Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.546

# О НАПОРНО-БЕЗНАПОРНОМ ДВИЖЕНИИ ПОДЗЕМНЫХ ВОД В ПЛАСТЕ СО СЛАБОПРОНИЦАЕМОЙ КРОВЛЕЙ И ПОДОШВОЙ

А. Бегматов

(Ташкент)

Рассматривается задача о напорно-безнапорном движении подземных вод с учетом просачивания через кровлю и подошву пласта. Задача сводится к решению системы функциональных уравнений, решение которой можно получить методом последовательных приближений. Исследуется поведение неизвестной границы раздела $x = x_1(t)$ областей безнапорного и напорного движения. Доказывается единственность решения в окрестности $t = t_0$.

Рассмотрим задачу: найти дифференцируемую функцию $x_1(t)$, $x_1(t_0) = 0$, $x_1(t) > 0$ для $t \in (t_0, T]$ и решение $u_i(x, t)$ (с непрерывной производной $u_{ix}$) уравнения

$$\frac{\partial u_i}{\partial t} = a_i \frac{\partial^2 u_i}{\partial x^2} - b_i(u_i - u_{0i}) \tag{1}$$

в области

$$\Omega_1 = \{(t, x):\ 0 < x < x_1(t),\ t_0 < t \leqslant T\} \quad \text{при } i = 1$$

$$\Omega_2 = \{(t, x):\ x_1(t) < x < \infty,\ t_0 < t \leqslant T\} \quad \text{при } i = 2$$

удовлетворяющее условиям

$$\left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=+0} = q(t), \quad u_2|_{t=t_0+0} = \varphi(x), \quad u_2|_{x\to+\infty} = \text{const} \tag{2}$$

$$u_1|_{x=x_1(t)-0} = u_0^-, \quad u_2|_{x=x_1(t)+0} = u_0^+, \quad \left.\frac{\partial u_1}{\partial x}\right|_{x=x_1(t)-0} = \left.\frac{\partial u_2}{\partial x}\right|_{x=x_1(t)+0} \tag{3}$$

($q'(t) \geqslant 0$ при $t > t_0$ и $q'$ ограниченная, $\varphi(x)$ — достаточно гладкая функция и $\varphi' \geqslant 0$, $u_0^\pm = \text{const}$).

В случае $u_0^- \neq u_0^+$ решение $u_2(x, t)$ непрерывное в области $\bar\Omega_2 \setminus (0,0)$.

К этой задаче сводится исследование напорно-безнапорного движения подземных вод. При одномерном напорном движении в пласте со слабопроницаемой кровлей и подошвой напор $H(x, t)$ основного горизонта удовлетворяет уравнению [1]

$$\frac{\partial H}{\partial t} = a_2 \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} - b_2(H - H_0), \quad b_2 = \frac{1}{\mu_2}\left(\frac{k_{01}}{m_{01}} + \frac{k_{02}}{m_{02}}\right) \tag{4}$$

если постоянные напоры верхнего и нижнего пластов равны $H_0$. Решение этого уравнения в области $\Omega = \{(t, x):\ 0 < x < \infty,\ 0 < t \leqslant t_0\}$ при условиях

$$H(x, 0) = \underset{x\to+\infty}{H(x, t)} = H_0, \qquad \left.\frac{\partial H}{\partial x}\right|_{x=+0} = q(t),\ t > 0$$

имеет вид

$$\Phi \equiv H - H_0 = -a_2 \int_0^t \frac{q(\tau)}{\sqrt{\pi a_2 (t-\tau)}} \exp\left[-\frac{x^2}{4a_2(t-\tau)} - b_2(t-\tau)\right] d\tau \tag{5}$$

В (4), (5) $a_2$, $\mu_2$ — коэффициенты пьезопроводности и упругой отдачи пласта [2], $k_{0i}$, $m_{0i}$ — коэффициенты фильтрации и мощности прослоек ($i = 1, 2$).

Пусть $q' \geqslant 0$, тогда с течением времени напор уменьшается и, вообще говоря, в некоторый момент времени $t = t_0 > 0$ в сечении $x = 0$ достигает значения $H(0, t_0 - 0) = m_0$ ($m_0$ — мощность основного горизонта). Если продолжать откачку, то в дальнейшем ($t > t_0$) появляются области безнапорного ($\Omega_1$) и напорного движений ($\Omega_2$) с подвижной границей раздела $x = x_1(t)$. При этом уровень грунтовых вод $h(x, t)$ удовлетворяет в области $\Omega_1$ уравнению

$$\mu_1 \frac{\partial h}{\partial t} = k \frac{\partial}{\partial x}\left(h \frac{\partial h}{\partial x}\right) - \frac{k_{01}}{m_{01}}(h - H_0) + \varepsilon \tag{6}$$

