Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.5

О НЕСУЩЕСТВЕННОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО СПЕКТРА В ЗАДАЧЕ ОБ УСТОЙЧИВОСТИ ПЛОСКОПАРАЛЛЕЛЬНОГО ТЕЧЕНИЯ ИДЕАЛЬНОЙ ЖИДКОСТИ

Н. Н. Богдатьева

(Москва)

Доказывается, что в задаче об устойчивости плоскопараллельных течений идеальной жидкости существен лишь дискретный спектр собственных значений. Этот факт был прежде установлен лишь для случая монотонного профиля скорости основного течения [1, 2]. Ниже дается строгое доказательство в случае любого профиля.

Задача об устойчивости плоскопараллельного течения идеальной жидкости приводит к уравнению Релея, решение которого ищется в форме волны $\varphi(z)\cdot\exp\{i\alpha(x-ct)\}$. Фазовая скорость c — собственное число этого уравнения при условиях $\varphi(a)=\varphi(b)=0$ (см. [3]); совокупность таких чисел образует дискретный спектр. Если устойчивость понимать как ограниченность по времени любых возмущений (а не только волновых), то возникает вопрос, не может ли дать неустойчивость непрерывный спектр задачи, существующий помимо дискретного (как правило, в дискретном спектре бывает лишь конечное число точек).

Существование непрерывного спектра становится очевидным, если уравнение Релея переписать так (u— профиль скорости):

$$(u+u''\Delta^{-1})\psi=c\psi,\quad \Delta=-d^2/dx^2+\alpha^2,\quad \psi=\Delta\varphi \tag{0.1}$$

Вполне непрерывный оператор $u''\Delta^{-1}$ не может изменить непрерывного спектра оператора умножения на u, т. е. этот спектр заполняет отрезок $[u_{\min}, u_{\max}]$.

В работах [1,2] доказано, что только дискретный спектр может породить неустойчивость — экспоненциальную, если c невещественно, или степенную, если имеются кратные вещественные собственные значения. Позднее в [4] было отмечено, что в кратких статьях [1,2] имеется лишь набросок доказательства, и дано развернутое доказательство, которое следует тому же плану. Но во всех этих работах полностью рассмотрен лишь наиболее простой случай — монотонного профиля скорости u. Этот же случай рассмотрен в [5], где показано, что в случае монотонного профиля скорости оператор в левой части (0.1) эквивалентен самосопряженному, для которого имеется спектральное разложение. Поэтому задачу Коши можно решать разложением по спектру, и вещественность непрерывного спектра обеспечивает ограниченность соответствующей части решения. Преобразование Лапласа, примененное в [1,2], по существу, заменяет общую теорему о спектральном разложении.

В данной работе в развитие метода [1,2] рассматривается случай немонотонного профиля скорости и показывается, что такое расширение не меняет основного результата. (Дискретный спектр здесь не изучается, ему посвящены почти все работы по устойчивости. В частности, для монотонного профиля скорости получено [6] необходимое и достаточное условие устойчивости, вновь полученное в [5]).

1. Пусть на основное течение со скоростью $u(z)$, направленное по оси Ox наложено возмущение ψ'. Линеаризуя уравнение вихря, получим

$$\Delta\psi_t'+u\Delta\psi_x'-u''\psi_x'=0$$

Ищем решения в виде $\exp[(i\alpha x)\varphi(z,t)]$ при условиях $\varphi(a,t)=\varphi(b,t)=0,\ \varphi(z,0)=\varphi_0(z)$.

Положив

$$\varphi^*(z,c) = \int_0^\infty e^{+i\alpha ct}\varphi(z,t)\,dt$$

получим

$$[u(z)-c]\left(\frac{d^2}{dz^2}-\alpha^2\right)\varphi^* - u''\varphi^* = f, \quad f = -i\,\frac{\varphi_0''-\varphi_0}{\alpha}$$

