Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ОБ ОДНОМ ПРИБЛИЖЕННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИЧЕСКИХ КОНТАКТНЫХ ЗАДАЧ

В. А. Бабешко, В. В. Калинчук

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются интегральные уравнения, возникающие в ряде контактных задач о колебании штампов на поверхности областей, границы которых уходят в бесконечность (например на поверхности слоя, многослойного основания, цилиндра, трубы и т. д.). Такие задачи сводятся к интегральным уравнениям первого рода с разностным ядром, содержащим осциллирующие члены. Осцилляция возрастает с увеличением частоты колебаний, и это либо затрудняет применение известных методов решения уравнений первого рода, либо полностью исключает такую возможность.

Изучается возможность применения одного приема для решения этих интегральных уравнений и обсуждается вопрос о его эффективности [1]. Метод принципиально позволяет строить точные решения некоторых уравнений, аппроксимирующих исходные, при этом даются погрешности приближенных решений.

1. Задача для упругого слоя толщины h, лежащего без трения на жестком основании, при колебании на его поверхности штампа ширины $2a$, без трения сцепленного с поверхностью, приводится к интегральному уравнению вида

$$\int_{-a}^{a} k(x-t)\,q(t)\,dt = \pi f(x), \quad |x| \leqslant a \tag{1.1}$$

$$k(t) = \int_{\Gamma} K(u)\,e^{iut}du \tag{1.2}$$

$$K(u) = [u^2\sigma_2 \operatorname{cth}\sigma_2 - (u^2 - {}^1/_2\varkappa_2{}^2)^2\,\sigma_1{}^2 \operatorname{cth}\sigma_1]^{-1} \tag{1.3}$$

$$\sigma_k = \sqrt{u^2 - \varkappa_k{}^2}, \quad \varkappa_1{}^2 = \rho\omega^2h^2(2\mu+\lambda)^{-1}, \quad \varkappa_2{}^2 = \rho\omega^2h^2\mu^{-1}$$

Здесь $q(x)$ — неизвестные контактные напряжения, $f(x)$ — функция, описывающая движение поверхности штампа (при колебании плоского штампа $f(x) \equiv 1$), λ, μ — коэффициенты Ляме, ν, ρ, ω — соответственно коэффициент Пуассона, плотность материала слоя и частота колебания штампа.

Задача о радиальных колебаниях жесткого бандажа ширины $2a$, насаженного на упругий цилиндр радиуса h, также приводится к уравнению (1.1), в котором функция $K(u)$ дается соотношением ($I_k(x)$ — функция Бесселя мнимого аргумента порядка k, $I(u) = I_1^{-1}(u)\,I_0(u)$)

$$K(u) = -\frac{\varkappa_2{}^2\sigma_1}{4}\left[\left(u^2 - \frac{\varkappa_2{}^2}{2}\right)^2 I(\sigma_1) - u^2\sigma_1\sigma_2 I(\sigma_2) + \frac{\varkappa_2{}^2\sigma_1}{2}\right]^{-1} \tag{1.4}$$

[1] Возможность использования этого приема высказывалась также А. В. Белоконем на одном из семинаров кафедры теории упругости Ростовск. гос. ун-та.

Характерная особенность функций $K(u)$ заключается в наличии на вещественной оси нулей и полюсов, количество которых, вообще говоря, растет с увеличением частоты ω. В остальном эти функции обладают свойствами функций в соответствующих статических задачах [1], а именно они вещественные на вещественной оси, мероморфные в комплексной плоскости, убывающие на бесконечности как $|u^{-1}|$.

Наличие у функций $K(u)$ вещественных нулей и полюсов обусловлено появлением в соответствующих областях упругих волн, которые при отсутствии источников на бесконечности, должны иметь определенную направленность [2, 3]. (Этот вопрос обсуждался в работе [4].) Направленность упругих волн диктует выбор контура Γ в представлении (1.2). Как правило, этот контур при выборе временного множителя $e^{-i\omega t}$ совпадает с вещественной осью всюду, кроме отрезков, содержащих вещественные полюсы. Здесь он положительные полюсы обходит снизу, а отрицательные сверху[1]

Случай, когда нуль или полюс функции $K(u)$ совпадает с началом отсчета, здесь не рассматривается. Не рассматривается также редко встречающийся случай, когда вычеты функции $K(u)$ в положительных полюсах разного знака.

