Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.517.4

МОДЕЛИРОВАНИЕ КАСКАДНЫХ ПРОЦЕССОВ В ТУРБУЛЕНТНЫХ ТЕЧЕНИЯХ

В. Н. Деснянский, Е. А. Новиков

(Москва)

Из уравнений гидродинамики выводятся модельные уравнения для коллективных степеней свободы — амплитуд Фурье поля скорости, просуммированных по октаве волновых чисел (в пределах октавы модуль волнового числа изменяется в два раза). Аналитически исследуются стационарные решения этих уравнений, которые дают в соответствующих инерционных интервалах законы подобия ($k^{-5/3}$ в трехмерной турбулентности, k^{-3} в двумерной турбулентности). Нестационарные задачи формирования каскадных процессов исследованы численно в [1].

При исследовании турбулентных течений особый интерес представляет моделирование каскадных процессов передачи энергии, завихренности, неоднородностей концентрации примеси по спектру турбулентных движений. Каскадные процессы определяют внутреннюю структуру течений и механизм турбулентной диссипации. В последние годы с помощью ЭВМ удалось смоделировать двумерное пространственно-периодическое течение при не очень большой вязкости и получить участок в спектре энергии $E(k) \sim k^{-3}$ [2–5], который соответствует каскадному процессу передачи завихренности [2, 6]. По численному моделированию трехмерных периодических течений авторам известна только одна работа [7], где числа Рейнольдса еще не достаточно велики, чтобы можно было проследить каскадный процесс передачи энергии и получить участок спектра с «законом — $^5/_3$».

Наряду с усовершенствованием численных экспериментов с большим числом степеней свободы, представляет интерес развитие таких методов сокращения числа степеней свободы, которые не препятствовали бы осуществлению каскадных процессов. Один из таких методов предлагается ниже.

1. Модель каскадных процессов. Рассмотрим пространственно-периодический поток несжимаемой вязкой жидкости. Уравнения Навье — Стокса для Фурье-компонент поля скорости имеют вид

$$\frac{\partial v_j(\mathbf{k})}{\partial t} = -i(\delta_{jl} - k_j k_l k^{-2}) k_m \sum_p v_l(\mathbf{p}) v_m(\mathbf{k}-\mathbf{p}) - \nu k^2 v_j(\mathbf{k}) + F_j(\mathbf{k}) \tag{1.1}$$

$$k_j v_j(\mathbf{k}) = 0, \qquad v_j^*(\mathbf{k}) = v_j(-\mathbf{k}) \tag{1.2}$$

Здесь k_j — компоненты волнового вектора, принимающие значения $2\pi L^{-1} n_j$ (L — пространственный период, n_j — целые числа), δ_{jl} — символ Кронекера, $F_j(\mathbf{k})$ — Фурье-компоненты поля внешних сил, (1, 2) — условия соленоидальности и вещественности поля скорости, выполняющиеся также для поля сил $F_j(\mathbf{k})$; по дважды повторяющимся индексам подразумевается суммирование от единицы до числа измерений $s = 2, 3$. Член с давлением выражен через скорость с использованием (1.2).

Нелинейный член в правой части (1.1), доставляющий большие трудности при численном моделировании, описывает обмен энергии между движениями различных масштабов. Квадратичный характер нелинейности приводит к эффекту удвоения волнового числа, что составляет суть каскадных процессов. Если в начальный момент времени имеется волновой пакет с $k \backsim k_1$, то в дальнейшем будут последовательно появляться гармоники с $k \backsim k_1 2^{i-1}$ $i = 2, 3, \ldots$

Введем Фурье-амплитуды поля скорости, просуммированные по октаве волновых чисел $\sqrt{2}k / 2 \leqslant |\mathbf{k}'| \leqslant \sqrt{2}\, k$ (в дальнейшем это отмечено верхним нулевым индексом у знака суммы)

$$u^2(k) = \left\langle \sum\nolimits^{\circ} v_j(\mathbf{k}') v_j(-\mathbf{k}') \right\rangle$$

Угловые скобки означают вероятностное усреднение по ансамблю реализаций.