Запишем решение через функцию Грина

$$(1.1) \qquad \varphi^*(z,c) = \int_a^b G^*(z,\zeta;c)\,f(\zeta)\,d\zeta$$

$$G^*(z,\zeta;c) = \begin{cases} \varphi_1(z,c)\,\varphi_2(\zeta,c)\,\{W(c)\,[u(\zeta)-c]\}^{-1}, & z<\zeta \\ \varphi_1(\zeta,c)\,\varphi_2(z,c)\,\{W(c)\,[u(\zeta)-c]\}^{-1}, & z\geqslant\zeta \end{cases}$$

$$W(c) = \varphi_1(b,c) = -\varphi_2(a,c)$$

Здесь φ_1 и φ_2 — решения однородного уравнения

$$(1.2) \qquad (u-c)(\varphi''-\alpha^2\varphi) - u''\varphi = 0$$

при условиях

$$\varphi_1(a,c) = 0, \quad \varphi_1'(a,c) = 1, \quad \varphi_2(b,c) = 0, \quad \varphi_2'(b,c) = 1$$

Нули $W(c)$ — это точки дискретного спектра.

При $c \to \infty$ функция G^* убывает как c^{-1}, поэтому существует функция

$$(1.3) \qquad G(z,\zeta;t) = \frac{\alpha}{2\pi}\int_{\gamma i-\infty}^{\gamma i+\infty} e^{-i\alpha ct}G^*(z,\zeta;c)\,dc$$

(γ достаточно велико), дающая решение

$$(1.4) \qquad \varphi(z,t) = \int_a^b G(z,\zeta;t)\,f(\zeta)\,d\zeta$$

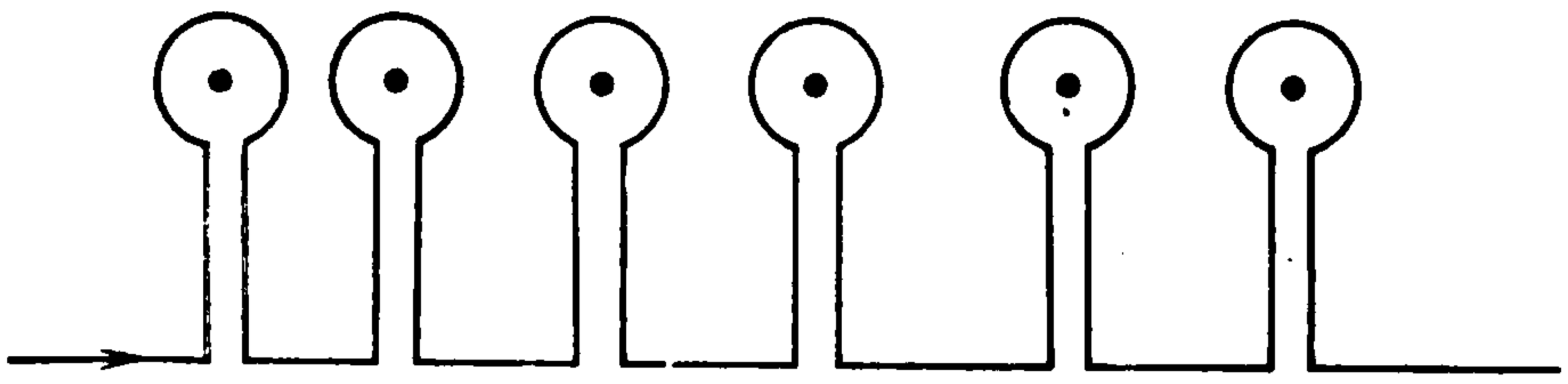
2. Оценим поведение $G(z,\ \zeta;\ t)$ при $t \to \infty$. Для этого будем опускать контур интегрирования в (1.3) насколько это возможно. При этом придется аналитически продолжить G^* из верхней полуплоскости на некоторую окрестность вещественной оси. Будем предполагать, что $u(z)$ аналитически продолжается на окрестность вещественной оси.

Лемма. Функции $\varphi_1(z,c)$, $\varphi_2(z,c)$ как функции от c аналитически продолжаются через вещественную ось всюду, кроме точек $c = u(a)$, $u(b)$, $u(z)$, $u(z^*)$, где z^* — экстремальные точки, $u'(z^*) = 0$.

