Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.546

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕННОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ ПЛАСТА В СЛУЧАЕ РАДИАЛЬНОЙ СИММЕТРИИ ПО ОПЫТНЫМ ОТКАЧКАМ ИЗ ЦЕНТРАЛЬНОЙ СКВАЖИНЫ

И. Б. Басович

(Москва)

Рассматривается центральная скважина в круговом пласте с проницаемостью, зависящей только от радиуса. Коэффициент проницаемости определяется по расходу и давлению в скважине при постоянном давлении на контуре питания. Задача определения коэффициента проницаемости сводится к восстановлению оператора Штурма — Лиувилля по его спектральной функции. Доказывается условная корректность задачи, когда коэффициент проницаемости принадлежит классу положительных ограниченных функций, имеющих ограниченную первую и вторую производные.

Подобные задачи для гиперболических уравнений рассматривались в работах [1, 2]. В работе [3] была доказана теорема единственности некоторых обратных задач для параболических уравнений в аналогичной постановке. По идеям и методам исследования данная статья наиболее близка к работе [1].

1. О единственности восстановления коэффициента проницаемости в уравнении фильтрации по переопределенной системе граничных условий. Рассмотрим обратную задачу для одного частного случая параболических уравнений, возникающую в теории фильтрации при определении переменного коэффициента проницаемости по натурным наблюдениям.

Пусть имеется круговой пласт радиуса R и центральная скважина радиуса r_0. Будем считать проницаемость пласта переменной и зависящей только от радиуса r. Требуется по наблюдениям за режимом эксплуатации одной центральной скважины определить проницаемость. Предположим, что в начальный момент $t = 0$ скважина не работала, и во всем пласте установилось постоянное давление $p_{t=0} = 0$. Затем нефть начинают откачивать из скважины с расходом $q(t)$.

Функцию $q(t)$ можно непосредственно замерять, так что будем считать ее известной. Кроме того, можно измерять соответствующее давление в скважине. Изменение давления в пласте описывается уравнением (β — некоторая постоянная) [4]

$$\beta \frac{\partial p}{\partial t} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left[r k(r) \frac{\partial p}{\partial r} \right] \tag{1.1}$$

и граничными условиями

$$p_{t=0} = 0, \quad 2\pi r_0 k(r_0) \frac{\partial p}{\partial r}\Big|_{r=r_0} = q(t), \quad p_{r=R} = 0 \tag{1.2}$$

Пусть задано дополнительное граничное условие

$$p_{r=r_0} = \varphi(t) \tag{1.3}$$

Докажем, что если существует положительная непрерывно дифференцируемая на отрезке $[r_0, R]$ функция $k(r)$, для которой справедливо (1.1) — (1.3), то она единственна.

Решим уравнение (1.1) при граничном условии (1.2). Решение будем искать в виде ряда по собственным функциям оператора

$$LP = -\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r)\frac{\partial P}{\partial r}\right] = \lambda rP \tag{1.4}$$

$$P'_{r=r_0} = 0, \qquad P_{r=R} = 0$$

Сделаем преобразование Лапласа по времени (1.1), (1.2) и введем функцию

$$P^*(r, s) = P(r, s) - Q(s)\,\rho(r)$$

$$P(r,s) = \int_0^\infty p(r,t)\,e^{-st}dt, \qquad Q(s) = \int_0^\infty \frac{q(t)}{2\pi}\,e^{-st}dt$$

$$\rho(r) = \int_{r_0}^{r}\frac{dr}{rk(r)} - \int_{r_0}^{R}\frac{dr}{rk(r)}$$

Функция $P^*(r, s)$ удовлетворяет уравнению

$$LP^* = -\beta rs\,(P^* + Q(s)\,\rho(r))$$

$$\left.\frac{dP^*}{dr}\right|_{r=r_0} = 0, \qquad P^*(R) = 0$$

Пусть λ_k и $P_k(r)$ — собственные числа и нормированные собственные функции оператора (1.4).

