Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.5

О НЕУСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНЫХ ТЕЧЕНИЙ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Э. Э. Шноль

(Москва)

Показано, что стационарные течения идеальной жидкости в канале, имеющие выпуклый профиль скорости, неустойчивы по Ляпунову: возмущения могут расти линейно со временем. В доказательствах предполагается, что малость возмущений при $t = 0$ и при $t > 0$ понимается в одном и том же смысле (используется одна и та же норма). В зависимости от выбора нормы неустойчивость носит двумерный или существенно трехмерный характер.

1. Постановка задачи. В теории гидродинамической устойчивости интересуются большей частью сильной (экспоненциальной) неустойчивостью. В случаях, когда ее нет, интересно выяснить, есть ли устойчивость в смысле какого-либо точного определения. Центральный вопрос при этом — как именно понимать «малость» возмущений, какой нормой пользоваться в определении устойчивости. Кажется естественным считать возмущение $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ малым, если малы $\|\mathbf{u}(\mathbf{x})\|_1 = \sup|\mathbf{u}(\mathbf{x})|$ или $\|\mathbf{u}\|_2 = (\int|\mathbf{u}(\mathbf{x})|^2 d\mathbf{x})^{1/2}$. Иногда разумна норма $\|\mathbf{u}\|_3 = \|\mathbf{u}\|_2 + \|\operatorname{grad}\mathbf{u}\|_2$. Ниже показано, что в любой из этих норм все стационарные плоскопараллельные течения идеальной жидкости, имеющие выпуклый профиль скорости $U_0(y)$, неустойчивы. Традиционно предполагается, что неустойчивость в линейном приближении гарантирует истинную неустойчивость, и рассматриваются возмущения с заданной периодичностью по x и z (рассмотрение возмущений общего вида приводит к аналогичным результатам).

Определения. Стационарное течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ неустойчиво в смысле нормы $\|\mathbf{u}\|$, если для всякого n существует решение линеаризованных уравнений $\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)$ такое, что

$$\sup_{0\leqslant t<\infty}\|\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, t)\| \geqslant n\|\mathbf{u}_n(\mathbf{x}, 0)\| \tag{1.1}$$

Соответственно течение $\mathbf{u}_0(\mathbf{x})$ устойчиво (в линейном приближении), если существует постоянная K такая, что

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leqslant K\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0)\| \tag{1.2}$$

Вместо (1.2) часто требуют ограниченности каждого индивидуального решения: для любого $\mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) = \boldsymbol{\varphi}(\mathbf{x})$

$$\|\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)\| \leqslant C \tag{1.3}$$

Это требование равносильно (1.2), если φ (x) пробегает некоторое полное нормированное пространство, и ограниченность в (1.3) понимается в смысле нормы того же пространства (см., например, [1], стр. 149). При невыполнении одного из этих условий из (1.3) не вытекает устойчивость в смысле (1.2).

2. Исходные уравнения. Неустойчивость при $k = 0$. Положив для всех функций $\psi(x, y, z; t) = \psi(y, t) e^{i(kx+mz)}$, запишем линеаризованные уравнения

$$(2.1)\qquad \begin{gathered} u_t + ikU_0u + U_0' v + ikp = 0 \\ v_t + ikU_0v + p' = 0, \qquad v(0, t) = v(1, t) = 0 \\ w_t + ikU_0w + imp = 0, \qquad iku + v' + imw = 0 \\ \left(\psi' = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \quad \psi_t = \frac{\partial\psi}{\partial t}, \quad \mathbf{U}_0 = (U_0(y), 0, 0)\right) \end{gathered}$$

Здесь $\mathbf{u} = (u, v, w)$, p — малые возмущения, $\mathbf{U}_0$ — невозмущенная скорость.

