

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ НЕОДНОРОДНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

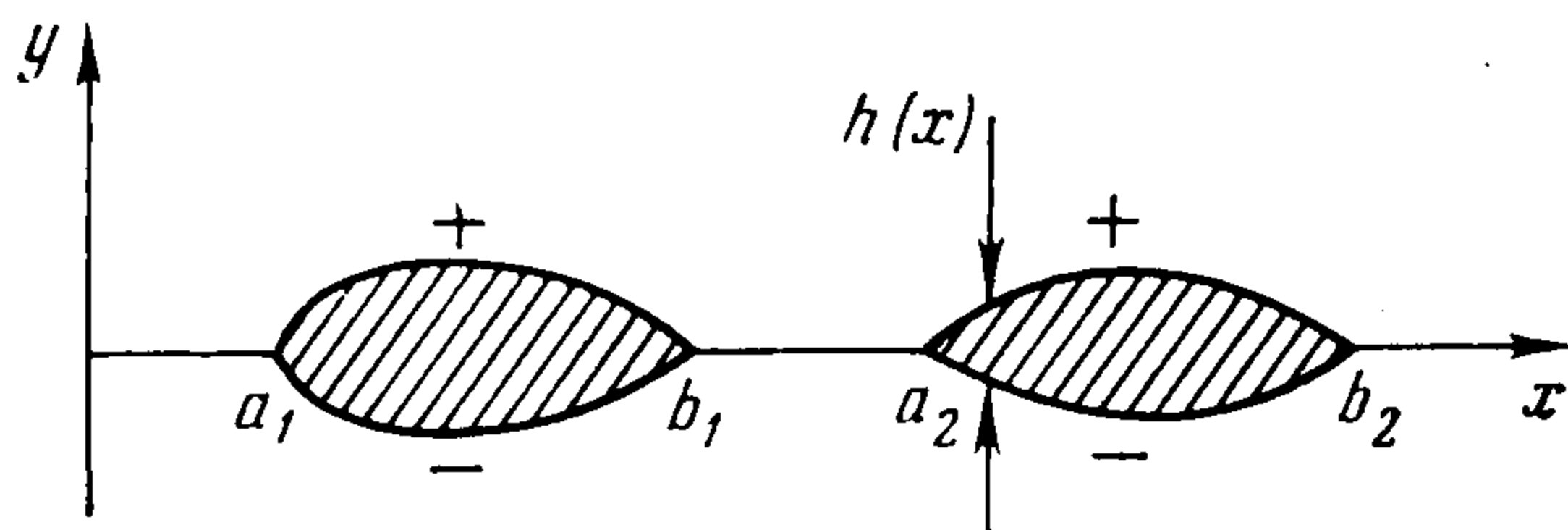
О. В. Соткилава, Г. П. Черепанов

(Москва)

В рамках плоской задачи теории упругости рассматривается равновесие упругой плоскости с тонкими инородными упругими включениями, расположенными вдоль одной прямой. Дается постановка краевых задач на основе подхода, заимствованного из теории тонкого крыла. Излагается эффективный метод точного решения одного общего класса задач указанного типа. Рассматриваются решения некоторых конкретных задач. Анализируется влияние включений на прочность и формулируется критерий начала хрупкого разрушения.

1. Постановка краевой задачи. Во многих материалах, представляющих практический интерес, часто встречаются тонкие упругие включения из другого материала. Таковы, например, прослойки графита в чугунах, зоны окисленного металла в сплавах, слои малопрочной глины или песка в тектонических трещинах, сварные швы и т. д. Включения в основном материале приводят к концентрации напряжений, оказывающей существенное влияние на прочностные свойства материала в целом.

Рассмотрим деформацию безграничного упругого однородного и изотропного пространства с произвольным числом тонких цилиндрических включений из другого упругого материала. Пусть плоскость xy — некоторое поперечное сечение этих цилиндров. Предполагается, что каждое из этих включений в плоскости xy имеет ось симметрии, совпадающую с осью x (фиг. 1). Напряжения и деформации в рассматриваемых ниже задачах считаем независимыми от координаты z (комбинация плоской деформации и продольного сдвига).



Фиг. 1

Обозначим через $h(x)$ толщину включения, считая, что в прилегающих точках границы основного материала и включения имеют место условия жесткого сцепления. Сама операция сопряжения различных материалов обычно сопровождается возникновением напряжений даже в отсутствие внешних нагрузок; эти напряжения будем называть начальными или технологическими.

Пусть для каждого включения выполняются следующие условия:-

$$(1.1) \quad h(x) \ll 2l, \quad |\partial h / \partial x| \ll 1$$

где $2l$ — длина включения. В этом случае для эффективного решения задачи теории упругости можно применить следующий прием, заимство-

ванный из теории тонкого крыла [1]: сносим граничные условия с границ включения на ось x , опуская в граничных условиях малые величины, и решаем получающуюся краевую задачу для совокупности L соответствующих математических разрезов вдоль оси x . Прибавляя к начальным координатам материальной точки ее смещение, полученное из приближенного решения, находим положение этой точки в деформированном состоянии.

Внешние нагрузки будем считать приложенными лишь на бесконечности. Поэтому условия равновесия тонких включений будут иметь вид

$$(1.2) \quad [\sigma_y] = [\tau_{xy}] = [\tau_{xz}] = 0 \quad \text{на } L$$

Здесь $\sigma_x, \sigma_y, \tau_{xy}, \tau_{xz}, \tau_{yz}$ — напряжения; величина $[A]$ означает разность $A^+ - A^-$. Знаки плюс и минус отвечают значениям соответствующих функций на верхнем и нижнем берегах разрезов L , т. е. на верхней и нижней границах включений. Следовательно, напряжения σ_y, τ_{xy} и τ_{xz} непрерывны на разрезах L ; поэтому можно их писать, опуская индексы плюс и минус.