Тогда для $P^*(r, s)$ получим выражение

$$P^*(r,s) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\beta sQ(s)\,\mu_k}{\lambda_k + \beta s}\,P_k(r)$$

$$\mu_k = \int_{r_0}^{R} r\rho(r)\,P_k(r)\,dr = -\frac{1}{\lambda_k}\int_{r_0}^{R}\frac{\partial}{\partial r}\left[rk(r)\frac{\partial P_k}{\partial r}\right]\rho(r)\,dr$$

Постоянные μ_k — коэффициенты Фурье функции $\rho(r)$ относительно системы $P_k(r)$.

Интегрируя правую часть последнего равенства дважды по частям и учитывая, что $L\rho = 0$, $\rho(R) = 0$, получим

$$\mu_k = -P_k(r_0)\,/\,\lambda_k$$

Тогда

$$P(r,s) = P^*(r,s) + Q(s)\,\rho(r) = -\sum_{k=1}^{\infty}\frac{Q(s)\,P_k(r_0)}{\lambda_k + \beta s}\,P_k(r) \tag{1.5}$$

Так как $k(r) > 0$, в силу теоремы Мерсера ряд (1.5) сходится регулярно на $[r_0, R]$.

Полагая в (1.5) $r = r_0$, получим

$$P(r_0, s) = \Phi(s) = -Q(s)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k^2(r_0)}{\lambda_k + \beta s} \tag{1.6}$$

$$\Phi(s) = \int_0^{\infty}\varphi(t)e^{-st}dt$$

Введем обозначения

$$\lambda = -\beta s, \quad \Phi^*(\lambda) = \Phi(-\lambda/\beta) = \Phi(s), \quad Q^*(\lambda) = Q(s)$$

Тогда из (1.6) имеем (α_k — нормировочные множители задачи (1.4))

$$-\frac{\Phi^*(\lambda)}{Q^*(\lambda)} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{P_k^2(r_0)}{\lambda_k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_k(\lambda_k - \lambda)}, \quad \alpha_k = P_k^{-2}(r_0) \tag{1.7}$$

Таким образом, собственные числа оператора (1.4) совпадают с полюсами функции $-\Phi^*(\lambda)/Q^*(\lambda)$, а нормировочные множители равны

$$1/\alpha_k = \mathrm{Res}_{\lambda=\lambda_k}(\Phi^*(\lambda)/Q^*(\lambda))$$

В уравнении (1.4) сделаем замену переменных [5]

$$x = \frac{\pi}{B}\int_{r_0}^{r}\frac{dr}{\sqrt{k(r)}}, \qquad B = \int_{r_0}^{R}\frac{dr}{\sqrt{k(r)}} \tag{1.8}$$

$$r\sqrt{k(r)} = \theta(x), \qquad P\sqrt{\theta} = z(x)$$

Тогда $z(x)$ удовлетворяет уравнению

$$-z'' + l(x)z = \gamma z \tag{1.9}$$

$$z'(0) - hz(0) = 0, \qquad z(\pi) = 0$$

$$l(x) = \frac{(\sqrt{\theta})''}{\sqrt{\theta}}, \quad \gamma = \frac{B^2}{\pi^2}\lambda, \quad h = \frac{\theta'(0)}{2\theta(0)} \tag{1.10}$$

Обозначим через γ_k, β_k собственные числа и нормировочные множители задачи (1.9)

$$\gamma_k = B^2\pi^{-2}\lambda_k, \qquad \beta_k = \pi\alpha_k / B\theta(0)$$

Для γ_k, β_k справедливы ассимптотические формулы [6]

$$\sqrt{\gamma_k} = k + \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right), \qquad \beta_k = \frac{\pi}{2} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

Отсюда можно найти константы

$$B = \pi\lim_{k\to\infty}\frac{k}{\sqrt{\lambda_k}}, \qquad \theta(0) = \frac{2}{B}\lim_{k\to\infty}\alpha_k \tag{1.11}$$

Таким образом, для оператора (1.9) известен набор $\{\gamma_k, \beta_k\}$. Тогда функцию $l(x)$ можно определить, решив обратную задачу Штурма — Лиувилля для (1.9) [6,7].