Из (1.1), (1.2) получим

$$u(k)\frac{\partial u(k)}{\partial t} = \left\langle \sum\nolimits^{\circ} \Big[-ik_m' \sum_{\mathbf{p}} v_l(-\mathbf{k}') v_l(\mathbf{p}) v_m(\mathbf{k}' - \mathbf{p}) - \right. \tag{1.3}$$
$$\left. - \nu (k')^2 v_l(\mathbf{k}') v_l(-\mathbf{k}') + F_l(\mathbf{k}') v_l(-\mathbf{k}') \Big] \right\rangle$$

Учитывая, что главную роль в формировании каскадного процесса играют слагаемые с $p \backsim k / 2$ и $p \backsim 2k$, можно аппроксимировать первый член в правой части (1.3) выражением

$$\alpha_s k u(k)\, u^2(k / 2) - \bar{\alpha}_s k u^2(k)\, u(2k)$$

где α_s, $\bar{\alpha}_s$ $(s = 2, 3)$ — безразмерные постоянные. Условие сохранения (при $\nu = 0$, $F_j = 0$) величины

$$I^{(m)} = \frac{1}{2} \sum_k k^m u^2(k) \tag{1.4}$$

(суммирование ведется по $k = k_1 2^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$) дает

$$\bar{\alpha}_s^{(m)} = 2^{1+m} \alpha_s^{(m)}$$

Случай $m = 0$ отвечает сохранению энергии $(s = 2, 3)$, $m = 2$ отвечает сохранению квадрата вихря $(s = 2)$. В трехмерном течении энергия передается от больших масштабов к малым, следовательно, $\alpha_3^{(0)} > 0$. То же самое можно сказать о передаче завихренности в двумерном течении, так что $\alpha_2^{(2)} > 0$. Однако энергия в двумерном течении передается от малых масштабов к большим [6, 8]. Таким образом, $\alpha_2^{(0)} < 0$.

Обозначим

$$\left\langle \sum\nolimits^{\circ} (k')^2 v_l(\mathbf{k}') v_l(-\mathbf{k}') \right\rangle = \beta(k) k^2 u^2(k)$$
$$\left\langle \sum\nolimits^{\circ} F_l(\mathbf{k}') v_l(-\mathbf{k}') \right\rangle = u(k) F(k)$$

При этом приходим к следующему уравнению:

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = \alpha_s^{(m)} k \left[u^2\left(\frac{k}{2}\right) - 2^{1+m} u(k)\, u(2k) \right] - \nu\beta(k) k^2 u(k) + F(k) \tag{1.5}$$

Если вместо двойки ввести изменение масштабов в h раз $(h > 1)$ и в (1.4) подразумевать суммирование по $k_i = k_1 h^{i-1}$, $i = 1, 2, \ldots$, то (1.5) заменится на [1]

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = \alpha_s^{(m)} k \left[u^2\left(\frac{k}{h}\right) - h^{1+m} u(k)\, u(kh)\right] - \nu\beta(k)\, k^2 u(k) + F(k) \tag{1.6}$$

2. Стационарный режим подобия. Для установившегося режима в инерционном интервале волновых чисел (где несущественно влияние вязкости и внешних источников энергии) уравнение (1.6) принимает вид

$$u^2(kh^{-1}) = h^{1+m}\, u(k)\, u(kh) \tag{2.1}$$

Это уравнение имеет решение

$$u(k) = A_s^{(m)} k^{-(1+m)/3} \tag{2.2}$$

отвечающее параметрическому подобию с определяющим параметром

$$\varepsilon_s^{(m)} = \alpha_s^{(m)} k^{1+m} u^2(kh^{-1})\, u(k) = \alpha_s^{(m)} (A_s^{(m)})^3\, h^{2(1+m)/3} \tag{2.3}$$

Здесь $\varepsilon_s^{(0)}$ — поток энергии по спектру ($s = 2, 3$), $\varepsilon_2^{(2)}$ — поток энстрофии (равной половине среднего квадрата вихря).

