Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ ВНЕШНЕЙ ОСНОВНОЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ

В. И. Фабрикант
(Ульяновск)

Предлагается точное решение основной внешней смешанной задачи с круговой линией раздела граничных условий для трансверсально изотропного полупространства. Внутренняя основная смешанная задача для изотропного полупространства рассматривалась в работах [1, 2].

1. Рассмотрим трансверсально изотропное полупространство $z \geqslant 0$, плоскости изотропии которого параллельны границе. Под внешней основной смешанной задачей будем понимать задачу со следующими условиями на границе $z = 0$:

$$
\begin{array}{ll}
\sigma_z = \sigma(\rho, \varphi), & \tau_{zx} = \tau_{zx}(\rho, \varphi) \\
\tau_{yz} = \tau_{yz}(\rho, \varphi) & (\rho \leqslant a) \\
w = w(\rho, \varphi), & u_x = u_x(\rho, \varphi) \\
u_y = u_y(\rho, \varphi) & (\rho > a)
\end{array}
$$

Введем комплексные касательные перемещения $u = u_x + iu_y$ и касательные напряжения $\tau = \tau_{zx} + i\tau_{yz}$, $\bar{\tau} = \tau_{zx} - i\tau_{yz}$. Если на заданные и искомые функции наложить требование разложимости в ряд Фурье по угловой координате, то, используя методику работы [3], сведем задачу определения напряжений вне круга $\rho \geqslant a$ к бесконечной системе интегральных уравнений (1.1)

$$
2\rho^{n+1}\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n+2}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int_a^x \frac{G_1 s^2 \tau_{n+1}(s) + G_2[2nx^2-(2n+1)s^2]\,\bar{\tau}_{-n+1}(s)}{\sqrt{x^2-s^2}} s^n ds -
$$

$$
- 2\pi H a \rho^{-n-1}\int_a^\rho \sigma_n(x)\, x^{n+1}\, dx = F_{n+1}(\rho) \quad (n \geqslant 0) \tag{1.1}
$$

$$
2\rho^{n-1}\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int_a^x \frac{G_1 x^2 \bar{\tau}_{-n+1}(s) + G_2[(2n-1)x^2-2n\rho^2]\,\tau_{n+1}(s)}{\sqrt{x^2-s^2}} s^n ds +
$$

$$
+ 2\pi H a \rho^{n-1}\int_\rho^\infty \sigma_{-n}(x)\, x^{-n+1}\, dx = F_{-n+1}(\rho) \quad (n \geqslant 1)
$$

$$
4H\rho^n\int_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int_a^x \frac{\sigma_n(s)e^{in\varphi} + \sigma_{-n}(s)e^{-in\varphi}}{\sqrt{x^2-s^2}} s^{n+1} ds +
$$

$$
+ 2\pi H a\, \mathrm{Re}\left\{e^{-in\varphi}\rho^{-n}\int_a^\rho \tau_{-n+1}(x)\, x^n\, dx - \right.
$$

$$
\left. - e^{in\varphi}\rho^n\int_\rho^\infty \tau_{n+1}(x)\, x^{-n}\, dx\right\} = \mathrm{Re}\,\{e^{in\varphi}\Phi_n(\rho)\}
$$

Здесь

$$F_{n+1}(\rho) = u_{n+1}(\rho) + 2\pi H\alpha\rho^{-n-1}\int_0^a \sigma_n(x)\,x^{n+1}\,dx -$$

$$-\frac{2}{\rho^{n+1}}\int_0^a \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{G_1x^2\tau_{n+1}(s) + G_2[2n\rho^2-(2n+1)x^2]\,\bar{\tau}_{-n+1}(s)}{s^n\sqrt{s^2-x^2}}\,ds$$

$$F_{-n+1}(\rho) = u_{-n+1}(\rho) -$$

$$-\frac{2}{\rho^{n-1}}\int_0^a \frac{x^{2n-2}\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{G_1s^2\tau_{-n+1}(s) + G_2[(2n-1)s^2-2nx^2]\,\bar{\tau}_{n+1}(s)}{s^n\sqrt{s^2-x^2}}\,ds$$

$$\operatorname{Re}\{\Phi_n(\rho)\,e^{in\varphi}\} = w_n(\rho)\,e^{in\varphi} + w_{-n}(\rho)\,e^{-in\varphi} -$$

$$-\frac{4H}{\rho^n}\int_0^a \frac{x^{2n}\,dx}{\sqrt{\rho^2-x^2}}\int_x^a \frac{\sigma_n(s)\,e^{in\varphi} + \sigma_{-n}(s)\,e^{-in\varphi}}{s^{n-1}\sqrt{s^2-x^2}}\,ds -$$