Пусть $\psi(x, \gamma)$ — решение уравнения (1.9) при начальных условиях

$$\psi(0, \gamma) = 1, \quad \psi'(0, \gamma) = h \tag{1.12}$$

Известно, что существует ядро $K(x, t)$ такое, что [6,7]

$$\psi(x, \gamma) = \cos\sqrt{\gamma}\, x + \int_0^x K(x, t) \cos\sqrt{\gamma} t\, dt \tag{1.13}$$

Ядро $K(x, t)$ удовлетворяет при $t \leqslant x$ интегральному уравнению

$$f(x, t) + \int_0^x K(x, s) f(s, t)\, ds + K(x, t) = 0$$

$$f(x, t) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial t} \int_{-\infty}^{\infty} \gamma^{-1} \sin\sqrt{\gamma} x \sin\sqrt{\gamma} t\, d\tau(\gamma)$$

$$\sigma(\gamma) = \sum_{\gamma_k \leqslant \gamma} \frac{1}{\beta_k}, \quad \tau(\gamma) = \begin{cases} \sigma(\gamma) - \frac{2}{\pi}\gamma, & \gamma \geqslant 0 \\ \sigma(\gamma), & \gamma < 0 \end{cases}$$

Здесь $\sigma(\gamma)$ — спектральная функция оператора (1.9).

Функция $l(x)$ и константа, входящая в граничное условие, определяются через ядро $K(x, t)$

$$l(x) = \frac{1}{2} \frac{dK(x, x)}{dx}, \quad \frac{\theta'(0)}{2\theta(0)} = K(0, 0)$$

Функцию $\theta(x)$ можно выразить непосредственно через ядро $K(x, t)$, не проводя интегрирования уравнения (1.10). Полагая в (1.13) $\gamma = 0$, получим

$$\psi_0(x) = \psi(x, 0) = 1 + \int_0^x K(x, t)\, dt \tag{1.14}$$

Функция $\psi_0(x)$ удовлетворяет уравнению (1.9) при $\gamma = 0$ и начальным условиям (1.12). Но функция $\sqrt{\theta(x) / \theta(0)}$ удовлетворяет тому же уравнению и тем же граничным условиям. Следовательно

$$\theta(x) = \theta(0)\, \psi_0^2(x) \tag{1.15}$$

Учитывая (1.8), (1.15), получим параметрическое выражение для $k(r)$

$$r(x) = \left(2 \frac{B}{\pi} \theta(0) \int_0^x \psi_0^2(x)\, dx + r_0^2\right)^{1/2} \tag{1.16}$$

$$k(x) = \theta^2(0)\, \psi_0^4(x)\, r^{-2}(x)$$

Функция $\psi_0(x)$ определяется формулой (1.14), а $\theta(0)$ — равенством (1.11).

Таким образом, если существует функция $k(r) > 0$, $k(r) \in C^1[r_0, R]$, при которой реализуется данный режим эксплуатации скважины, то в классе положительных, непрерывно дифференцируемых на $[r_0, R]$ функций $k(r)$ единственна и определяется равенствами (1.16). Под режимом эксплуатации в данном случае понимается переопределенная система граничных условий (1.2), (1.3).

Выведем теперь некоторые интегральные соотношения для функции $\rho(r)$, которые могут быть полезны для приближенного определения $\rho(r) - \rho(r_0)$.

Физический смысл этой функции — общее фильтрационное сопротивление кольца $r_0 \leqslant r_1 \leqslant r$ при установившемся режиме откачки.