Тогда на основании работы [4] интегральное уравнение (1.1) однозначно разрешимо при любой дважды непрерывно дифференцируемой правой части в пространстве функций, непрерывных с весом, т. е.

$$\| q(x) \sqrt{a^2 - x^2} \|_C \leqslant N \| f \|_{C^2}$$

Ниже для построения приближенного решения уравнения (1.1) будем аппроксимировать функцию $K(u)$ приближенной функцией $H_1(u)$ вида (A — дополнительный параметр аппроксимации)

$$H_1(u) = H_0(u) \prod_{k=1}^{m} (u^2 - z_k^2)(u^2 - \gamma_k^2)^{-1}, \quad H_0(u) = u^{-1} \operatorname{th} Au \tag{1.5}$$

с соблюдением свойства

$$|K(u) - H_1(u)| \, |K^{-1}(u)| (1 + |u|)^{\alpha} < \delta, \quad \alpha > 1/2, \quad -\infty \leqslant u \leqslant \infty \tag{1.6}$$

Условие (1.6) налагает требование совпадения вещественных нулей и полюсов у функций $K(u)$ и $H_1(u)$. На распределение комплексных нулей и полюсов это требование не распространяется.

В этом случае при достаточно малых δ решения интегральных уравнений, ядра которых определяются функциями $K(u)$ и $H_1(u)$, будут близки в смысле [5], т. е.

$$\| (q - q_1) \sqrt{a^2 - x^2} \|_C < M\delta \| q \sqrt{a^2 - x^2} \|_C \tag{1.7}$$

Постоянная M зависит лишь от функции $K(u)$.

---

[1] В докладе В. А. Бабешко «Новый эффективный метод решения динамических контактных задач» (Тезисы докладов 13 Международного конгресса по теоретической и прикладной механике, М., 1972) показано, что бывают и исключения.

Таким образом, приходим к необходимости решения уравнения (1.1) с ядром (1.2), роль функции $K(u)$ в котором играет $H_1(u)$.

В качестве примера приводим функцию $H_1(u)$ (1.5), аппроксимирующую функцию $K(u)$ (1.4) с погрешностью, не превышающей 10% при $\nu = 0.3, \varkappa_2 = 4.45, A = 0.1$. В этом случае на вещественной оси находятся три полюса: $\gamma_1 = 0.7523$, $\gamma_2 = 1.3575$, $\gamma_3 = 4.4956$, четыре полюса комплексные: $\gamma_4 = \gamma_5 = \gamma_6 = \gamma_7 = 7.774i$, а также два вещественных нуля: $z_1 = 2.2629$, $z_2 = 2.3786$, остальные нули комплексные, имеющие значения $z_3 = 2.9270\, i$, $z_4 = -1.2870 + 7.6493\, i$, $z_5 = 1.2870 + 7.6493i$, $z_6 = 7.7684i$, $z_7 = 11i$.

2. Положим

$$h_n(u) = \int_{-\infty}^{\infty} H_n(t)\, e^{iut} dt, \quad n = 0, 1 \tag{2.1}$$

Уравнение (1.1) с ядром $h_0(u)$ решается точно [6, 7].

Сведем решение уравнения (1.1) с ядром $h_1(u)$ к решению такого же уравнения с ядром $h_0(u)$.

С этой целью воспользуемся представлением вида [8]

$$\int_{-a}^{a} h_1(x-t)\, q_1(t)\, dt = \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - z_k^2\right) R(x) = \pi f(x) \tag{2.2}$$

$$R(x) = \int_{-a}^{a} \int_{-\infty}^{\infty} H_0(u) \prod_{k=1}^{m} (u^2 - \gamma_k^2)^{-1} e^{iu(x-t)} du\, q(t)\, dt$$

Последнее равенство в (2.2) представляет неоднородное дифференциальное уравнение с постоянными коэффициентами порядка $2m$ относительно функции $R(x)$. Определив при $f(x) = \exp i\eta x$ его общее решение, а затем применив дифференциальную операцию вида

$$M\left(\frac{d}{dx}\right) = \prod_{k=1}^{m} \left(-\frac{d^2}{dx^2} - \gamma_k^2\right)$$

придем к уравнению для определения неизвестной $q(x)$, которое представимо в форме

$$\int_{-a}^{a} h_0(x-t)\, q(t)\, dt = \pi S(\eta)\, e^{i\eta x} + \sum_{k=1}^{m} (x_k^- e^{-iz_k x} + x_k^+ e^{iz_k x}) \tag{2.3}$$

$$S(\eta) = \prod_{k=1}^{m} (\eta^2 - z_k^2)(\eta^2 - \gamma_k^2)^{-1}$$

Участвующие в представлении (2.3) постоянные $x_k^{\pm}$ подлежат определению из условия, что найденная функция $q(x)$ обязана удовлетворять исходному уравнению (1.1).