$$-2\pi H\alpha\,\operatorname{Re}\left\{e^{-in\varphi}\rho^{-n}\int_0^a \tau_{-n+1}(x)\,x^n\,dx\right\}$$

$$G_1 = \beta + \gamma_1\gamma_2H, \qquad G_2 = \beta - \gamma_1\gamma_2H$$

Постоянные α, β, γ_1, γ_2, H определяются упругими характеристиками материала полупространства [3]. Комплексные функции F_k и Φ_k известны по условию задачи. Величины U_k, σ_k, τ_k являются коэффициентами в разложениях соответствующих функций в ряд Фурье по угловой координате. Осесимметричная внешняя задача соответствует $n = 0$. Подробное ее решение приведено в работе [4].

2. Без нарушения общности первые два уравнения (1.1) можно считать однородными. Действительно, в силу линейности уравнений этого всегда можно достигнуть за счет некоторого усложнения третьего уравнения. Тогда решение системы (1.1) можно искать в виде

$$\sigma_n(s) = \bar{\sigma}_{-n}(s) = s^n\int_s^\infty \frac{df_n(t)}{t^{2n}\sqrt{t^2-s^2}} \tag{2.1}$$

$$\tau_{n+1}(s) = \frac{C}{s^n}\frac{d}{ds}\int_a^s \frac{f_n(t)\,dt}{\sqrt{s^2-t^2}} - \frac{D_n}{s^{n+1}\sqrt{s^2-a^2}}$$

$$\tau_{-n+1}(s) = \frac{C}{s^n}\frac{d}{ds}s^{2n}\int_a^s \frac{dz}{z^{2n}}\frac{d}{dz}\int_a^z \frac{\bar{f}_n(t)\,dt}{\sqrt{z^2-t^2}} +$$

$$+\frac{\bar{D}_n}{s^n}\frac{d}{ds}s^{2n}\int_0^s \frac{dz}{z^{2n+1}\sqrt{z^2-a^2}}$$

Здесь f_n — искомая комплексная функция напряжений, C и D_n — подлежащие определению константы.

Подстановка (2.1) в первые два уравнения (1.1) удовлетворяет им тождественно, если выполняются условия

(2.2) $$C=\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2},\quad D_n=-2n\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}a^{2n+1}\int\limits_a^\infty\frac{f_n(t)}{t^{2n+1}}dt$$

$$-\frac{\pi^{3/2}}{2}(G_1+G_2)D_n\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma(n+{}^3/_2)}+$$

$$+2\pi H\alpha a^{2n+2}\int\limits_a^\infty\left[xf_n(x)-\int\limits_a^x f_n(t)\,dt\right]x^{-2n-2}(x^2-a^2)^{-1/2}=0$$

Далее используем следующий интеграл, который возникает при подстановке (2.1) в третье из уравнений (1.1):

$$\int\limits_a^x\frac{s^{2n+1}ds}{\sqrt{x^2-s^2}}\int\limits_s^\infty\frac{df_n(t)}{t^{2n+1}\sqrt{t^2-s^2}}=\int\limits_a^\infty\Big[\sqrt{x^2-a^2}\sqrt{t^2-a^2}\,Q_n(x,t)+$$

$$+L_n(x,t)\ln\frac{\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{t^2-a^2}}{\sqrt{|t^2-x^2|}}\Big]\frac{df_n(t)}{t^{2n}}$$

$$L_n(x,t)=\frac{x^{2n}}{\pi}\sum_{k=0}^n\frac{\Gamma(n+{}^1/_2-k)\,\Gamma({}^1/_2+k)}{\Gamma(n+1-k)\,\Gamma(1+k)}\left(\frac{t}{x}\right)^{2k}$$

Здесь Q_n — четный полином от x, t, коэффициенты которого определяются известными рекуррентными соотношениями [5].