Согласно § 5, диссертации Е. А. Новикова (см. сноску на стр. 509), при параметрическом подобии статистические характеристики поля $\mathbf{v}(\mathbf{k})$ инвариантны относительно преобразований вида

$$\lambda^\sigma \mathbf{v}(\lambda \mathbf{k}) \leftrightarrows \mathbf{v}(\mathbf{k})$$

Здесь стрелками обозначена статистическая эквивалентность полей, λ — произвольное число, σ — индекс параметрического подобия, связанный с размерностью определяющего параметра χ следующим образом:

$$\sigma = b\,/\,a, \qquad [\chi] = [v]^a\,[k]^b$$

При $\chi = \varepsilon_s^{(m)}$ из (2.3) имеем

$$a = 3, \quad b = 1 + m, \qquad \sigma = (1 + m)\,/\,3$$

Для спектральной плотности кинетической энергии из соотношения

$$u^2(k) = 2\int_{kh^{-1/2}}^{kh^{1/2}} E(k_1)\, dk_1$$

и (2.2), (2.3) получим (опущены индексы при B, A, ε, α)

$$E(k) = Bk^{-(5+2m)/3} \tag{2.4}$$

$$B = \frac{A^2(1+m)}{3\,(h^{(1+m)/3} - h^{-(1+m)/3})} = \frac{\varepsilon^{2/3}(1+m)}{3\alpha^{2/3} h^{(1+m)/9} [h^{2(1+m)/3} - 1]} \tag{2.5}$$

В рассматриваемом сейчас инерционном интервале волновых чисел можно воспользоваться более простым соотношением

$$E(k) \approx \frac{u^2(k)}{2\delta k} = \frac{A^2 h^{1/2}}{2(h-1)} k^{-(5+2m)/3}, \qquad \delta k = k(h^{1/2} - h^{-1/2}) \tag{2.6}$$

---

[1] Эта модель каскадных процессов была предложена Е. А. Новиковым в 1970 г. в докладе на семинаре Института теоретической физики им. Л. Д. Ландау АН СССР в связи с теорией параметрического и масштабного подобия (см. Е. А. Новиков. Статистические модели в теории турбулентности. Докторская диссертация, М., 1969 г. и работа [9]).

которое отличается от (2.4), (2.5) множителем, близким к единице при $h = 2$, $m = 0, 2$.

При $m = 0$ (2.4), (2.5) дают закон $-^5/_3$ (для согласования постоянной в спектре энергии с экспериментальными данными следует положить $\alpha_3^{(0)} \approx 0.2$), при $m = 2$ — «закон—3».

Уравнение (2.1) допускает более общее решение

$$u(k) = A'k^{-(1+m)/3} \exp [C(-2)^{\log_h k}] \tag{2.7}$$

которое при $C \neq 0$ не отвечает параметрическому подобию.

Проведенные авторами численные эксперименты [1] показали, что в рассматриваемой модели осуществляется подобие (с увеличением числа каскадов $C \to 0$). Представляет интерес исследовать этот вопрос аналитически, тем более, что это исследование объясняет особенности поведения решений также для другой разобранной ниже каскадной модели.

Рассмотрим систему из n каскадов. Запишем уравнение (1.6) в конечномерном представлении

$$\frac{du_i}{dt} = \alpha_s^{(m)} k_i [u_{i-1}^2 - h^{1+m} u_i u_{i+1}] - \nu\beta_i k_i^2 u_i + F_i \tag{2.8}$$

$$u_i \equiv u(k_i), \ k_i = k_1 h^{i-1}, \ i = 1, \ldots, n; \ u_0 = u_{n+1} \equiv 0$$