Закон Гука для тонких упругих включений можно записать так:
при $y = 0, x$ на L

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \sigma_y &= \lambda_1 [v] + 2\lambda_1 v_0(x) & \tau_{xy} &= \lambda_2 [u] + 2\lambda_2 u_0(x), & \tau_{yz} &= \lambda_3 [w] + \\ &+ 2\lambda_3 w_0(x) \end{aligned}$$

$$\left(\lambda_1 = \frac{E_1}{h(x)}, \quad \lambda_2 = \frac{\mu_2}{h(x)}, \quad \lambda_3 = \frac{\mu_3}{h(x)} \right)$$

Здесь E_1, μ_2, μ_3 — модуль Юнга и модули сдвига ортотропного включения, характеризующие его работу на нормальный разрыв, поперечный и продольный сдвиг соответственно; u, v, w — компоненты вектора смещения материальной точки в основном материале; $2u_0, 2v_0, 2w_0$ — компоненты заданного скачка смещения вдоль разрезов L (натяг).

Уравнения (1.3) представляют собой граничные условия сформулированной задачи. Если внешние нагрузки равны нулю, получается задача об определении начальных напряжений, возникающих из-за технологического натяга.

Например, предположим, что вначале в упругом теле были вырезаны тонкие полости, а затем в эти полости были вставлены включения из другого упругого материала, по форме в точности совпадающие с формой соответствующих полостей, однако имеющие более низкую температуру по сравнению с основным материалом. После выравнивания температур натяг, очевидно, будет следующим:

$$2v_0 = 2\alpha h \Delta T, \quad 2u_0 = 2w_0 = 0$$

Здесь ΔT — разность начальных температур, α — температурный коэффициент линейного расширения.

Величины λ_1, λ_2 и λ_3 аналогичны коэффициентам постели в теории винклеровского основания.

Решение граничной задачи (1.3) можно представить [2] в виде суммы решений следующих трех краевых задач для верхней полуплоскости, соответствующих нормальному разрыву, поперечному и продольному сдвигу.

1°. *Нормальный разрыв*

$$(1.4) \quad \begin{aligned} &\text{при } y = 0, \quad x \text{ на } L \quad \sigma_y = 2\lambda_1 v^+ + 2\lambda_1 v_0 \\ &\text{при } y = 0 \quad \tau_{xy} = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}$$

2°. *Поперечный сдвиг*

$$(1.5) \quad \begin{aligned} &\text{при } y = 0, \quad x \text{ на } L \quad \tau_{xy} = 2\lambda_2 u^+ + 2\lambda_2 u_0 \\ &\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = \tau_{yz} = 0 \end{aligned}$$

3°. *Продольный сдвиг*

$$(1.6) \quad \begin{aligned} &\text{при } y = 0, \quad x \text{ на } L \quad \tau_{xz} = 2\lambda_3 w^+ + 2\lambda_3 w_0 \\ &\text{при } y = 0 \quad \sigma_y = \tau_{xy} = 0 \end{aligned}$$

Заданные напряжения на бесконечности также можно всегда представить в виде суперпозиции напряжений, симметричных и антисимметричных относительно оси x . Краевые задачи (1.4) и (1.5) отвечают плоской деформации, причем в случае 1° смещение v , а в случае 2° смещение u , будут нечетными функциями y . В случае 3° (продольный сдвиг) смещение является нечетной функцией y .

Приведем представления Колосова — Мусхелишвили [3] через комплексные потенциалы $\Phi(z)$, $\Psi(z)$ и $f(z)$, являющиеся аналитическими функциями комплексного переменного $z = x + iy$ в области, занятой телом, т. е. во внешности разрывов L

$$(1.7) \quad \begin{aligned} \sigma_x + \sigma_y &= 4 \operatorname{Re} \Phi(z) \\ \sigma_y - i\tau_{xy} &= \Phi(z) + \overline{\Phi(z)} + \overline{\Omega(z)} + (z - \bar{z}) \Phi'(z) \\ 2\mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \kappa \Phi(z) - \overline{\Phi(z)} - \overline{\Omega(z)} - (z - \bar{z}) \Phi'(z) \\ w = \operatorname{Re} f(z), \quad \tau_{xz} + i\tau_{yz} &= \mu \overline{f'(z)} \\ \Omega(z) &= z\Phi'(z) + \Psi(z) \end{aligned}$$

Здесь μ и ν — модуль сдвига и коэффициент Пуассона основного материала, $\kappa = 3 - 4\nu$ — для плоской деформации и $\kappa = (3 - \nu) / (1 + \nu)$ — для плоского напряженного состояния.

Будем считать для простоты, что напряжения на бесконечности равны нулю. Метод суперпозиции позволяет свести к этому случаю задачу с любым ненулевым напряженным состоянием на бесконечности. В этом случае при помощи представлений (1.7) для соответствующих задач (1.4) — (1.6) можно получить следующие формулы.

1°. *Нормальный разрыв*

$$(1.8) \quad \begin{aligned} &f'(z) = 0, \quad \Omega(z) = 0 \\ &\text{при } y = 0 \quad \sigma_x = \sigma_y = 2 \operatorname{Re} \Phi(z), \quad \nu = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \operatorname{Im} \varphi(z) \end{aligned}$$

2°. *Поперечный сдвиг*

$$(1.9) \quad \begin{aligned} &f'(z) = 0, \quad 2\Phi(z) + \Omega(z) = 0 \\ &\text{при } y = 0 \quad \tau_{xy} = \operatorname{Im} \Omega(z), \quad u = -\frac{\kappa + 1}{4\mu} \operatorname{Re} \omega(z) \end{aligned}$$

3°. Продольный сдвиг

$$(1.10) \quad \Phi(z) = 0, \quad \Omega(z) = 0$$

при $y = 0 \quad \tau_{yz} = -\mu \operatorname{Im} f'(z), \quad w = \operatorname{Re} f(z)$

Здесь

$$(1.11) \quad \omega'(z) = \Omega(z), \quad \varphi'(z) = \Phi(z)$$

Как видно, любая линейная краевая задача теории упругости может быть сведена к линейной комбинации нормального разрыва, продольного и поперечного сдвига, если граница тела расположена вдоль оси x . Указанный прием с разбиением любой краевой задачи такого типа на сумму трех задач (для нормального разрыва, продольного и поперечного сдвига) особенно удобен при решении конкретных задач, так как математические проблемы для каждой из этих задач эквивалентны. Достаточно получить решение, например для нормального разрыва; решения для других случаев получаются при помощи очевидных подстановок. Поэтому в дальнейшем ограничимся рассмотрением только нормального разрыва.