Разделим обе части третьего из уравнений (1.1) на ρ^n, продифференцируем по ρ, результат умножим на $\rho^{2n}/\sqrt{\rho^2-r^2}$ и проинтегрируем по ρ от r до ∞. Использование известных свойств гипергеометрических функций [5] позволяет разделить ядро интегрального уравнения на сингулярную и вырожденную части. Разрешающее уравнение для определения f_n имеет вид

(2.3) $$-\frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\int\limits_a^\infty\frac{tf_n(t)\,dt}{(t^2-r^2)\sqrt{t^2-a^2}}+\frac{\alpha^2}{\gamma_1\gamma_2}\int\limits_a^\infty\frac{f_n(t)\,dt}{t^2-r^2}=\chi_n(r)$$

Здесь

(2.4) $$\chi_n(r)=\frac{1}{4\pi H}\int\limits_r^\infty\frac{\rho^{2n}d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\frac{d}{d\rho}\left[\frac{\Phi_n(\rho)}{\rho^n}\right]-$$

$$-\frac{2}{\pi}\int\limits_r^\infty\frac{\rho^{2n}d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^\infty\frac{\sqrt{x^2-a^2}\,dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}}\int\limits_a^\infty\sqrt{t^2-a^2}\,Q_n(x,t)\frac{df_n(t)}{t^{2n}}+$$

$$+\frac{2}{\pi^{3/2}}\int\limits_r^\infty\frac{\rho^{2n-1}d\rho}{\sqrt{\rho^2-r^2}}\int\limits_\rho^\infty\frac{dx}{\sqrt{x^2-\rho^2}\sqrt{x^2-a^2}}\int\limits_a^\infty\sqrt{t^2-a^2}\,R_n(\rho,x,t)\frac{df_n(t)}{t^{2n}}$$

$$R_n(\rho,x,t)=\sum_{k=0}^{n-1}\frac{\Gamma({}^1/_2+n-k)}{\Gamma(n-k+1)}\left(\frac{t}{\rho}\right)^{2k}\times$$

$$\times F\left(\frac{1}{2},\ 1-n+k;\ \frac{1}{2}-n+k;\ \frac{t^2}{x^2}\right)$$

Так как $n > k$, то R_n — четный полином, и интегралы, соответствующие вырожденной части ядра, определяются элементарными функциями для любого n. Точное решение уравнения (2.3) имеет вид [4]

$$f_n(t) = \frac{4\operatorname{ch}^2 \pi\theta}{\pi^2} t\,[X_n^c(t)\,Y_c(t) + X_n^s(t)\,Y_s(t)] + A_n Y_c(t) \tag{2.5}$$

Здесь

$$X_n^{c,\,s}(t) = \int\limits_a^\infty \frac{\chi_n(r)}{r^2 - t^2} \begin{Bmatrix} tY_c(r) \\ rY_s(r) \end{Bmatrix} dr$$

$$Y_{c,\,s}(t) = \begin{Bmatrix}\cos \\ \sin\end{Bmatrix}\left[\theta \ln \frac{t+a}{t-a}\right]$$

$$\theta = \pi^{-1} \operatorname{Arth}\,[\alpha\ (\gamma_1\gamma_2)^{-1/2}]$$

где A_n — произвольная постоянная, которая соответствует однородному решению уравнения (2.3). Величины постоянных, соответствующих вырожденной части ядра, а также A_n и D_n определяются из системы линейных алгебраических уравнений, к которым добавляются два условия (2.2).

Поставленная задача в общем виде решена.

3. Рассмотрим пример. Пусть внутри круга $\rho \leqslant a$ на расстоянии b от центра приложена нормальная сосредоточенная сила P. Внешность круга полагаем жестко защемленной. Определим напряжения в заделке.

Имеем задачу с краевыми условиями на границе $z = 0$

$$\sigma_z = P\delta(\rho - b)\,\delta(\varphi - 0),\ \tau = 0 \quad (\rho \leqslant a) \tag{3.1}$$

$$u = w = 0 \quad (\rho > a)$$

Для данного случая определим

$$F_{n+1}(\rho) = PHab^n\rho^{-n-1}, \qquad F_{-n+1} = 0 \tag{3.2}$$

$$\Phi_n(\rho) = -\frac{4H}{\pi} b^n \rho^n \int\limits_\rho^\infty \frac{dx}{x^{2n}\sqrt{x^2-\rho^2}\sqrt{x^2-b^2}}$$