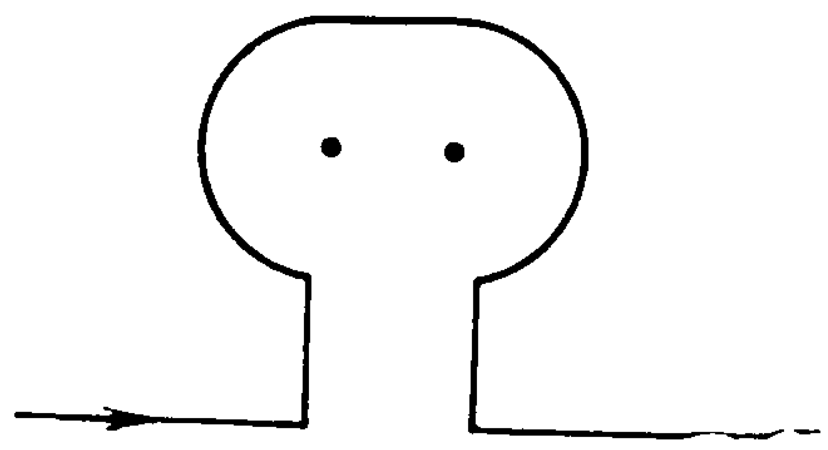
Доказательство имеется в цитированных работах, например, в [1].

Итак, особыми точками $\varphi_1(z,c)$ могут быть лишь точки $c = u(a)$, $u(z)$, $u(z^*)$, а у $\varphi_2(z,c)$ — точки $u(b)$, $u(z)$, $u(z^*)$. Для вронскиана $W(c)$ это $u(a)$, $u(b)$, $u(z^*)$. Функция $G^*(z,\ \zeta;\ c)$ имеет особые точки $c = u(a)$, $u(b)$, $u(z)$, $u(z^*)$, $u(\zeta)$, а также нули функции $W(c)$, отличные от $u(a)$, $u(b)$, $u(z^*)$. Нули приводят к выделению из интеграла (1.3) экспоненциальных членов, соответствующих дискретному спектру. Для вещественных кратных нулей получаются степенным образом растущие члены. Числа $c = u(a)$, $u(b)$ будем считать собственными, если при этих значениях решения, регулярные в соответствующем конце отрезка (и равные там нулю), обращаются в нуль и на другом конце отрезка. Значение $c = u(z^*)$ будем считать собственным, если единственное решение, регулярное при $z = z^*$ (и обращающееся там в двукратный нуль), обращается в нуль также хотя бы на одном из концов отрезка. В дальнейшем будет предполагаться, что значения $u(a)$, $u(b)$, $u(z^*)$ не являются собственными. Далее будут доказаны следующие теоремы.

Теорема 1. Если значения $u(a)$, $u(b)$, $u(z^*)$ не являются собственными, то и в их окрестностях нет собственных значений.



Фиг. 1



Фиг. 2

Следствие. В этом случае в области $\operatorname{Im} c > -\varepsilon$, где ε — достаточно малое положительное число, имеется лишь конечное число точек дискретного спектра.

Теорема 2. Если значения $u(a)$, $u(b)$, $u(z^*)$ различны между собой и не являются собственными, не существует невещественных и кратных вещественных собственных значений, то течение устойчиво.

3. Пользуясь аналитичностью подынтегрального выражения в (1.1), деформируем отрезок интегрирования в окрестности тех значений ζ, для которых $u(\zeta)$ — собственное значение. При этом проводим деформацию согласно правилу: вниз при $u'(\zeta) > 0$ и вверх при $u'(\zeta) < 0$. Деформированный отрезок обозначим через $[a, b]'$. В формуле (1.4) интегрирование будет проводиться также по $[a, b]'$. Поэтому в дальнейшем всегда будет $z \in [a, b]$, $\zeta \in [a, b]'$. Функция $u(\zeta)$ не будет при этом приближаться к собственным значениям ближе, чем на фиксированное расстояние.

Для оценки $G(z, \zeta; t)$ при $t \to \infty$ деформируем контур в (1.3), как показано на фиг. 1. Именно, опускаем контур ниже вещественной оси на фиксированное расстояние, причем контур обходит точки ветвления $u(a)$, $u(b)$, $u(z)$, $u(\zeta)$ и все $u(z^*)$. Полюсы G^*, соответствующие нулям W, дадут вычеты — экспоненты по t, присоединяющиеся к интегралу. Контур проводим так, чтобы на нем не было собственных чисел. Радиусы окружностей r выбираем между C / t и $2C / t$, где C — фиксированное положительное число. Если две или три окружности пересекаются, то заменяем их общим овалом (фиг. 2). Дополнительное условие на контур будет наложено после того, как будет доказана теорема 1.