Нетрудно показать, что функции $P_k(r)\sqrt{r}$, где $P_k(r)$ — собственные функции оператора (1.4), являются собственными функциями интегрального оператора

$$P_k(r)\sqrt{r} = \lambda_k \int_{r_0}^{R} G_1(r, r_1) P_k(r_1) \sqrt{r_1} dr_1 \tag{1.17}$$

$$\frac{1}{\sqrt{rr_1}} G_1(r, r_1) = -\begin{cases} \rho(r_1), & r_0 \leqslant r \leqslant r_1 \\ \rho(r), & r_1 \leqslant r \leqslant R \end{cases}$$

Введем обозначения

$$G_p(r, r_1) = \int_{r_0}^{R} G_{p-1}(r, s) G_1(s, r_1) ds, \qquad p = 2, 3 \ldots$$

Для резольвенты ядра $G_1(r, r_1)$ в окрестности $\lambda = 0$ справедливо разложение

$$R(r, r_1, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} G_k(r, r_1) \tag{1.18}$$

С другой стороны, $R(r, r_1, \lambda)$ можно представить в виде ряда по собственным функциям оператора (1.17)

$$R(r, r_1, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{P_k(r) P_k(r_1) \sqrt{rr_1}}{\lambda_k - \lambda} \tag{1.19}$$

При $r = r_1 = r_0$, учитывая (1.7) и (1.18), получим

$$R(r_0, r_0, \lambda) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{r_0 P_k^2(r_0)}{\lambda_k - \lambda} = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda^{k-1} G_k(r_0, r_0) = -\frac{\Phi^*(\lambda) r_0}{Q^*(\lambda)} \tag{1.20}$$

Функция $\Phi^*(\lambda) r_0 / Q^*(\lambda)$ известна, поэтому известны коэффициенты

$$G_k(r_0, r_0) = a_k, \qquad k = 1, 2, 3 \ldots \tag{1.21}$$

Величины $G_k(r_0, r_0)$ выражаются через интегралы от функции $\rho(r)$. Заметим, что для того, чтобы получить значение

$$G_k(r_0, r_0) = \int_{r_0}^{R} G_{k-1}(r_0, s) G_1(s, r_0) ds \tag{1.22}$$

нужно знать повторные ядра только как функцию одного аргумента, например второго (ядра $G_k(r, r_1)$ симметричны).

Разложим каждую из функций $G_k(r_0, r)$ по полной ортонормированной системе $h_i(r)$

$$(1.23) \qquad -\sqrt{r_0}r\rho(r) = G_1(r_0, r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_i h_i(r)$$

$$G_k(r_0, r) = \sum_{i=1}^{\infty} c_{i,k} h_i(r)$$

Из определения повторных ядер следует, что коэффициенты $c_{i,k}$ можно выразить через c_i.

Ограничиваясь в разложении (1.23) N первыми членами с N неизвестными величинами c_i, $i = 1, 2, \ldots N$, составим N алгебраических уравнений относительно c_i. Воспользовавшись (1.22) и (1.23), получим

$$(1.24) \qquad \sum_{i=1}^{N} c_i h_i(r_0) = a_1, \quad \sum_{i=1}^{N} c_i c_{i,k} = a_{k+1}, \; k = 1, 2, \ldots, N-1$$

Коэффициенты $c_{i,k}$ удовлетворяют рекуррентным соотношениям

$$c_{i,\,k+1} = \sum_{m,\,n=1}^{\infty} \alpha_{imn} c_{m,k} c_n$$

$$\alpha_{imn} = \frac{1}{\sqrt{r_0}} \left\{ \int_{r_0}^{R} h_i h_n \left(\int_{r_0}^{r} h_m \sqrt{r_1}\, dr_1 \right) dr + \int_{r_0}^{R} h_i \sqrt{r} \left(\int_{r}^{R} h_m h_n\, dr_1 \right) dr \right\}$$

Решение системы (1.24) неединственно, но всегда можно переопределить (1.24), взяв $k \geqslant N$ и переопределенную систему решать каким-либо приближенным методом.

Отметим, что если опытные откачки производятся из скважины, работавшей до этого в стационарном режиме, то вместо (1.7) будем иметь

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{p_k^2(r_0)}{\lambda_k - \lambda} = -\frac{\Phi^*(\lambda) + p_0/\lambda}{Q^*(\lambda) + q_0/2\pi\lambda}$$

где q_0, p_0 — расход и давление в скважине в стационарном режиме.