Используя соотношения (1.8), из граничных условий (1.4) получаем следующую краевую задачу для определения функции $\varphi(z)$:

$$(1.12) \quad \begin{aligned} &\text{при } y = 0, \quad x \text{ на } L \\ &\operatorname{Re} \varphi'(z) = \frac{\kappa+1}{2\mu} \lambda_1(x) \operatorname{Im} \varphi(z) + \lambda_1(x) v_0(x) \end{aligned}$$

$$\text{при } y = 0, \quad x \text{ вне } L \quad \operatorname{Im} \varphi(z) = 0$$

Решение краевой задачи (1.12) для произвольной функции $\lambda_1(x)$ в замкнутом виде недостижимо. По-видимому, впервые с задачами такого типа столкнулся Пуанкаре при решении [некоторых проблем гидродинамической теории приливов.

Ограничимся решением некоторых классов краевых задач (1.12); эти решения можно найти в замкнутом виде и они охватывают практически наиболее важные случаи.

2. Эффективное решение одного общего класса краевых задач. Рассмотрим краевую задачу (1.12) с коэффициентом $\lambda_1(x)$ следующего вида:

$$(2.1) \quad \lambda_1(x) = iX^+(x) \frac{Q(x)}{P(x)}$$

Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — произвольные полиномы с действительными коэффициентами, функция $X^+(x)$ есть значение аналитической вне L функции $X(z)$ на верхнем берегу разрывов

$$X(z) = \prod_{i=1}^n \sqrt{(z-a_i)(z-b_i)} \quad (X(z) \rightarrow z^n \text{ при } z \rightarrow \infty)$$

(n — число разрывов, a_i и b_i — абсциссы левого и правого концов i -го разрыва).

Функция $X^+(x)$ мнимая на L и действительна вне L . Поэтому новая функция $F(z)$

$$(2.2) \quad F(z) = \varphi'(z) - \frac{\kappa+1}{2\mu} X(z) \frac{Q(z)}{P(z)} \varphi(z)$$

будет аналитичной вне L , за исключением нулей полинома $P(z)$ (где она будет иметь полюсы соответствующего порядка) и, может быть, бесконечно удаленной точки.

Для функций $\lambda_1(x)$ вида (2.1) краевая задача (1.12) примет вид

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad x \text{ на } L \quad \operatorname{Re} F(z) &= \lambda_1(x)v_0(x) \\ \text{при } y = 0, \quad x \text{ вне } L \quad \operatorname{Im} F(z) &= 0 \end{aligned}$$

Решение этой задачи дается формулой Келдыша — Седова, несколько модифицированной на случай наличия полюсов у искомой [функции $F(z)$]. Функция $\varphi(z)$ определяется затем из обыкновенного линейного дифференциального уравнения (2.2) первого порядка. Чтобы не загромождать изложение, более подробные выкладки проведем только для случая одного включения.

Пусть толщина упругого включения меняется по закону

$$(2.4) \quad h(x) = \frac{2P(x)}{i\sqrt{x^2 - l^2}Q(x)} \quad (-l < x < l)$$

Здесь $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые полиномы с действительными коэффициентами.

Аналитическая функция $F(z)$

$$(2.5) \quad F(z) = \varphi'(z) - \frac{(\kappa + 1)E_1Q(z)}{2\mu P(z)}\sqrt{z^2 - l^2}$$

должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$(2.6) \quad \begin{aligned} \text{при } y = 0, \quad |x| < l \quad \operatorname{Re} F(z) &= \lambda_1(x)v_0(x) \\ \text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \operatorname{Im} F(z) &= 0 \end{aligned}$$

Решение краевой задачи (2.6) можно записать в следующем виде:

$$F(z) = \frac{1}{\pi i\sqrt{z^2 - l^2}} \int_{-l}^{+l} \frac{\lambda_1(x)v_0(x)\sqrt{x^2 - l^2}}{x - z} dx + \frac{L(z)}{P(z)\sqrt{z^2 - l^2}}$$

где $L(z)$ — некоторый полином с действительными коэффициентами. Решая дифференциальное уравнение первого порядка (2.5) относительно $\varphi(z)$, находим

$$(2.7) \quad \varphi(z) = \frac{1}{\varphi_0(z)} \int F(z)\varphi_0(z) dz_0$$

Здесь

$$\varphi_0(z) = \exp \left\{ - \int \frac{(\kappa + 1)E_1\sqrt{z^2 - l^2}}{2\mu P(z)} Q(z) dz \right\}$$

Полином $L(z)$ определяется из условия исчезновения функции $\varphi(z)$ на бесконечности (так как главный вектор сил, приложенных к включению, считается равным нулю) и из условий аналитичности функции $\varphi(z)$ в нулях полинома $P(z)$.

Функцией типа (2.4) можно с любой точностью аппроксимировать любую непрерывную функцию $h(x)$ на любом конечном интервале, если

на концах интервала она обращается в нуль. Поэтому решение рассмотренного класса задач можно использовать в качестве приближенного эффективного метода решения и в общем случае. (Этот метод был указан в книге [2].)