Уравнение (2.3) с произвольной правой частью $f(x)$ решается в замкнутом виде [7]. Для целей данной работы это уравнение достаточно решить при $f(x) = \exp i\eta\, x$.

Обозначая решение этого уравнения $q_0(x)$, получим

$$q_0(x, \eta) = (2A)^{-1}e^{-ba}P(a-x)P(a+x)[M - i\eta b^{-1}J(x)] \tag{2.4}$$

$$J(x) = be^{ba}\int_{-a}^{a} P^{-1}(-a+t)P^{-1}(a+t)P^{-2}(t-x)e^{i\eta t}dt$$

$$M = e^{ba}K^{-1}(e^{-2ba})\left[\frac{\pi}{2}e^{-i\eta a} + i\eta be^{ba}\int_{-\infty}^{a} P(a-\xi)P^{-1}(-a-\xi)\times\right.$$

$$\left.\times e^{b\xi}\int_{-a}^{a} P^{-1}(a-t)P^{-1}(a+t)P^{-2}(t-\xi)e^{i\eta t}dt\,d\xi\right]$$

$$P(t) = (1 - e^{-2bt})^{-1/2}, \qquad b = (2A)^{-1}\pi$$

Здесь $K(x)$ — полный эллиптический интеграл первого рода.

Таким образом, решение уравнения (2.2) с указанной правой частью в силу (2.3), (2.4) имеет вид

$$q_1(x) = \pi S(\eta)q_0(x, \eta) + \sum_{k=1}^{m}[c_k q_0(x, -iz_k) + d_k q_0(x, iz_k)] \tag{2.5}$$

С другой стороны, функцию $q_1(x)$ можно представить в виде

$$q_1(x) = Y_0 e^{i\eta x} + \sum_{k=-m}^{\infty}(Y_k^+ e^{i\eta_k(a+x)} + Y_k^- e^{i\eta_k(a-x)}) \tag{2.6}$$

Здесь постоянные $Y_k^\pm$ определяются из бесконечной системы, в которой необходимо взять последовательно верхние и нижние знаки

$$\frac{Y_0 e^{\mp ia\eta}}{\xi_k \mp \eta} + \sum_{l=-m}^{\infty}\left(\frac{Y_l^\pm}{\xi_k - \eta_l} + \frac{Y_l^\pm}{\xi_k + \eta_l}\right) = 0 \tag{2.7}$$

$$k = -m, \ -m+1, \ldots, -1, 1, \ldots$$

$$\xi_k = \gamma_{-k}, \quad k = -1, -2, \ldots -m, \qquad \xi_k = i(2k-1)b, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Функция $q_0(x, \eta)$ также может быть представлена в виде (2.6), а именно

$$q_0(x, \eta) = \frac{i\eta}{2}\operatorname{ctg}(i\eta A)e^{i\eta x} + \sum_{k=0}^{m}[c_k^+(\eta)e^{i\eta_k(a+x)} + c_k^-(\eta)e^{i\eta_k(a-x)}] \tag{2.8}$$

и при этом коэффициенты $c_k^\pm(\eta)$ определяются точно в результате разложения левой части (2.7) в аналогичный ряд. Эти коэффициенты имеют вид

$$2\pi C_k^\pm(\eta) = i\eta(e^{i\eta a}\gamma_k^\pm - e^{-i\eta a}\gamma_{1k}^\pm) + (i\eta e^{-i\eta a}\beta_{10} + 2bMe^{-ba})\gamma_{2k}^\pm$$

$$\gamma_k^+ = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{2p}\delta_n\delta_{n+p+k}B(p+n), \qquad \gamma_k^- = \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\beta_{2p}\delta_{n-p}\delta_{n-k}B(n-k)$$

$$\gamma_{1k}^+ = \sum_{n=k}^{\infty}\sum_{p=0}^{n}\beta_{1p}\delta_{n-p}\delta_{n-k}B(n-k), \qquad \gamma_{1k}^- = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{p=0}^{\infty}\beta_{1p}\delta_n\delta_{n+p+k}B(p+n)$$

$$\gamma_{2k}^{\pm} = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_n \delta_{n+k} B(n)$$

$$\beta_{1p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n \alpha_k B(n) [n - k + p + i\eta A\pi^{-1}]^{-1}$$

$$\beta_{2p} = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_n \alpha_k B(n) [n - k + p - i\eta A\pi]^{-1}$$