Полагая в этом уравнении $h = \sqrt{2m_0 u_1}$ и линеаризуя по второму способу [1], получим уравнение (1) при $i = 1$, где

$$a_1 = \frac{kh_0}{\mu_1}, \quad b_1 = \frac{2k_{01}h_0}{\mu_1 m_{01}(h_0 + h_{01})}, \quad h_{01} = H_0 + \frac{\varepsilon m_{01}}{k_{01}}.$$

Здесь $a_1$, $\mu_1$ — коэффициенты уровнепроводности и водоотдачи, $h_0$ — некоторое среднее значение $h(x, t)$, $\varepsilon$ — интенсивность просачивания с кровли пласта [3]. Напор $H(x, t)$ при $t > t_0$ должен также удовлетворять уравнению (4), которое примет вид (1), если положить $u_2 = H_2$, $u_{02} = H_0$.

Начальное и граничные условия имеют вид (2), где $\varphi(x)$ совпадает с функцией $\Phi(x, t_0)$. Первые два условия (3) определяют значения уровня грунтовых вод и напора на кривой $x = x_1(t)$, причем если имеет место доступ воздуха в пространство над уровнем грунтовых вод, то $2u_0^- = u_0^+ = m_0$. Если доступа воздуха нет [3], то $2u_0^- = m_0$, $u_0^+ < m_0$. Частный случай аналогичной задачи изучался в работах [3, 4] другим способом.

Для решения задачи (1) — (3) имеет место следующее интегральное представление [5]:

$$u_1 = -a_1 \int_{t_0}^t G_1(x, t; 0, \tau) q(\tau) d\tau + a_1 \int_{t_0}^t G_1(x, t; x_1(\tau), \tau) \nu(\tau) d\tau + \tag{7}$$
$$+ \frac{b_1}{2}(u_0^- - u_{01}) \int_{t_0}^t \left[\operatorname{erf} \frac{x - x_1(\tau)}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}} - \right.$$
$$\left. - \operatorname{erf} \frac{x + x_1(\tau)}{2\sqrt{a_1(t-\tau)}}\right] e^{-b_1(t-\tau)} d\tau + u_0^-$$

$$u_2 - H_0 = \Phi(x, t) + \frac{1}{2}[u_0^+ - H_0 - \Phi(x_1, t)] + \tag{8}$$
$$+ \frac{m_0 - u_0^+}{2} e^{-b_2(t-t_0)} \operatorname{erf} \frac{x}{2\sqrt{a_2(t-t_0)}} + \int_{t_0}^t \mu(\tau) e^{-b_2(t-\tau)} \times$$
$$\times \operatorname{erf} \frac{x - x_1(\tau)}{2\sqrt{a_2(t-\tau)}} d\tau - a_2 \int_{t_0}^t G_2(x, t; x_1(\tau), \tau)[\nu(\tau) - \Phi_x(x_1(\tau), \tau)] d\tau$$

Здесь

$$G_i(x, t; \xi, \tau) = \frac{\exp[-b_i(t-\tau)]}{2\sqrt{\pi a_i(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a_i(t-\tau)}\right] + \right.$$

$$\left. + (2-i)\exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_i(t-\tau)}\right]\right\}$$

$$\nu(t) = u_{1x}(x_1, t),\ \mu(t) = \frac{1}{2}\left\{\frac{d\Phi}{dt}(x_1, t) + b_2[u_0^+ - H_0 - \Phi(x_1, t)]\right\}$$

$$\operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^x \exp(-\xi^2)\,d\xi \qquad (i = 1, 2)$$

Применяя теорему о нормальной производной потенциала простого слоя, получим

$$\psi(t) \equiv \nu(t) - \Phi_x(x_1, t) = \frac{m_0 - u_0^+}{\sqrt{\pi a_2(t-t_0)}} \times \tag{9}$$

$$\times \exp\left[-\frac{x_1^2}{4a_2(t-t_0)} - b_2(t-t_0)\right] + 2\int_{t_0}^t G_2(x_1, t; x_1(\tau), \tau)\,\mu(\tau)\,d\tau -$$

$$- 2a_2\int_{t_0}^t G_{2x}(x_1, t;\ x_1(\tau), \tau)\,\psi(\tau)\,d\tau$$

Далее, удовлетворяя первому условию (3) и учитывая непрерывность $u_{ix}$ (применяя в первом члене правой части (7) тождество $q(\tau) = q(\tau) - q_0 + q_0$, $q_0 = q(t_0)$), из (7) находим