Простым переобозначением случай неоднородного включения, когда $E_1 = E_1(x)$, может быть приведен к предыдущему.

Представляет интерес также случай периодической системы включений вдоль оси x . В этом случае эффективное решение краевой задачи (1.12) может быть получено для коэффициентов $\lambda_1(x)$ такого вида:

$$\lambda_1(x) = iX^+(x) \frac{Q(\sin x)}{P(\sin x)}$$

Функции $X(z)$ и $F(z)$ будут следующими:

$$X(z) = \sqrt{\sin^2 \pi z / 2L - \sin^2 \pi l / 2L}$$

$$F(z) = \varphi'(z) - \frac{\kappa + 1}{2\mu} X(z) \frac{Q(\sin z)}{P(\sin z)} \varphi_1(z)$$

Здесь $2l$ — длина одного включения, $2L$ — период.

Краевая задача (2.3) для периодической системы разрезов L при помощи конформного отображения

$$(2.8) \quad w = \sin \pi z / 2L$$

сводится к уже рассмотренному случаю одного разреза на плоскости w .

3. Полубесконечное включение. 1°. Упругое включение в форме тонкого клина. Пусть толщина включения меняется по закону

$$(3.1) \quad h(x) = -2\alpha x \quad (\alpha \ll 1, x < 0)$$

где α — угол раствора клина. В этом случае функция $\lambda_1(x)$ равна

$$(3.2) \quad \lambda_1(x) = E_1 / 2\alpha x$$

а соответствующая краевая задача для отыскания функции $\varphi(z)$ имеет вид

$$(3.3) \quad \begin{array}{ll} \text{при } y = 0, x < 0 & \operatorname{Re} \varphi'(z) = -\frac{(\kappa + 1) E_1}{4\mu\alpha x} \operatorname{Im} \varphi(z) \\ \text{при } y = 0, x > 0 & \operatorname{Im} \varphi(z) = 0 \end{array}$$

Краевая задача (3.3) допускает следующую группу преобразований:

$$(3.4) \quad x' = C_1 x, \quad \varphi' = C_2 \varphi$$

где C_1 и C_2 — произвольные действительные параметры. Поэтому в рассматриваемом случае решение граничной задачи (3.3) имеет вид [2]

$$(3.5) \quad \varphi(z) = Az^\lambda$$

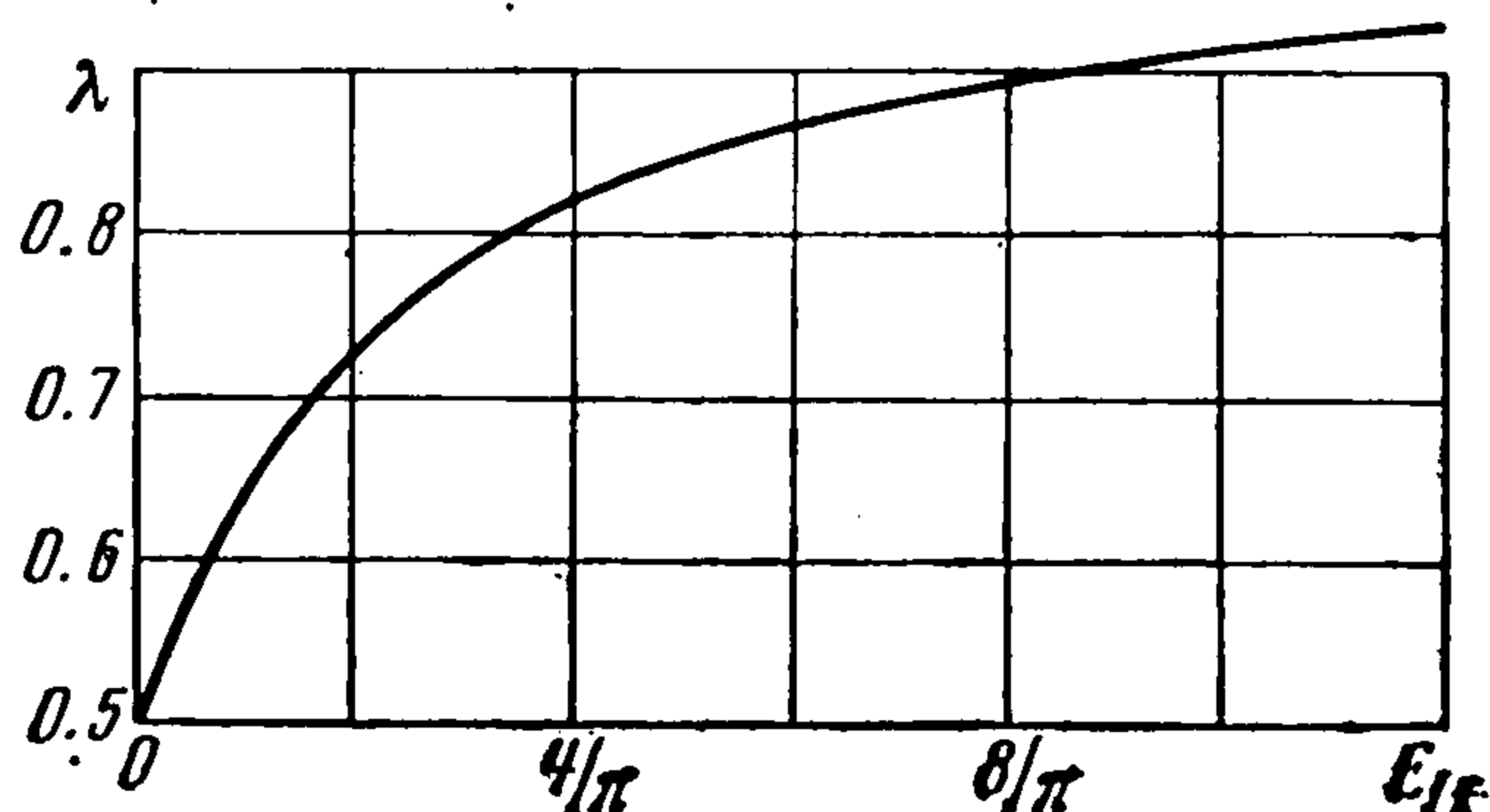
где A — произвольный действительный коэффициент. Подставляя (3.5) в (3.3), получим следующее характеристическое уравнение для определения λ :

$$(3.6) \quad \frac{4\mu\alpha\lambda}{(\kappa + 1)E_1} = -\operatorname{tg} \pi\lambda$$