Из (2.1) вытекает

$$(2.2)\qquad p'' - (k^2 + m^2)\, p = -2ikU_0'v, \qquad p'(0, t) = p'(1, t) = 0$$

$$(2.3)\qquad v_t + ikU_0(y)v - 2ik\int_0^1 \frac{\partial G_n}{\partial y}(y, \eta)\, U_0'(\eta)\, v(\eta, t)\, d\eta = 0$$

Система (2.1) имеет частные решения

1) При $k = 0, \quad m \neq 0$

$$(2.4)\qquad \begin{gathered} u = f(y) - tU_0'(y)v(y), \; v = v(y), \; w = w(y), \; p = 0 \\ (v' + imw = 0) \end{gathered}$$

2) При $k \neq 0$, $m \neq 0$

$$(2.5)\qquad \begin{gathered} p = v = 0, \qquad u(y, t) = u(y, 0)\, e^{-ikU_0(y)t} \\ w(y, t) = w(y, 0)\, e^{-ikU_0(y)t}. \end{gathered}$$

Обозначим

$$(2.6)\qquad \|\mathbf{u}\|_1 = \sup_y |\mathbf{u}(y)|, \; \|\mathbf{u}\|_2 = \left(\int_0^1 |\mathbf{u}(y)|^2 dy\right)^{1/2}, \quad \|\mathbf{u}\|_3 = \|\mathbf{u}\|_2 + \|\mathbf{u}'\|_2$$

Тогда из (2.4) и (2.5) видна неустойчивость (2.1):

1) при $k = 0$, $m \neq 0$ в смысле любой нормы

2) при $k \neq 0$, $m \neq 0$ в смысле $\| u \|_3$.

Заметим, что на подпространстве $iku + v' + imw = 0$, $v(0) = v(1) = 0$, норма $\| \mathbf{u} \|_2$ эквивалентна следующей:

$$(2.7)\qquad \|\mathbf{u}\| = \left(\int_0^1 [|u|^2 + |v'|^2 + |w|^2]\, dy\right)^{1/2}$$

Рассмотрим уравнение (2.3) и норму

$$\|v\|_3 = \left(\int_0^1 |v'|^2 dy\right)^{1/2}, \quad v' = \frac{\partial v}{\partial y} \, (v(0) = v(1) = 0) \tag{2.8}$$

Можно убедиться, что из неустойчивости (2.3) в этой норме вытекает неустойчивость системы (2.1) в норме (2.7) или $\|\mathbf{u}\|_2$.

Уравнение (2.3) инвариантно относительно замены $v(y, t) \to \bar{v}(y, -t)$. Поэтому для доказательства неустойчивости достаточно указать хотя бы одно стремящееся к нулю решение. Действительно, если $\|v(y, t_n)\| \leqslant \leqslant 1/n \; \|v(y, 0)\|$, то для $v_n(y, t) = \bar{v}(y, t_n - t)$ имеем (см. (1.1))

$$\sup_t \|v_n(y, t)\| \geqslant n \|v_n(y, 0)\| \tag{2.9}$$

3. Неустойчивость при $k \neq 0$ (m—любое). Предположим теперь, что выполнено условие Релея $U_0''(y) \neq 0$, гарантирующее отсутствие сильной неустойчивости.

При $U_0''(y) \neq 0$ все достаточно гладкие решения уравнения (2.3) стремятся к нулю. Этот важный факт указан без строгого доказательства в [2,3]. Дадим такое доказательство, проведя его ради краткости в абстрактных терминах.

Пусть $\gamma = v'' - (k^2 + m^2) v$. Тогда из (2.3)

$$\partial\gamma/\partial t = iA\gamma, \quad A\gamma = -kU_0(y)\gamma + kU_0''(y)\, v \tag{3.1}$$

При $U_0'' \neq 0$ оператор A самосопряжен в метрике

$$(\gamma^{(1)}, \gamma^{(2)}) = \int_0^1 \gamma^{(1)}\bar{\gamma}^{(2)} |U_0''(y)|^{-1} dy$$

и имеет (при $k \neq 0$) непрерывный спектр, заполняющий отрезок. Как показано в [4], спектр этот абсолютно непрерывен. Отсюда следует, что все решения (3.1) $\gamma(t) = e^{iAt}\gamma(0)$ слабо стремятся к нулю при $t \to \infty$ (т. е. $(\gamma(t), \varphi) \to 0$ для любой функции φ).