$$x_1(t) = 2\sqrt{\frac{a_1}{\pi}(t-t_0)}\exp\left[-\frac{x_1^2}{4a_1(t-t_0)}\right] + x_1\operatorname{erf}\frac{x_1}{2\sqrt{a_1(t-t_0)}} + \tag{10}$$

$$+ \frac{a_1}{q_0}\int_{t_0}^t q_1(\tau)\,G_1(x_1, t;\ 0, \tau)\,d\tau - \frac{a_1}{q_0}\int_{t_0}^t G_1(x_1, t;\ x_1(\tau), \tau)\,\nu(\tau)\,d\tau -$$

$$- b_1(u_0^- - u_{01})\int_{t_0}^t \bar{G}_1(x_1, t;\ x_1(\tau), \tau)\,d\tau -$$

$$- a_1\int_0^{t-t_0}(1 - e^{-b_1\tau})\exp\left[-\frac{x_1^2}{4a_1\tau}\right]\frac{d\tau}{\sqrt{\pi a_1\tau}}$$

Здесь

$$\bar{G}_1(x_1, t;\ \xi, \tau) = \frac{\exp[-b_1(t-\tau)]}{2\sqrt{\pi a_1(t-\tau)}}\left\{\exp\left[-\frac{|x-\xi|^2}{4a_1(t-\tau)}\right] - \exp\left[-\frac{(x+\xi)^2}{4a_1(t-\tau)}\right]\right\}$$

$$q_1(t) = q(t) - q_0$$

Если из системы функциональных уравнений (9), (10) определить $\psi$ и $x_1$, то формулы (7), (8) совместно с $\psi$ и $x_1$ дадут решение задачи (1) — (3).

Рассмотрим случай $u_0^+ = m_0$. При этом решение системы функциональных уравнений (9), (10) существует (в этом можно убедиться методом последовательных приближений) при сделанных выше предположениях.

Заметим, что если $\Phi(x, t)$ задана формулой, отличной от (5), то $d\Phi(x_1, t)/dt$ может иметь особенность порядка

$$O[(t-t_0)^{-1/2+\delta}], \quad \delta > 0$$

Итак, при сделанных предположениях решение задачи (1) — (3) находится методом последовательных приближений.

Исследуем поведение кривой $x = x_1(t)$ около $t = t_0$.

Оценим правую часть (9), подставляя

$$\frac{d\Phi(x_1, t)}{dt} = x_1'(t)\, I(t) - q(0)\sqrt{\frac{a_2}{\pi t}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{4a_2 t} - b_2 t\right) -$$

$$- a_2 \int_0^t \frac{q'(t-\tau)}{\sqrt{\pi a_2 \tau}} \exp\left[-\frac{x_1^2(t)}{4a_2\tau} - b_2\tau\right] d\tau$$

$$I(t) = \int_0^t \frac{q(\tau)}{2\sqrt{\pi a_2(t-\tau)}}\, \frac{x_1(t)}{t-\tau} \exp\left[-\frac{x_1^2}{4a_2(t-\tau)} - b_2(t-\tau)\right] d\tau$$

и полагая, что

$$x_1(t) = c_1(t - t_0) + o(t - t_0), \quad c_1 = \mathrm{const} \tag{11}$$

а $\psi(t)$ — непрерывная функция.

Рассмотрим, например, интеграл

$$J = \int_{t_0}^t G_2 x_1'(\tau)\, I(\tau)\, d\tau$$

Производя замену переменных

$$\tau = t_0 + \lambda(t - t_0), \qquad \frac{x_1(\tau)}{2\sqrt{a_2(t-\tau)}} = \lambda_1$$

получим

$$J = c_1 q_0 \sqrt{\frac{t-t_0}{\pi a_2}} + o\left(\sqrt{t - t_0}\right)$$

Далее, воспользовавшись непрерывностью $\psi$ и равенством $\psi(t_0) = 0$ (это следует из непрерывности $u_{2x}$ в $\bar{\Omega}_2$), имеем

$$\int_{t_0}^{t_0} G_2(x_1(t), t;\ x_1(\tau), \tau)\, \psi d\tau = \frac{1}{2}\psi(t) \exp\frac{x_1}{2\sqrt{a_2(t-t_0)}} + o\left(\sqrt{t-t_0}\right)$$

Оценивая аналогично $J$ остальные члены правой части (9), получим

$$\psi(t) = \left[\frac{2c_1 q_0}{\sqrt{\pi a_2}} - \frac{2q(0)}{\sqrt{\pi t_0}} e^{-b_2 t_0} - c_0\right]\sqrt{t - t_0} + o\left(\sqrt{t-t_0}\right) \tag{12}$$

$$c_0 = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{t_0} q'(t_0 - s)\, e^{-b_2 s} \frac{ds}{\sqrt{s}} \geqslant 0$$