Стационарный режим каскадной модели определяется наличием источников и стоков энергии или завихренности. Для простоты предположим, что внешняя сила действует только в первом каскаде [1], причем выберем ее так, чтобы поддерживалась постоянной амплитуда u_1, играющая роль внешнего параметра задачи. При достаточно больших значениях числа Рейнольдса $R = \alpha u_1 k_1^{-1} \nu^{-1}$ (оценка приведена ниже) вязкость непосредственно действует только на последний каскад, поэтому естественно упростить анализ, положив $\beta_i = 0$, $i = 1, \ldots, n-1$, $\beta_n = 1$. В этих предположениях из (2.8) имеем систему уравнений для стационарного состояния

$$u_i^2 = h^{1+m} u_{i+1} u_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, n-2 \tag{2.9}$$

$$u_{n-1}^2 = \nu\alpha^{-1} k_n u_n$$

Введем величины

$$\varphi_i = \frac{1}{3}(i-1)(1+m) + \log_h (u_i u_1^{-1}) \tag{2.10}$$

характеризующие отклонение от режима подобия. Получим

$$2\varphi_i = \varphi_{i+1} + \varphi_{i+2}, \quad i = 1, \ldots n-2 \tag{2.11}$$

$$2\varphi_{n-1} = \gamma_n + \varphi_n, \ \varphi_1 = 0 \tag{2.12}$$

$$\gamma_n = (4+m)\, n / 3 - 2 - m - \log_h R \tag{2.13}$$

Полагая $\varphi_i = \lambda^i$, из (2.11) имеем

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0, \quad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -2$$

---

[1] Случай $s = 2$, $m = 0$, $\alpha < 0$, когда энергия передается от малых масштабов к большим, может быть рассмотрен аналогично.

Методом полной математической индукции доказывается, что $\varphi_i = a + (-2)^i b$ дает общее решение уравнения для возвратной последовательности (2.11). Из краевых условий (2.12) получим

$$a = 2b = -\gamma_n [(-2)^n - 1]^{-1}$$

Окончательно имеем единственное стационарное решение задачи

$$(2.14) \qquad u_i = u_1 h^{\varkappa}, \quad \varkappa = -\frac{(i-1)(m+1)}{3} + \gamma_n \frac{(-2)^{i-1} - 1}{(-2)^n - 1}$$

При $n \to \infty$, $i / n < q < 1$ (q — постоянная), решение (2.14) переходит в режим подобия (2.2) с независящей от R константой, определяемой (2.3). Если рассматривать R как функцию от n, то в силу (2.13) для указанного предельного перехода достаточно потребовать, чтобы величина $\log_h R$ увеличивалась с ростом n медленнее, чем экспоненциально. Это требование вполне оправдано, поскольку при моделировании турбулентного течения число каскадов n естественно выбирать, исходя из требования

$$(2.15) \qquad k_n \equiv k_1 h^{n-1} \gtrsim (l_\nu^{(m)})^{-1} = (\varepsilon^{(m)}/\nu^{-3})^{1/(4+m)} \approx k_1 R^{3/(4+m)}$$

где $l_\nu^{(m)}$ — внутренний масштаб турбулентности, совпадающий при $m = 0$ с колмогоровским внутренним масштабом [10], а при $m = 2$ — с масштабом, введенным в [2, 6]. Если неравенство в (2.15) заменить на равенство, то для максимального R получим

$$(2.16) \qquad \log_h R \approx {}^1/_3 (n-1)(4+m)$$

При этом действие вязкости будет существенно только для последнего каскада, а γ_n перестанет зависеть от n.

Режим подобия для рассматриваемой модели является, в некотором смысле, устойчивым относительно мелкомасштабных возмущений. Отвлекаясь от специфики краевых условий (2.12), непосредственно из (2.11) получим

$$(2.17) \qquad \delta\varphi_{i-l} = (-{}^1/_2)^l \, \delta\varphi_i, \qquad \delta\varphi_i = \varphi_{i+1} - \varphi_i$$

Таким образом, отклонение от закона подобия в области больших волновых чисел (например за счет действия вязкости) быстро затухает по мере проникновения в область меньших волновых чисел.