2. Корректность определения коэффициента проницаемости по расходу и давлению в скважине. Рассмотрим вопрос об устойчивости определения функции $k(r)$ при малых возмущениях $\varphi(t)$ и $q(t)$.

Хорошо известно, что задачи подобного типа являются некорректными в классическом смысле, т. е. малые изменения исходных данных могут сильно влиять на решение соответствующих обратных задач. Однако при некоторых априорных ограничениях на функцию $k(r)$ можно доказать условную устойчивость рассматриваемой задачи.

Из (1.16) следует, что задача определения $k(r)$ по $\varphi(t)$ и $q(t)$ корректна, если корректна задача нахождения функции $\psi_0(x)$.

В работе [8] показано, что если две спектральные функции $\sigma_1(\gamma)$ и $\sigma_2(\gamma)$ задачи (1.9) совпадают при $-\infty < \gamma < N$ и

$$(2.1) \qquad |h| < d, \qquad |l(x)| < D$$

для $\psi_0(x)$ имеет место неравенство

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |\psi_{01}(x) - \psi_{02}(x)|^2 \leqslant \frac{S\exp\{2N^{-1/2}(d+DN^{-1/2})\}}{N^{1/2}[1-N^{-1/2}(d+\pi D)]^2} \tag{2.2}$$

при $\sqrt{N} > d + \pi D$, где S — некоторая константа, зависящая от d и D.

Из (2.2) следует, что

$$\max_{0\leqslant x\leqslant\pi} |\psi_{01}(x) - \psi_{02}(x)| \to 0 \quad \text{при } N\to\infty \tag{2.3}$$

Неравенство, аналогичное (2.2), может быть получено и в случае, когда спектральная функция на интервале $(-\infty, N)$ известна с погрешностью δ.

При $\delta \to 0$ справедливо (2.3).

Фиксируем некоторую функцию $q(t)$, для которой существует преобразование Лапласа. Обозначим через H класс функций $\{k(r)\}$ такой, что

$$k(r) \in C^2[r_0, R], \quad 0 < a \leqslant k(r) \leqslant b < \infty$$

$$|k'(r)| \leqslant M_1, \qquad |k''(r)| \leqslant M_2$$

Пусть A_q — оператор, ставящий в соответствие любому $k(r) \in H$ функцию $\varphi(t) = p(r_0, t)$, где $p(r, t)$ — решение уравнения (1.1) при граничных условиях (1.2).

Введем нормы для функций, зависящих от t или r соответственно

$$\|\varphi(t)\| = \max_{t\in(0,\infty)} |\varphi(t)|, \qquad \|k(r)\| = \max_{r\in[r_0, R]} |k(r)|$$

В дальнейшем, если это не будет оговариваться особо, стрелкой будем обозначать сходимость при $n\to\infty$.

Обозначим через U_q множество функций

$$\varphi(t) = A_q k(r), \qquad k(r) \in H$$

Тогда, как было показано, на U_q определен обратный оператор $A_q^{-1}\varphi(t) = k(r)$.

Покажем корректность по Тихонову обратной задачи в классе функций $k(r) \in H$, т. е. если

$$\|\varphi(t) - \varphi_n(t)\| \to 0, \qquad \varphi, \varphi_n \in U_q$$

то

$$\|A_q^{-1}\varphi - A_q^{-1}\varphi_n\| = \|k(r) - k_n(r)\| \to 0$$

Как следует из (2.2), для этого достаточно показать, что при $\|\varphi - \varphi_n\| \to 0$ выполняются следующие условия.

1°. Для задачи (1.9) справедливы неравенства

$$|h| < d, \qquad |l(x)| < D$$

2°. При любом k

$$\lambda_{kn} \to \lambda_k, \ \alpha_{kn} \to \alpha_k, \ B_n \to B, \ \theta_n(0) \to \theta(0)$$

Здесь $\lambda_{kn}, \alpha_{kn}, B_n, \theta_n(0)$ — соответствующие параметры задачи (1.4) с коэффициентом проницаемости $k_n(r)$.