Далее, $v' = I\gamma$, где I — интегральный оператор с кусочно-непрерывным ядром. Он вполне непрерывен в $L_2(0, 1)$ и потому $(v', v') \to 0$ и

$$\|v\|_3 = \left(\int_0^1 |v'(y,t)|^2 dy\right)^{1/2} \to 0 \quad \text{при } t \to \infty$$

Итак, система (2.1) неустойчива в смысле нормы $\|\mathbf{u}\|_2$. Неустойчивость в смысле $\|\mathbf{u}\|_1$ показывается аналогично.

При подходящем выборе $\gamma(y, 0)$ $\|v(y, t)\|_3 \leqslant C/t$ (см. [2] и примечание 3). Поэтому можно рассчитывать примерно на линейный рост возмущений со временем (см. 2.9).

4. Принятая в п. 1 формулировка проблемы устойчивости не является, конечно, единственно возможной. Оставаясь в рамках идеи о возмущении течения только при $t = 0$, можно сузить класс начальных возму-

щений, например, считать возмущение малым, если малы скорости и их производные. Вместо (1.2) будет тогда условие типа $\| \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) \|_2 \leqslant M \cdot \| \mathbf{u}(\mathbf{x}, 0) \|_3$ (M не зависит от $\mathbf{u}$).

В линеаризованной задаче (п. 2) устойчивость в указанном расширенном смысле есть при $k \neq 0$ (см. [5]). При $k = 0$, $m \neq 0$ устойчивости нет (см. (2.4)). Ее нет поэтому (при трехмерном рассмотрении) и в точном нелинейном смысле.

Для других стационарных течений идеальной жидкости устойчивость в расширенном смысле не исключена. Но можно ожидать, что в обычном смысле (п. 1) все стационарные течения идеальной жидкости в канале, трубе и между двумя вращающимися цилиндрами обладают (по крайней мере слабой) неустойчивостью.

Примечания. 1) (к п. 1). По-видимому, лишь в одном случае установлена устойчивость по Ляпунову для течений идеальной жидкости в канале. Это случай, когда рассматриваются выпуклые профили $U_0(y)$, только плоские возмущения, норма $\| \mathbf{u} \|_3$. При этом имеет место не только устойчивость в смысле (1.2), но и точная (нелинейная) устойчивость по Ляпунову, [6]. (При линейном рассмотрении можно несколько ослабить первое требование.)

2) (к п. 2). Очевидная в рассматриваемой задаче трехмерная неустойчивость в смысле $\| \mathbf{u} \|_3$ (или $\| \operatorname{rot} \mathbf{u} \|_2$) есть, вероятно, частное проявление общей тенденции трехмерных (непотенциальных) течений к увеличению завихренности. Для стационарных течений «общего вида» эта тенденция обсуждается (но не доказывается) в [7].

3) (к п. 3). Абсолютная непрерывность спектра A — сравнительно тонкий результат. Здесь достаточно ме́ньшего. Пусть $A_0\gamma = -kU_0(y)\gamma$, $A = A_0 + B$. Следующее рассуждение (обычное для теории возмущений в непрерывном спектре) показывает, что при некоторых γ_0 асимптотически $e^{itA}\gamma_0 \sim e^{itA_0}h$. Пусть $\psi = e^{-itA}e^{itA_0}h$. Тогда

$$\frac{d\psi}{dt} = -ie^{-itA}Be^{itA_0}h, \qquad \left\| \frac{d\psi}{dt} \right\| \leqslant C \| Be^{itA_0}h \|$$