Корни уравнения (3.6), как видно из графического представления решения, находятся на сегментах $(1/2, 1)$, $(3/2, 2)$, . . . $(-1/2, -1)$, $(-3/2, -2)$. . . действительной оси, по одному на каждом из этих сегментов. Как следует из теоремы об однородных решениях [2], решению корректной краевой задачи отвечает единственный корень, расположенный на отрезке $(1/2, 1)$. Зависимость величины этого корня от безразмерного коэффициента упругости включения

$$E_{1*} = \frac{(\kappa + 1) E_1}{4\mu\alpha}$$

изображена на фиг. 2. Коэффициент A , как вообще в задачах класса N , считается заданным заранее [2].



Фиг. 2

Аналогичное автомодельное решение имеет место для упругого включения в форме клина с произвольным углом раствора 2α , а также для любого числа различных включений такого типа. В каждой из этих задач получается свое трансцендентное уравнение для определения числа λ .

2°. Упругое включение параболической формы. Пусть толщина меняется по закону

$$h(x) = \beta \sqrt{|x|} \quad (x < 0)$$

где β — заданный действительный параметр толщины.

Функция $F(z)$

$$(3.7) \quad F(z) = \varphi'(z) - \frac{(\kappa + 1) E_1}{2\mu \sqrt{z} \beta} \varphi(z)$$

должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$\text{при } y = 0, \quad x < 0 \quad \operatorname{Re} F(z) = 0$$

$$\text{при } y = 0, \quad x > 0 \quad \operatorname{Im} F(z) = 0$$

Решение этой краевой задачи определяется с точностью до произвольных действительных множителей K_I и B

$$F(z) = \frac{K_I}{2 \sqrt{2\pi z}} + B \sqrt{z}$$

Решая уравнение (3.7) относительно $\varphi(z)$ и определяя B , найдем (предполагается, что при $x \rightarrow \infty, y = 0$ будет $\sigma_x = \sigma_y$)

$$\varphi(z) = \frac{K_I}{\sqrt{2\pi}} \left[\sqrt{z} + \frac{(\kappa + 1) E_1}{2\mu\beta} z \right]$$

4. Конечные включения частного вида. Пусть вдоль контура упругого включения имеется некоторый заданный скачок смещения, например из-за разности начальных температур включения и основного материала; на бесконечности напряжение σ_y постоянно и равно σ_y^∞ , а остальные напряжения равны нулю. В рассматриваемом случае краевая задача примет вид

$$(4.1) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l$$

$$\operatorname{Re} \varphi'(z) = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \lambda_1(x) \operatorname{Im} \varphi(z) + E_1 \alpha \Delta T - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty$$

$$\text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \operatorname{Im} \varphi(z) = 0$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi'(z) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty$$

При $y = 0$ будут справедливы следующие формулы:

$$v = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \operatorname{Im} \varphi(z)$$

$$\alpha_x = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) - \frac{1}{2} \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xy} = 0$$

$$\sigma_y = 2 \operatorname{Re} \varphi'(z) + \frac{1}{2} \sigma_y^\infty, \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$$

1°. *Одно эллиптическое включение.* Пусть толщина включения меняется по закону (β — заданный действительный параметр толщины)

$$(4.2) \quad h(x) = \beta \sqrt{|x^2 - l^2|}, \quad \beta \ll 1 \quad (-l < x < l)$$

Вспомогательная функция

$$(4.3) \quad F(z) = \varphi'(z) - \frac{(\kappa + 1) E_1 \varphi(z)}{2\mu\beta \sqrt{z^2 - l^2}}$$

должна удовлетворять следующим граничным условиям:

$$(4.4) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l$$

$$\operatorname{Re} F(z) = E_1 \alpha \Delta T - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty$$

$$\text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \operatorname{Im} F(z) = 0$$

$$F(z) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty \left[1 - \frac{(\kappa + 1) E_1}{2\mu\beta} \right] \quad \text{при } z \rightarrow \infty$$

Решение краевой задачи (4.4) имеет следующий вид:

$$(4.5) \quad F(z) = a - \frac{bz}{\sqrt{z^2 - l^2}}$$

$$a = \alpha E_1 \Delta T - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty, \quad b = \alpha E_1 \Delta T - \frac{1}{2} \sigma_y^\infty + \frac{(\kappa + 1) E_1 \sigma_y^\infty}{8\mu\beta}$$

Решая уравнение (4.3), находим функцию $\varphi(z)$ в виде (2.7), где интеграл берется в пределах от l до z , функция $F(z)$ дается формулой (4.5), а $\varphi_0(z)$ будет следующей:

$$(4.6) \quad \varphi_0(z) = (z + \sqrt{z^2 - l^2})^{-\lambda}, \quad \lambda = \frac{(\kappa + 1) E_1}{2\mu\beta}$$

При помощи формул (4.1) и (4.6) найдем напряжение σ_y при $y = 0, x > l$

$$\sigma_y = 2\alpha E_1 \Delta T - \frac{2bx}{\sqrt{x^2 - l^2}} + \frac{2\lambda}{\sqrt{x^2 - l^2} \varphi_0(x)} \int_l^x F(x) \varphi_0(x) dx$$