$$\alpha_0 = \delta_0 = 1, \quad -\alpha_1 = \delta_1 = \frac{1}{2}$$

$$\delta_n = -(2n-1)\alpha_n = \frac{[(2n-1)!!}{2n!!}, \quad n = 2, 3, \ldots$$

$$B(n) = e^{-4bna}, \qquad b = (2A)^{-1}\pi$$

Они же являются решениями бесконечной системы (2.7), из которой необходимо выбросить первые m строк и столбцов, т. е. они удовлетворяют системе ($\theta = i\eta \operatorname{ctg}(i\eta A)$)

$$\frac{\theta e^{\mp i\eta a}}{2(\xi_r \mp \eta)} + \sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{c_k^{\mp}(\eta)}{\xi_r - \eta_k} + \frac{c_k^{\pm}(\eta)}{\xi_r + \eta_k} e^{2ai\eta_k} \right] = 0, \quad r = 1, 2, \ldots \tag{2.9}$$

Принимая во внимание это обстоятельство, внесем (2.8) в (2.5) и без труда установим связь коэффициентов $Y_l^{\pm}$ с неизвестными постоянными $x_p^{\pm}$ и $c_k^{\pm}(\eta)$. Эта связь дается соотношениями

$$Y_{-p}^{\pm} = (2\pi)^{-1} i z_p e^{-z_p a} \operatorname{ctg}(i z_p A)\, x_p^{\pm}, \qquad p = 1, 2, \ldots m \tag{2.10}$$

$$Y_k^{\pm} = \pi^{-1} \sum_{p=0}^{m} [x_p^{\pm} c_k^{\pm}(-i z_p) + x_p^{\pm} c_k^{\mp}(i z_p)], \quad k = 1, 2 \ldots$$

$\varkappa_2$	γ_k	z_k
1.9	1.2324	1.0156
3.2	2.6838	1.7104
5.8	2.1840 3.3969 6.1333	3.1002 3.1002 4.3079
7.1	1.0349 3.4447 4.7459 7.6136	 1.0915 3.7951 5.9773
8.4	3.4747 4.5143 6.5099 9.0573	2.3405 4.4900 5.0634 7.4766

Внесем теперь соотношения (2.10) в уравнения (2.7) и учтем, что постоянные $c_k^{\pm}(\eta)$ обращают в тождества соответствующие системы (2.9) при $\eta = \pm iz_p$, $p = 1, 2, \ldots m$.

В результате преобразований придем для определения неизвестных $x_p^{\pm}$ к конечной системе линейных алгебраических уравнений вида ($A_r^{\pm}(\eta)$— левые части уравнений (2.9))

$$\sum_{p=1}^{m} [A_r^{\pm}(-iz_p) x_p^{+} + A_r^{\mp}(iz_p) x_p^{-}] =$$

$$= -\pi S(\eta) A_r^{\pm}(\eta), \quad r = 1, 2, \ldots, m$$

3. В качестве примера в таблице приведено распределение вещественных нулей и полюсов функции $K(u)$, даваемой соотношением (1.4), при $\nu = 0.3$ в зависимости от частоты (от значения параметра $\varkappa_2$). Распределение вещественных нулей и полюсов функции $K(u)$, даваемой формулой (1.3) и тесно связанной с функцией Релея, хорошо известно в литературе [9] и здесь не приводится.

Поступила 9 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Александров В. М.* Асимптотические методы в контактных задачах теории упругости. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
2. *Векуа И. Н.* О доказательстве некоторых теорем единственности встречающихся в теории установившихся колебаний. Докл. АН СССР, 1951, т. 80, № 3.
3. *Купрадзе В. Д.* Граничные задачи теории установившихся упругих колебаний. Успехи. матем. наук, 1953, т. 88, № 3.
4. *Бабешко В. А.* К теории динамических контактных задач. Докл. АН СССР, 1971. т. 201, № 3.
5. *Бабешко В. А.* Об одном эффективном методе решения некоторых интегральных уравнений теории упругости и математической физики. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
6. *Штаерман А. И.* Контактная задача теории упругости. М.— Л., Гостехиздат, 1949.
7. *Александров В. М., Кучеров В. А.* Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
8. *Забрейко П. П., Кошелев А. И., Красносельский М. А., Михлин С. Г., Раковщик Л. С., Стеценко В. Я.* Интегральные уравнения. М., «Наука», 1968.
9. *Yih-Hsing Pao.* Dispersion of Flexural Waves in an Elastic Circular Cylinder. Trans. ASME. Ser. E.J. Appl. Mech., 1962. vol. 29 No. 1. (Рус. перев: Распространение изгибных волн в упругом круговом цилиндре. Прикл. механ. Сер. Е. Тр. Америк. о-ва инж.-механ., 1962, т. 29, № 1.)