Условие 1° можно получить, преобразуя уравнение (1.4) в (1.9). При этом константы d и D являются общими для всех $k(r) \in H$ и выражаются через a, b, M_1 и M_2.

Следуя идее работы [8] и учитывая ограничения на множество H, можно доказать, что собственные числа λ_k и нормировочные множители α_k оператора (1.4) при $k(r) \in H$ обладают следующими свойствами:

1) λ_k и α_k равномерно на H выходят на ассимптотику, т. е.

$$\sqrt{\lambda_k} = \frac{\pi}{B}\left(k+\frac{1}{2}\right) + \frac{\pi}{B}\frac{\gamma_k}{k}$$

$$\alpha_k = \frac{B\theta(0)}{2} + \frac{B\theta(0)}{\pi}\frac{\eta_k}{k}$$

$$\sup_{k,\,k(r)\in H} \gamma_k < \gamma_0 < \infty, \qquad \sup_{k,\,k(r)\in H} \eta_k < \eta_0 < \infty$$

2) Существуют константы λ', λ'' и α', α'' (λ', $\alpha' > 0$) такие, что для любых k, $k(r) \in H$

$$\lambda' \leqslant \lambda_1 \leqslant \lambda'', \qquad \alpha' \leqslant \alpha_k \leqslant \alpha''$$

3)

$$\inf_{k,\,k(r)\in H} |\lambda_k - \lambda_{k-1}| \geqslant \Delta\lambda > 0$$

Докажем теперь условие 2°. Поставим в соответствие каждой функции $k(r) \in H$ функцию

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta\alpha_k} e^{-\lambda_k t/\beta} \tag{2.4}$$

Здесь $\{\alpha_k, \lambda_k\}$ — спектральные параметры оператора (1.4).

Обозначим через $F = \{f\}$ множество функций вида (2.4).

Если $\varphi(t) \in U_q$, то из (1.6) следует

$$\varphi(t) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^t q(t-\tau) f(\tau)\, d\tau = -\frac{1}{2\pi} q(t) * f(t), \qquad f(t) \in F$$

Пусть последовательность (λ_{kn}, α_{kn} — спектральные параметры оператора (1.4) при $k_n(r) \in H$)

$$\varphi_n(t) = -\frac{q(t)}{2\pi} * f_n(t) = -\frac{q(t)}{2\pi} * \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta\alpha_{kn}} c^{-\lambda_{kn} t/\beta} \tag{2.5}$$

сходится к $\varphi(t)$.

Докажем, что $\lambda_{1n} \to \lambda_1$, $\alpha_{1n} \to \alpha_1$. Предположим противное. Тогда найдется последовательность $\{f_n'\} \subset \{f_n\}$ такая, что

$$\lambda_1 < \lambda_{1n}' - \rho \tag{2.6}$$

или

$$\lambda_{1n}' + \rho < \lambda_1 \qquad (\rho > 0) \tag{2.7}$$

Рассмотрим неравенство (2.6). В этом случае разность $\Delta f_n' = f - f_n'$ при достаточно больших t больше некоторой положительной, не зависящей от n функции.

Действительно

$$\Delta f_n' \geqslant e^{-\lambda_1 t/\beta}\left(\frac{1}{\beta\alpha_1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\beta\alpha_{kn}'} e^{-(\lambda_{kn}'-\lambda_1)t/\beta}\right)$$

В силу неравенства (2.6) и свойств 1), 2) существует $\tau_0 > 0$, такое, что при $t \geqslant \tau_0$ для всех f_n' выполняется неравенство

$$\Delta f_n' \geqslant \frac{1}{2\beta\alpha_1} e^{-\lambda_1 t/\beta}. \tag{2.8}$$

Покажем, что последнее неравенство противоречит условию сходимости функций $\varphi_n'(t)$ к $\varphi(t)$.