Отметим следующие формулы:

$$(4.7) \quad \text{при } z \rightarrow l \quad \varphi'(z) = -\frac{b \sqrt{l}}{\sqrt{2(z-l)}} + O(1)$$

$$\text{при } y = 0, \quad x \rightarrow l + \varepsilon_1 \quad \sigma_y = -\frac{b \sqrt{2l}}{\sqrt{x-l}} \quad (\varepsilon_1 \ll l)$$

Сравнивая (4.7) и (3.12), находим

$$K_I = -2b\sqrt{\pi l}$$

2°. *Периодическая система включений.* Рассмотрим упругое тело с периодической системой включений следующей формы (β — постоянная, $\beta \ll 1$):

$$(4.8) \quad h(x) = \beta l \left| \sqrt{\sin^2 \frac{\pi x}{2L} - \sin^2 \frac{\pi l}{2L}} \right|$$

Пусть вдоль разрезов имеется некоторый начальный постоянный скачок смещения, как и в предыдущей задаче; на бесконечности постоянное напряжение σ_y равно σ_y^∞ , а остальные напряжения равны нулю. При помощи преобразования (2.8) перейдем от физической плоскости z на параметрическую плоскость комплексного переменного w . Внешности периодической системы разрезов на плоскости z взаимно-однозначно соответствует бесконечнолистная риманова поверхность w с разрезом вдоль

$$\left(-\sin \frac{\pi l}{2L}, \sin \frac{\pi l}{2L}\right)$$

Используя общий метод решения п.2 и результаты, полученные для включения, решение рассматриваемой задачи можно записать в виде (2.7), где интеграл берется в пределах от l до z , причем

$$(4.9) \quad F(z) = \alpha - b \sin \frac{\pi z}{2L} \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2L} - \sin^2 \frac{\pi l}{2L} \right)^{-1/2}$$

$$\varphi_0(z) = \exp \left\{ -\frac{(\kappa + 1) E_1}{2\mu\beta l} \int_l^z \left(\sin^2 \frac{\pi z}{2L} - \sin^2 \frac{\pi l}{2L} \right)^{-1/2} dz \right\}$$

$$a_1 = \alpha E_1 \Delta T - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty, \quad b = \alpha E_1 \Delta T - \frac{1}{2} \sigma_y^\infty + \frac{(\kappa + 1) E_1 \sigma_y^\infty}{8\mu\beta l}$$

при $z \rightarrow l$ $\varphi'(z) = -b \sqrt{\frac{L}{\pi} \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2L}} \frac{1}{\sqrt{z-l}}$

$$K_I = -2b\sqrt{2L \operatorname{tg} \frac{\pi l}{2L}}$$

3°. *Острое включение.* Пусть толщина одного включения изменяется по закону (удлинённый овал с заостренными концами)

$$(4.10) \quad h(x) = \beta l^{-2} \left| (l^2 - x^2)^{3/2} \right| \quad (\beta \ll 1)$$

По-прежнему будем считать заданными: на разрезе $(-l, +l)$ начальный натяг из-за разности начальных температур, а на бесконечности — постоянное напряжение σ_y^∞ . Решение этой задачи, полученное общим методом п.2, имеет вид (2.7), где интеграл берется в пределах от l до z , причем

$$F(z) = b + \frac{1}{4} \sigma_y^\infty - \frac{bz}{\sqrt{z^2 - l^2}} \quad \left(b = \alpha E_1 \Delta T - \frac{1}{2} \sigma_y^\infty \right)$$

$$\varphi_0(z) = \exp \left\{ -\frac{(\kappa + 1) E_1 z}{2\mu\beta \sqrt{z^2 - l^2}} \right\}$$

при $z \rightarrow l$ $\varphi'(z) = \frac{4\sqrt{2}\mu^2\beta^2 b}{(\kappa + 1)^2 E_1^2 \sqrt{l}} + O(\sqrt{z})$

Как видно, наличие острия у включения устраняет особенности в конце включения.

5. Упругое включение постоянной толщины. Пусть однородное упругое включение имеет постоянную толщину

$$(5.1) \quad h(x) = h = \text{const}$$

Будем считать, что вдоль контура упругого включения имеется некоторый заданный постоянный начальный натяг $2v_0$. На бесконечности напряжение σ_y постоянно и равно σ_y^∞ , а остальные напряжения равны нулю.

Основные соотношения и краевая задача в данном случае примут следующий вид:

$$(5.2) \quad \text{при } y = 0 \quad v = \frac{\kappa + 1}{2\mu} \text{Im } \varphi(z), \quad \sigma_y - \sigma_x = \sigma_y^\infty$$

$$\sigma_y = 2\text{Re } \varphi'(z) = 1/2 \sigma_y^\infty$$

$$(5.3) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l$$

$$\text{Re } \varphi'(z) = \frac{\varepsilon}{h} \text{Im } \varphi(z) + \delta$$

$$\text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \text{Im } \varphi(z) = 0$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi'(z) = 1/4 \sigma_y^\infty$$

Здесь

$$\varepsilon = \frac{E_1(\kappa + 1)}{2\mu}, \quad \delta = \frac{E_1}{h} v_0 - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty$$

Постоянная ε не равна нулю в концах интервала $(-l, +l)$, поэтому ее нельзя аппроксимировать линейной комбинацией функций типа (2.4). Для решения краевой задачи (5.3) будем применять асимптотический метод разложения по малым и большим значениям параметра ε (метод также изложен в книге [2]). Этот метод эффективен и в более общих случаях неоднородной задачи теории упругости, а не только для тонких включений.