Дальнейшие выкладки проводятся для каждой гармоники в отдельности. Например, для $n = 0$ можно получить

$$\sigma_0(\rho) = \int\limits_\rho^\infty \frac{df_0(t)}{\sqrt{t^2-\rho^2}} = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int\limits_\rho^\infty \frac{tf_0(t)\,dt}{\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.3}$$

$$\tau_1(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{d}{d\rho}\int\limits_a^\rho \frac{f_0(t)\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} - \frac{D_0}{\rho\sqrt{\rho^2-a^2}} \qquad (\rho > a)$$

$$f_0(t) = \frac{2P}{\pi^3}\operatorname{ch}^2\pi\theta \int\limits_a^\infty \frac{Y_c(t)\,rY_c(r) + tY_s(t)\,Y_s(r)}{(r^2-t^2)\sqrt{r^2-b^2}}\,dr - D_0\frac{\gamma_1\gamma_2}{a\alpha}[1 - Y_c(t)] \tag{3.4}$$

$$D_0 = -\frac{P}{\pi^2}\frac{\alpha \operatorname{sh} 2\pi\theta}{4\gamma_1\gamma_2\theta}\left[1 - \frac{2}{\pi}\operatorname{cth}\pi\theta \int\limits_a^\infty \frac{Y_s(r)\,dr}{\sqrt{r^2-b^2}}\right]$$

Результаты вычисления первой гармоники

$$\sigma_1(\rho) = \bar{\sigma}_{-1}(\rho) = \rho \int_\rho^\infty \frac{df_1(t)}{t^2\sqrt{t^2-\rho^2}} \tag{3.5}$$

$$\tau_2(\rho) = \frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\int_a^\rho \frac{f_1(t)\,dt}{\sqrt{\rho^2-t^2}} - \frac{D_1}{\rho^2\sqrt{\rho^2-a^2}}$$

$$\tau_0(\rho) = \frac{1}{\rho}\frac{d}{d\rho}\rho^2\left[\frac{\alpha}{\gamma_1\gamma_2}\int_a^\rho \frac{dz}{z^2}\frac{d}{dz}\int_a^z \frac{\bar{f}_1(t)\,dt}{\sqrt{z^2-t^2}} + \bar{D}_1\int_a^\rho \frac{dz}{z^3\sqrt{z^2-a^2}}\right]$$

$$f_1(t) = \frac{4\,\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\pi^2}\,t\,[X_1^c(t)Y_c(t) + X_1^s(t)Y_s(t)] + A_1Y_c(t)$$

$$\chi_1(r) = \frac{Pb}{2\pi r}\left[\frac{1}{\sqrt{r^2-b^2}} + \frac{1}{r+\sqrt{r^2-b^2}}\right] + \frac{2}{\pi}\left[1 - \frac{\sqrt{r^2-a^2}}{r}\right]B_1$$

Постоянные D_1, A_1, B_1 определяются из линейной системы алгебраических уравнений

$$D_1 = -\frac{2\alpha}{\gamma_1\gamma_2}a^3\int_a^\infty \frac{f_1(t)}{t^3}\,dt, \qquad B_1 = \int_a^\infty \frac{\sqrt{t^2-a^2}}{t^2}\,df_1(t)$$

$$-\frac{4}{3}\frac{\pi\beta}{H\alpha}D_1 + 2\pi\int_a^\infty \frac{xf_1(x) - \int_a^x f_1(t)\,dt}{x^4\sqrt{x^2-a^2}}\,dx - Pb = 0$$

Следует отметить, что система напряжений в защемленной части такова, что ее главный вектор в точности равен P. Последнее легко показать непосредственным интегрированием.

Если $b = 0$, то задача становится осесимметричной, и единственной отличной от нуля функцией напряжений будет

$$f_0(t) = \frac{P}{2\pi}\left\{\frac{2}{\pi}\frac{\mathrm{ch}^2\pi\theta}{\mathrm{sh}\,\pi\theta}\frac{Y_s(t)}{t} - \frac{\mathrm{sh}\,2\pi\theta}{2\pi a\theta\,(1+\mathrm{ch}\,\pi\theta)}[1 - Y_c(t)]\right\}$$

При $\alpha = 0$ решение выражается в элементарных функциях

$$\sigma_n(\rho) = -\frac{P}{\pi^2}\frac{\sqrt{a^2-b^2}}{\sqrt{\rho^2-a^2}\,(\rho^2-b^2)}\left(\frac{b}{\rho}\right)^n, \quad \tau_n = 0$$

В случае изотропного тела последнее имеет место при коэффициенте Пуассона, равном $^1/_2$.

Поступила 10 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Моссаковский В. И.* Основная смешанная задача теории упругости для полупространства с круговой линией раздела граничных условий. ПММ, 1954, т. 18, вып. 2.
2. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1963.
3. *Фабрикант В. И.* Действие сдвигающей силы и опрокидывающего момента на цилиндрический штамп, сцепленный с трансверсально изотропным полупространством. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Фабрикант В. И.* Внешняя осесимметричная смешанная задача для трансверсально изотропного полупространства. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.