3. Модель А. М. Обухова. Исследуя системы уравнений гидродинамического типа, А. М. Обухов подробно разобрал случай триплета [11]. Рассматривая систему зацепляющихся триплетов, он пришел к определенной модели каскадного процесса [12]. По предложенной здесь классификации А. М. Обухов рассматривал случай $m = 0$, $\alpha > 0$ ($s = 3$). Уравнения модели Обухова, обобщенные на случай произвольного m, в принятых обозначениях имеют вид

$$(3.1) \qquad \begin{gathered} \partial u_i/\partial t = \alpha k_i \left[u_{i-1} u_i - h^{1+m} u_{i+1}^2\right] - \nu \beta_i k_i^2 u_i + F_i \\ k_i = k_1 h^{i-1}, \quad h > 1, \quad i = 1, \ldots, n; \quad u_0 = u_{n+1} \equiv 0 \end{gathered}$$

На первый взгляд, уравнения (2.8) и (3.1), полученные независимо и из различных соображений, очень похожи. При отсутствии вязкости и внешних сил уравнение (3.1), как и (2.8), допускает стационарное решение, отвечающее режиму подобия (2.2). Однако уравнение (3.1) при $\beta_i \equiv 0$, $F_i \equiv 0$ допускает также стационарное решение, в котором вся энергия сосредоточена в первой гармонике ($u_1 \neq 0$, $u_i = 0, i > 1$), тогда как (2.8) не имеет такого решения. Более того, если внешние силы непосредственно не действуют на мелкомасштабные гармоники ($F_i \equiv 0$, $i > l$) и в начальный момент времени эти гармоники не возбуждены ($u_i(0) = 0, i > l$), то, согласно (3.1), энергия не будет передаваться от крупномасштабных гармоник к мелкомасштабным. В модели (2.8), напротив, мелкомасштабные гармоники будут возбуждаться за счет крупномасштабных. Ниже проведем анализ, аналогичный тому, который был проведен в п. 2 для модели (2.8).

Для стационарного режима в случае, когда внешняя сила поддерживает u_1 постоянной, а вязкость действует только в последнем каскаде, из (3.1) имеем (предполагается, что $u_n \neq 0$; при $u_n = 0$ и $\beta_{n-1} = 1$ задача сводится к аналогичной с заменой n на $n-1$)

$$u_i u_{i+1} = h^{1+m} u_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, n-2 \qquad (3.2)$$

$$u_{n-1} = \nu \alpha^{-1} k_n$$

Вводя величины φ_i (2.10), получим

$$\varphi_i + \varphi_{i+1} = 2\varphi_{i+2}, \quad i = 1, \ldots, n-2 \qquad (3.3)$$

$$\varphi_1 = 0, \quad \varphi_{n-1} = \gamma_n' \qquad (3.4)$$

$$\gamma_n' = n(4+m)/3 - (5+2m)/3 - \log_h R \qquad (3.5)$$

Общее решение (3.3) имеет вид

$$\varphi_i = a_1 + \left(-\frac{1}{2}\right)^i b_1$$

Определяя a_1, b_1 из краевых условий (3.4), окончательно получим

$$u_i = u_1 h^{\varkappa_1}, \quad \varkappa_1 = -\frac{(i-1)(m+1)}{3} + \gamma_n' \frac{1-(-1/2)^{i-1}}{1-(-1/2)^{n-2}} \qquad (3.6)$$

Заметим, что уравнения (3.2) и их обобщение на случай, когда все $\beta_i \neq 0$, допускает второе решение, отличающееся знаком u_n. При $n \to \infty$ и $\gamma_n' \neq 0$ решение (3.6) не переходит в режим подобия. Формально, при $i \to \infty$ (3.6) дает правильную степенную зависимость от волнового числа, но коэффициент пропорциональности оказывается существенно зависящим от вязкости.

Из (3.3) для величины $\delta\varphi_i$ получим

$$\delta\varphi_{i-l} = (-2)^l \delta\varphi_i$$

В отличие от (2.17) здесь мелкомасштабные отклонения от стационарного режима подобия нарастают по мере продвижения в область больших масштабов (малых волновых чисел). Также оказывается, что стационарное решение модели (3.1) в линейном приближении неустойчиво, так как след матрицы, полученной в результате такого приближения, положителен [13]. К аналогичному выводу о неустойчивости стационарного решения для модели (3.1) пришли также А. Б. Глуховский и А. Б. Карунин.

Проведенные авторами численные эксперименты показывают, что в модели (3.1) быстро развиваются возмущения, уводящие от режима подобия.