Подставляя (12) в (10) и производя соответствующие оценки, находим

$$x_1(t) = -{}^1/_2\, \psi(t) \sqrt{\pi a_1(t - t_0)} + o(t - t_0)$$

Отсюда, учитывая (11) и (12), получим

$$c_1 = \left(1 + \sqrt{\frac{a_1}{a_2}}\right)^{-1} \left[\frac{q(0)}{q_0}\sqrt{\frac{a_1}{\pi t_0}}\, e^{-b_2 t_0} + \frac{c_0\sqrt{\pi a_1}}{2q_0}\right]$$

Следовательно, зависимость $x_1(t)$ около $t = t_0$ описывается прямой линией (с точностью до малых порядка $o(t - t_0)$, угол наклона которой зависит от начального дебита напорного пласта, от начального дебита при напорно-безнапорном движении, параметров пласта и продолжительности напорного движения.

Решение задачи (1) — (3) единственно, по крайней мере, в окрестности точки $(0, t_0)$ при сделанных предположениях относительно $q(t)$ и $\varphi(x)$.

Действительно, предположим, что существуют две пары решений: $u_1$, $u_2$ и $x_1$ на отрезке $[0, T_1]$ и $v_1$, $v_2$, $x_2$ на отрезке $[0, T_2]$. Пусть

$$m(t) = \min[x_1(t), x_2(t)], \quad M(t) = \max[x_1(t), \ x_2(t)]$$
$$T = \min(T_1, T_2), \quad D_1 = \{(t, x): 0 < x < m(t), \ \ t_0 < t \leqslant T\}$$
$$D_2 = \{(t, x): M(t) < x < \infty, \ t_0 < t \leqslant T\}$$

Рассмотрим в области $\overline{D}_2$ функцию $w_2 = u_2 - v_2$. В силу того, что

$$w_2(0, t_0) = 0, \qquad w_2|_{t \to t_0} = 0, \qquad w_2|_{x \to \infty} = 0$$

точка максимума $P = \{M(t^\circ), t^\circ\}$ функции $w_2$ лежит на кривой $x = M(t)$. Отсюда $w_{2x}(P) < 0$, $u_2(P) - v_2(P) > 0$.

Замечая, что

$$u_2(x_1, t) = u_0^+, \quad v_2(x_2, t) = u_0^+, \quad u_{2x} > 0, \ v_{2x} > 0$$

получим $x_1(t^\circ) < x_2(t^\circ)$. С другой стороны

$$w_1(x_1(t^\circ), t^\circ) = u_1(x_1(t^\circ), t^\circ) - v_1(x_1(t^\circ), t^\circ) = {}^1\!/_2 m_0 - v_1(x_1(t^\circ), t^\circ) > 0$$

Следовательно, $w_{1x} > 0$. Но это противоречит при достаточно малом $\delta_2 = (T - t_0)$ непрерывности функции $w_x$, равной $w_{1x}$ в $\overline{D}_1$ и $w_{2x}$ в $\overline{D}_2$. Поэтому $u_2 \equiv v_2$ в $\overline{D}_2$. При этом $x_1 = x_2(t)$.

Действительно, если бы нашлась точка $\tau \in [0, \delta_2]$ такая, что $x_2(\tau_0) > x_1(\tau_0)$, то $w_2(x_2(\tau_0), \tau_0) = u_2(x_2(\tau_0), \tau_0) - v_2(x_2(\tau_0), \tau_0) = u_2(x_2(\tau_0), \tau_0) - u_0^+ > 0$, что противоречит равенству $u_2 \equiv v_2$.

Единственность $u_1$ следует из $x_1 = x_2$.

Заметим, что при доказательстве единственности не предполагалось выполнения равенства $u_0^+ = m_0$.

Отметим, что некоторый класс задач с условием Стефана (в отличие от второго условия (3)) на искомой подвижной границе исследованы в монографии [6].

В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за обсуждение результатов работы.

Поступила 21 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.* Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1969.
2. *Щелкачев В. Н.* Разработка нефтеводоносных пластов при упругом режиме. М., Гостоптехиздат, 1959.
3. *Пеньковский В. И.* О напорно-безнапорном движении жидкости в слоистых грунтах. В кн.: Тр. координационных совещаний по гидротехнике. 1967, вып. 35.
4. *Бегматов А.* Об одном решении задачи плоско-параллельного напорно-безнапорного движения. ПМТФ, 1970, № 1.
5. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. Изд. 4. М., «Наука», 1972.
6. *Рубинштейн Л. И.* Проблема Стефана. Рига, «Звайгзне», 1967.