma_i(x, t)$ при $x < l_-(t)$ и $t_1^- < t < t_2^-$, где t_2^- — решение уравнения

$$(3.11) \qquad l_-(t_2^-) + a(t_2^- - t_1^+) = l_+(t_1^+)$$

Вообще, используя поочередно формулы (3.2) — (3.4) и (3.5) — (3.8), можно вычислить напряжения вне трещины через нагрузки на ее поверхности в конечное число шагов. Эта процедура вычисления напряжений на продолжении трещины соответствует многократной дифракции волн на краях трещины.

Коэффициенты интенсивности напряжений на краях трещины выражаются в виде, аналогичном (2.11)

$$(3.12) \qquad k_i^{\pm}(t) = \frac{\sqrt{2}}{\pi}\left[\delta_{i3}\sqrt{1 \mp \frac{l_2^{\cdot}(t)}{b}} + (1 - \delta_{i3})\, S\left(\mp\frac{1}{l_{\pm}^{\cdot}}(t)\right) \times \right.$$
$$\left. \times \frac{(1 \mp l_{\pm}^{\cdot}(t)/c)\sqrt{1 \mp l_{\pm}^{\cdot}(t)/v_i}}{\sqrt{1 \mp l_{\pm}^{\cdot}(t)/a}\sqrt{1 \mp l_{\pm}^{\cdot}(t)/b}} \int_0^{v_i t} F_i^{\pm}\left(l_{\pm}(t) \mp x, t - \frac{x}{v_i}\right)\frac{dx}{\sqrt{x}}\right]$$

Определим последовательность моментов времени $t_k^{\pm}$ рекуррентными соотношениями

$$(3.13) \qquad t_0^{\pm} = 0, \quad l_{\pm}(t_k^{\pm}) - l_{\mp}(t_{k-1}^{\mp}) = \pm\, a(t_k^{\pm} - t_{k-1}^{\mp})$$

Тогда, если закон распространения трещины $l_{\pm}(t)$ уже вычислен для $t < t_{k-1}^{\pm}$, то для $t_{k-1}^{\pm} < t \leqslant t_k^{\pm}$ функции $l_{\pm}(t)$ найдутся как решения дифференциальных уравнений, получающихся подстановкой значений (3.17) для коэффициентов интенсивности напряжений в условие разрушения (0.1), где следует положить $v = \pm\, l_{\pm}^{\cdot}(t)$.

Таким образом, соотношения (0.1), (3.2), (3.4) — (3.8) и (3.12) позволяют получить полное решение задачи о распространении трещины для любого момента времени. Зная $\sigma_i(x, t)$, можно затем вычислить смещения в произвольной точке среды по формулам (1.7).

Численная реализация этого решения и получение физических выводов при конкретном виде нагрузок будет представлять весьма сложную задачу. Действительно, даже при $t < t_1^{\pm}$ для получения напряжений $\sigma_i(x, t)$ вне трещины требуется вычисление пятикратных интегралов, и для получения коэффициентов интенсивности — трехкратных. По-видимому, для получения напряжений удобнее использовать вместо этого аналитического решения разностные методы. Однако последние обладают тем недостатком, что не позволяют непосредственно получить коэффициенты интенсивности напряжений и, следовательно, изучить закон движения трещины. Вероятно, наиболее перспективным было бы использование комбинации разностного метода для расчета напряжений с аналитическим выражением (3.12) для коэффициентов интенсивности напряжений.

В заключение заметим, что при $i = 3$ решение упрощается и сводится к полученному в работе [2].

Автор благодарит В. И. Осауленко за ценные дискуссии.

Поступила 5 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Костров Б. В., Никитин, Л. В., Флитман Л. М.* Механика хрупкого разрушения. Изв. АН СССР, МТТ, 1969, № 3.
2. *Костров Б. В.* Неустановившееся распространение трещины продольного сдвига. ПММ, 1966, т. 30, вып. 6.
3. *Freund L. B.* Crack propagation in an elastic solid subjected to general loading. II Non-uniform rate of extension. J. Mech. and Phys. Solids, 1972, vol. 20, No. 3.
4. *Freund L. B.* Crack propagation in elastic solid subjected to general loading. III Stress wave loading. J. Mech. and Phys. Solids, 1973, vol. 21, No. 2.