4. Формальный вывод и обобщение моделей. Отвлекаясь от внешних сил и диссипации, покажем, как модели (2.8), (3.1) и их обобщение получаются на основании следующих общих требований: 1) квадратичный характер нелинейных членов; 2) масштабная инвариантность безразмерных коэффициентов в уравнении; 3) взаимодействие непосредственно осуществляется только между ближайшими соседями по спектру (приближение широко используемое в теоретической физике); 4) наличие квадратичного интеграла (1.4).

Из требований 1) — 3) следует ($a_1, \ldots, a_6$ — безразмерные коэффициенты, независящие от k)

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = k\,[a_1 u^2(kh^{-1}) + a_2 u(kh^{-1})\,u(k) + a_3 u(kh^{-1})\,u(kh) + a_4 u^2(k) + a_5 u(k)\,u(kh) + a_6 u^2(kh)]$$

Условие 4) дает

$$a_3 = a_4 = 0, \quad a_5 = -h^{1+m}a_1, \quad a_6 = -h^{1+m}a_2$$

Окончательно имеем

$$\frac{\partial u(k)}{\partial t} = a_1 k\,[u^2(kh^{-1}) - h^{1+m}u(k)\,u(kh)] + a_2 k\,[u(kh^{-1})\,u(k) - h^{1+m}u^2(kh)] \tag{4.1}$$

Полученное уравнение имеет стационарное решение (2.2), отвечающее режиму подобия. При $a_2 = 0$ из (4.1) получается модель (1.6), (2.8), при $a_1 = 0$ — модель (3.1). Первая модель переходит во вторую при преобразовании

$$h \to h^{-1}, \qquad t \to -h^{1+m}t$$

т. е. при отражении направлений изменения масштабов и времени.

Отказавшись от ограничения 3), можно получить более общий класс моделей, которые рассмотрены в [14].

К этому более общему классу принадлежит, в частности, модель, опубликованная недавно в [15]. Однако, как показывают проведенные авторами численные эксперименты, в этой модели не устанавливаются режимы подобия [14].

Поступила 27 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Деснянский В. Н., Новиков Е. А.* Эволюция спектров турбулентности к режиму подобия. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1974, т. 10, № 2.
2. *Batchelor G. K.* Computation of the energy spectrum in homogeneous two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 12.
3. *Lilly D. K.* Numerical simulation of two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 1969, vol. 12, No. 12.
4. *Lilly D. K.* Numerical simulation of developing and decaying two-dimensional turbulence. J. Fluid Mech., 1971, vol. 45, No. 2.
5. *Гаврилин Б. Л., Мирабель А. П., Монин А. С.* О спектре энергии синоптических процессов. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1972, т. 8, № 5.
6. *Kraichnan R. H.* Inertial ranges in two-dimensional turbulence. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 7.
7. *Orszag S. A., Patterson G. S.* Numerical simulation of three-dimensional homogeneous isotropic turbulence. Phys. Rev. Letters, 1972, vol. 28, No. 2.
8. *Новиков Е. А.* Статистическая необратимость турбулентности и передача энергии по спектру. В сб.: Проблемы турбулентных течений. М., «Наука», 1974; Archives of mechanics, 1974, № 4.
9. *Новиков Е. А.* Перемежаемость и масштабное подобие в структуре турбулентного потока. ПММ, 1971, т. 35, вып. 2.
10. *Колмогоров А. Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой жидкости при очень больших числах Рейнольдса. Докл. АН СССР, 1941, т. 30, № 4.
11. *Обухов А. М.* Об интегральных инвариантах в системах гидродинамического типа. Докл. АН СССР, 1969, т. 184, № 2.
12. *Обухов А. М.* О некоторых общих характеристиках уравнений динамики атмосферы. Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1971, т. 7, № 7.
13. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. М., «Наука», 1967.
14. *Деснянский В. Н.* Спектральные модели турбулентности. Тр. ВНИИГМИ — МЦД, вып. 8, 1974.
15. *Гледзер Е. Б.* Система гидродинамического типа, допускающая два квадратичных интеграла движения. Докл. АН СССР, 1973, т. 209, № 5.