Пусть h — дважды непрерывно дифференцируема и равна нулю в некоторой окрестности точек 0, 1, y_c (где $U_0'(y_c) = 0$). Тогда

$$\| Be^{itA_0}h \| \leqslant C / t^2, \qquad \psi(t) = \psi_\infty + O(1/t)$$

Положим $\gamma_0 = \psi_\infty$. Тогда

$$\gamma(t) = e^{itA}\gamma_0 = e^{itA_0}h + \varepsilon = e^{-iktU_0(y)}h(y) + \varepsilon(y, t), \ \| \varepsilon \| \leqslant C / t$$

$$v'(y, t) = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(y, \eta)\, \gamma(\eta, t)\, d\eta = J + \varepsilon_1$$

$$J = \int_0^1 \frac{\partial G}{\partial y}(y, \eta)\, e^{-iktU_0(\eta)}h(\eta)\, d\eta$$

Здесь $G(y, \eta)$ — функция Грина для

$$v'' - (k^2 + m^2)v = f, \quad v(0) = v(1) = 0$$

Интеграл J (равномерно по y) стремится к нулю ($= O(1/t)$). Отсюда

$$\| v \|_3 = \| v' \|_2 \leqslant C / t$$

4) (к п. 4). В часто цитируемых работах [2, 3, 8] рассматриваются плоские возмущения ($m = 0$) и обсуждается ограниченность индивидуальных решений линеаризованных уравнений при $t \to \infty$. При этом используется конечность $|\operatorname{grad} \mathbf{u}|_{t=0}$. Важно подчеркнуть, что если ограниченность при $t \to \infty$ устанавливается для всех таких начальных данных, то отсюда вытекает устойчивость по Ляпунову (в линейном приближении) в смысле п. 4, но не в обычном смысле (п. 1) [1].

5) (к п. 1—3). Уравнения (2.1) имеют решения при любых начальных данных из L_2, удовлетворяющих условию $iku + v' + imw = 0$. Поэтому (см. п. 1) существуют индивидуальные решения $\mathbf{u}(y, t)$, для которых $\|\mathbf{u}(y, t)\| \to \infty$. Такие решения, очевидно, не могут быть гладкими: для них $v'' \notin L_2$. Тем самым $\mathbf{u}$ имеет «бесконечную завихренность»: один из интегралов

$$\int_0^1 |u'|^2 dy, \qquad \int_0^1 |w'|^2 dy$$

не существует. Вместе с тем существуют сколь угодно гладкие $\mathbf{u}_n(y, t)$, удовлетворяющие (1.1).

Автор благодарен Л. А. Дикому за интересное обсуждение затронутых здесь вопросов.

Поступила 21 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Элементы функционального анализа. М., «Наука», 1965.
2. *Case K. M.*, Stability of inviscid plane Couette flow. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 2.
3. *Кейз К. М.* Гидродинамическая устойчивость как задача с начальными данными. В сб. Гидродинамическая неустойчивость. М., «Мир», 1964.
4. *Фаддеев Л. Д.* К теории устойчивости стационарных плоскопараллельных течений идеальной жидкости. Зап. научн. семинаров Ленингр. отд. МИ АН СССР, т. 21, М., «Наука», 1971.
5. *Богдатьева Н. Н., Дикий Л. А.* Замечания об устойчивости трехмерных потоков идеальной жидкости. ПММ, 1973, т. 37, вып. 3.
6. *Арнольд В. И.* Об условиях нелинейной устойчивости плоских стационарных криволинейных течений идеальной жидкости. Докл. АН, 1965, т. 162, № 5.
7. *Арнольд В. И.* Замечания о поведении течений трехмерной идеальной жидкости при малом возмущении начального поля скоростей. ПММ, 1972, т. 36, вып. 2.
8. *Дикий Л. А.* Устойчивость плоско-параллельных потоков идеальной жидкости. Докл. АН, 1960, т. 135, № 5.

[1] *Шноль Э. Э.* К теории устойчивости простейших стационарных течений идеальной жидкости. Препринт ин-та прикл. матем. АН СССР, 1973, № 53.