Для этого рассмотрим последовательность расширяющихся отрезков

$$[t_m, T_m], \qquad t_m \to 0, \qquad T_m \to \infty, \qquad m = 1, 2\ldots,$$

Из 1), 2) следует, что на любом отрезке $[t, T]$, $0 < t < T < \infty$ множество функций F равномерно ограничено и равностепенно непрерывно, следовательно, множество F — компакт на $[t, T]$.

Тогда существует функция Δf_0 и цепочка подпоследовательностей

$$\{\Delta f_n'\} \supset \{\Delta f_{n1}'\} \supset \ldots \supset \{\Delta f_{nm}'\} \supset \ldots$$

такие, что $\Delta f_{nm}'$ сходится равномерно к функции Δf_0 на отрезке $[t_m, T_m]$

Пусть t_0, $t \in [t_m, T_m]$. Тогда

$$\varphi(t) - \varphi_{nm}'(t) = \int_0^{t_0} \Delta f_{nm}'(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau + \tag{2.9}$$

$$+ \int_{t_0}^{t} (\Delta f_{nm}'(\tau) - \Delta f_0(\tau))\, q(t-\tau)\, d\tau + \int_{t_0}^{t} \Delta f_0(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau$$

Так как функция $\Delta f_{nm}'(t)$ интегрируема в окрестности нуля, при $n \to \infty$, $t_m \to 0$, $t_0 \to 0$ из (2.9) следует

$$\int_0^t \Delta f_0(\tau)\, q(t-\tau)\, d\tau \equiv 0, \qquad \Delta f_0(t) \equiv 0$$

Но последнее равенство противоречит (2.8). Совершенно аналогично можно придти к противоречию с (2.8), исследовав случай (2.7) или предположив, что α_{1n} не сходится к α_1. Далее, воспользовавшись свойством 3) и проводя аналогичные рассуждения, получим

$$\lambda_{kn} \to \lambda_k, \qquad \alpha_{kn} \to \alpha_k \text{ для } \forall\, k$$

Но тогда из 1) следует, что $B_n \to B$ и $\theta_n(0) \to \theta(0)$.

Таким образом, условия 1° и 2° выполняются, и, следовательно, исходная задача корректна в классе $k(r) \in H$.

В более общем случае можно рассмотреть пространство W пар функций $\langle q, \varphi \rangle$, где q — произвольная функция, для которой существует преобразование Лапласа, $\varphi \in U_q$. Сходимость в W определим следующим образом:

$$\langle q_n, \varphi_n \rangle \to \langle q, \varphi \rangle, \qquad \text{если } q_n \to q \text{ и } \varphi_n \to \varphi$$

Тогда оператор A^{-1}, отображающий W в H (не взаимнооднозначно), непрерывен в W.

Доказательство аналогично предыдущему.

В заключение автор благодарит П. Я. Кочину за внимание к работе и Л. А. Чудова за полезные советы.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Крейн М. Г.* Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи. Докл. АН СССР, 1954, т. 94, № 6.
2. *Благовещенский А. С.* Проблемы математической физики, вып. 1. Л., «Наука», 1968.
3. *Лаврентьев М. М., Резницкая К. Г.* Теоремы единственности некоторых нелинейных обратных задач уравнений параболического типа. Докл. АН СССР, 1973, т. 208, № 3.
4. *Полубаринова-Кочина П. Я., Пряжинская В. Г., Эмих В. Н.*, Математические методы в вопросах орошения. М., «Наука», 1970.
5. *Левитан Б. М., Саргсян И. С.* Введение в спектральную теорию. Самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1970.
6. *Гельфанд И. М., Левитан Б. М.*, Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Изв. АН СССР, Сер. матем., 1951, № 15.
7. *Гасымов М. Г., Левитан Б. М.* Определение дифференциального оператора по двум спектрам. Успехи матем. наук, 1964, т. 19, № 2.
8. *Марченко В. А.* Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев, «Наукова думка», 1972.