1°. *Решение для малых ε .* В случае $\varepsilon \ll 1$ решение граничной задачи (5.3) будем искать в виде

$$(5.4) \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) + \varepsilon \varphi_1(z) + \varepsilon^2 \varphi_2(z) + \dots$$

Здесь $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots$ — искомые функции. Подставляя (5.4) в условие (5.3), можно получить следующую цепочку стандартных краевых задач Дирихле на разрезе $(-l, +l)$:

$$(5.5) \quad (0) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l \quad \text{Re } \varphi_0'(z) = \delta$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_0'(z) = 1/4 \sigma_y^\infty$$

$$(1) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l \quad \text{Re } \varphi_1'(z) = \frac{1}{h} \text{Im } \varphi_0(z)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_1(z) \rightarrow 0$$

$$(2) \quad \text{при } y = 0, \quad |x| < l \quad \text{Re } \varphi_2'(z) = \frac{1}{h} \text{Im } \varphi_1(z)$$

$$\text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_2(z) \rightarrow 0$$

и т. д. Решения этих задач легко найти последовательно, одно за другим, применяя известную формулу Келдыша — Седова.

2°. *Решение для больших ε .* В случае, когда $\varepsilon \gg 1$, решение граничной задачи (5.3) будем искать в виде

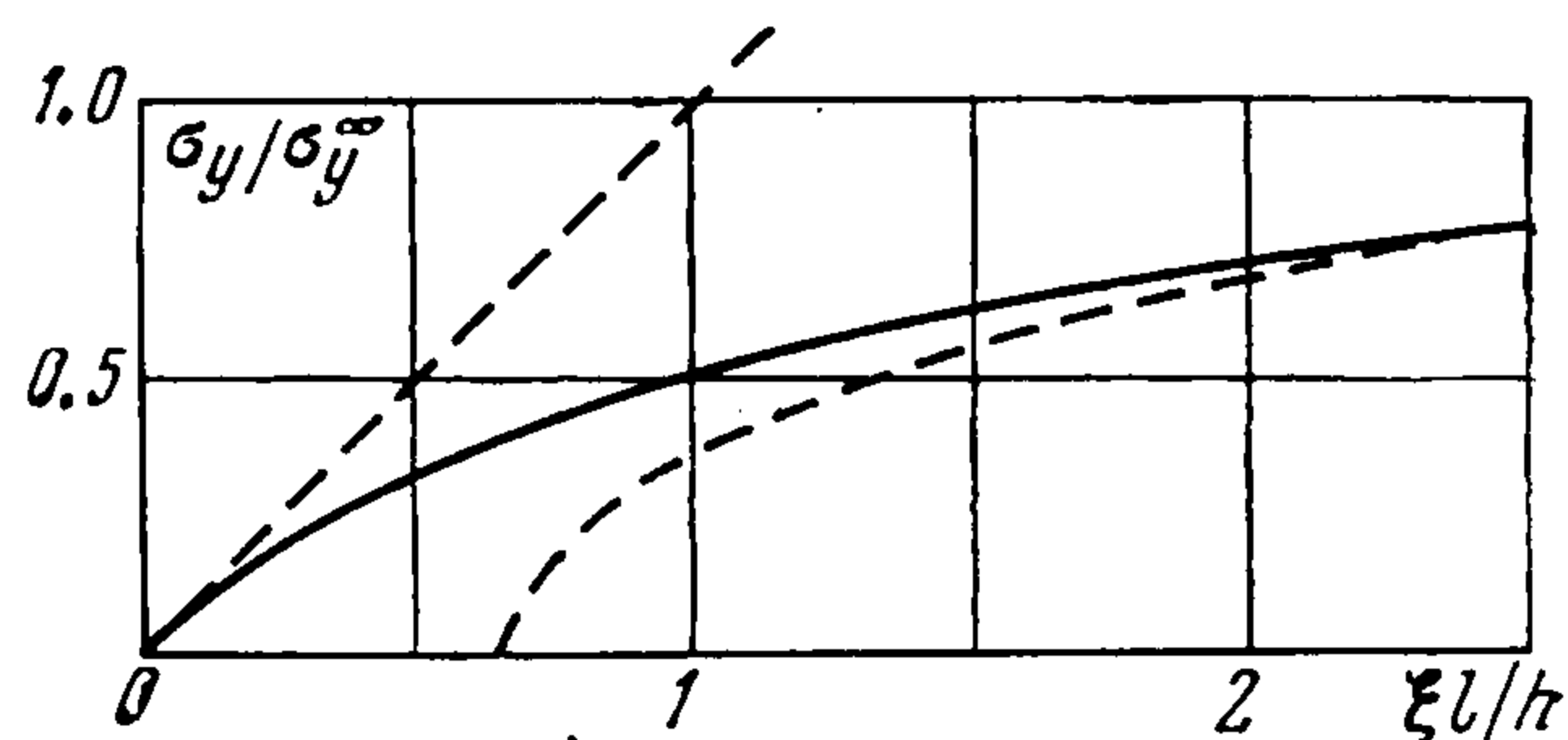
$$(5.6) \quad \varphi(z) = \varphi_0(z) + \frac{1}{\varepsilon} \varphi_1(z) + \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi_2(z)$$

Подставляя (5.6) в условие (5.3), легко получить следующую цепочку стандартных краевых задач Дирихле для полуплоскости:

$$(5.7) \quad \begin{aligned} (0) \quad & \text{при } y = 0 \quad \text{Im } \varphi_0 = 0 \\ & \text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_0'(z) = 1/4 \sigma_y^\infty \\ (1) \quad & \text{при } y = 0, \quad |x| < l \\ & \text{Im } \varphi_1(z) = h \text{Re } \varphi_0' - \delta h \\ & \text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \text{Im } \varphi_1(z) = 0 \\ & \text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_1(z) \rightarrow 0 \\ (2) \quad & \text{при } y = 0, \quad |x| < l \quad \text{Im } \varphi_2(z) = h \text{Re } \varphi_1'(z) \\ & \text{при } y = 0, \quad |x| > l \quad \text{Im } \varphi_2(z) = 0 \\ & \text{при } z \rightarrow \infty \quad \varphi_2(z) \rightarrow 0 \end{aligned}$$

и т. д. Решение этих задач легко найти последовательно, одно за другим.

Для нахождения решения при промежуточных значениях ε следует применить склеивание различных асимптотических разложений при малых и больших ε . В некоторых случаях практически хорошие (т. е. весьма близкие к точным) результаты получаются, если ограничиться только первыми двумя-тремя членами разложений по ε и $1/\varepsilon$. Отметим, что аналогичные методы широко распространены в теории пограничного слоя.



Фиг. 3

Ограничиваясь первым приближением, решение можно записать так:

$$(5.8) \quad \begin{aligned} \text{при } \varepsilon \ll 1 \quad \varphi'(z) &= \delta - \frac{\delta - 1/4 \sigma_y^\infty}{\sqrt{z^2 - l^2}} \left(-z - \frac{2l}{\pi h} \varepsilon z + \varepsilon \frac{z^2 - l^2}{\pi h} \ln \frac{z-l}{z+l} \right) \\ \text{при } z \rightarrow l, \quad \varepsilon \ll 1 \quad \varphi'(z) &= \frac{l \left(\delta - \frac{1}{4} \sigma_y^\infty \right) \left(-1 + \frac{2\varepsilon l}{\pi h} \right)}{\sqrt{2l(z-l)}} \end{aligned}$$

$$(5.9) \quad \text{при } \varepsilon \gg 1 \quad \varphi'(z) = \frac{1}{4} \sigma_y^\infty + \frac{2lh (1/4 \sigma_y^\infty - \delta)}{\pi \varepsilon (z^2 - l^2)}$$

В частности, напряжение σ_y в точке $y = 0, x = 0$ включения равно

$$(5.10) \quad \sigma_y = \begin{cases} 2 \frac{E_1}{h} v_0 - \frac{2l\varepsilon}{h} \left(\frac{E_1 v_0}{h} - \frac{1}{2} \sigma_y^\infty \right) & \text{при } \varepsilon \ll 1 \\ \sigma_y^\infty - \frac{2h}{\pi l \varepsilon} \left(\sigma_y^\infty - 2 \frac{E_1}{h} v_0 \right) & \text{при } \varepsilon \gg 1 \end{cases}$$

На фиг. 3 сплошной линией изображена приблизительная зависимость безразмерного напряжения $\sigma_y / \sigma_y^\infty$ в точке $x = 0, y = 0$ включения в случае $v_0 = 0$ при различных промежуточных значениях безразмерного

параметра $\varepsilon l / h$, полученная склеиванием асимптотик. Пунктирные линии соответствуют асимптотическим формулам (5.10).

6. Анализ хрупкого разрушения тел с тонкими упругими включениями. Согласно общему подходу [2], критерий начала локального хрупкого разрушения тел с тонкими включениями формулируется так: главный коэффициент в разложении функции напряжений в конце включения в момент локального разрушения должен достигнуть некоторой постоянной данного составного материала. Эта постоянная может зависеть только от прочности основного материала и включения, а также от прочности сцепления и от формы включения в его конце; однако она не зависит от формы тела, внешних нагрузок и тому подобных нелокальных факторов.

Используя решения частных задач, полученные в п. 3—5, и критерий локального разрушения, условия отсутствия разрушения можно записать в виде следующих неравенств:

одно эллиптическое включение (формулы (4.6) и (4.7))

$$\sigma_y^\infty - 2\alpha E_1 \Delta T - \frac{(\kappa + 1) E_1 \sigma_y^\infty}{4\mu\beta} < \frac{K_{1c}}{\sqrt{\pi l}}$$

периодическая система включений (формулы (4.9))

$$\sigma_y^\infty - 2\alpha E_1 \Delta T - \frac{(\kappa + 1) E_1 \sigma_y^\infty}{4\mu\beta l} < \frac{K_{1c}}{\sqrt{2L \operatorname{tg} \pi l / 2L}}$$

одно острое включение (формулы (4.10))

$$-\frac{8 \sqrt{2} \mu^2 \beta^2 b}{(\kappa + 1)^2 E_1^2 \sqrt{l}} < \sigma_c$$

одно включение постоянной толщины (формулы (5.8) и (5.9))

$$\text{при } \varepsilon \ll 1 \quad \left(\sigma_y^\infty - 2 \frac{E_1}{h} v_0 \right) \left(1 - \frac{2\varepsilon l}{\pi h} \right) < \frac{K_{2c}}{\sqrt{\pi l}}$$

$$\text{при } \varepsilon \gg 1 \quad \frac{h}{\pi \varepsilon} \left(\frac{1}{2} \sigma_y^\infty - \frac{E_1}{h} v_0 \right) < K_{3c}$$

$$(\varepsilon = E_1(\kappa + 1) / (2\mu))$$

Здесь K_{1c} , K_{2c} , K_{3c} , σ_c — постоянные составного материала, которые должны определяться экспериментально.

Заметим, что постоянная K_{3c} имеет размерность силы, помноженной на длину, а постоянные K_{1c} и K_{2c} имеют размерность силы, умноженной на длину в степени $3/2$. Следует подчеркнуть, что для включений с плавно закругляющимися или обрубленными концами полученные особенности фактически соответствуют некоторой промежуточной асимптотике точного решения, справедливой на расстояниях от конца включения, больших по сравнению с радиусом закругления или толщиной включения, но малых по сравнению с длиной включения.

Поступила 29 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики М., «Наука», 1965.
2. Черепанов Г. П. Механика хрупкого разрушения. М., «Наука», 1974.
3. Мусхелишвили Н. И., Некоторые основные задачи математической теории упругости. М., «Наука», 1966.