На горизонтальной части контура функция непрерывна по совокупности переменных z, ζ, c. Учитывая ее затухание при $c \to \infty$, видим, что на этой части контура она ограничена, равномерно по z, ζ и c. Теперь рассмотрим поведение $\varphi_1(z, c)$ вблизи особых точек (для $\varphi_2(z, c)$ рассмотрение такое же). Нужно получить оценку, справедливую для $c \in \Gamma_r$ (фиг. 1) и $z \in [a, b]$ или $[a, b]'$.

Лемма. Если зафиксировать некоторые окрестности вокруг значений $c = u(z^*)$ (z^* — экстремальные точки), то вне этих окрестностей величина $|\varphi_1(z, c)|$ ограничена одной константой, не зависящей от радиусов r. Если же c принадлежит одной из названных окрестностей, то имеют место следующие оценки. Для z, расположенных левее окрестности точки z^* радиуса $\sqrt{|c - u(z^*)|}$

$$|\varphi_1(z,c)| < C(|z - z^*| + \sqrt{|c - u(z^*)|})^{-1} \tag{3.1}$$

а для z в этой окрестности и правее

$$|\varphi_1(z,c)| < C(|z - z^*| + \sqrt{|c - u(z^*)|})^2 |c - u(z^*)|^{-3/2} \tag{3.2}$$

Здесь C — фиксированная константа. Функция $W(c)$ непрерывно зависит от c при $c \neq u(z^*)$. Если же $c \to u(z^*)$, то

$$W(c) \sim \text{const}\, |c - u(z^*)|^{-3/2}$$

Доказательство. Пусть сначала c находится вне некоторых фиксированных окрестностей значений $u(z^*)$ для всех экстремальных точек z^*, но может приближаться к $u(a)$ и $u(z)$. Этот случай прост и достаточно подробно разобран например, в [4], поэтому на нем не останавливаемся. Суть дела состоит здесь в том, что хотя решения и ветвятся в точках z_c, где $u(z_c) = c$, но остаются непрерывными. Не возникает сложностей и в случае $u(z) = u(a)$, т. е. если критические точки приближаются сразу и к z и к a. Функция $W(c)$ также непрерывна при $c \to u(a)$ или $c \to u(b)$, так как $W(c) = \varphi_1(b, c)$.

Трудность возникает (этому и посвящена данная работа), когда $c \to u(z^*)$. К z^* тогда приближаются сразу две особые точки z_c, причем никакой деформацией контура от них не уйти, так как контур проходит между ними.

Будем считать для определенности, что в экстремальной точке $u''(z^*) > 0$ (вырожденный случай $u''(z^*) = 0$ не рассматривается). Тогда у значения $c^* = u(z^*)$ есть достаточно малая окрестность O_c, в которую двулистно отображается окрестность O_z точки z^* с помощью функции

$$\breve{u}(z) = u(z^*) + {}^1/_2\, u''(z^*)(z - z^*)^2 + \ldots$$

Каждому $c \in O_c$ соответствуют две особые точки z_c. На фиг. 3 изображен образ O_z и в нем двойной контур — образ вещественной оси. Под $\varphi_1(z, c)$ всюду понимается аналитическое продолжение этой функции из верхней полуплоскости.

Здесь надо различать два случая: $\operatorname{Re} c < u(z^*)$ и $\operatorname{Re} c \geqslant u(z^*)$.

а) $\operatorname{Re} c \leqslant u(z^*)$. Одна из точек z_c лежит в криволинейном секторе (заштрихованном на фиг. 3), границы которого расходятся под углами $\pi / 4$, $3\pi / 4$. Вторая точка приблизительно симметрична первой. При $c \to u(z^*)$

точки $z_c^{(1,2)}$ сливаются. Запишем $u(z) - c$ как $(z - z_1^1)(z - z_c^2)k$ и обозначим

$$z - z_c^2 = \xi, \quad z_c^2 - z_c^1 = \varepsilon, \quad [-u'' - \alpha^2(u - c)]k^{-1} = m(\xi, \varepsilon) \tag{3.3}$$

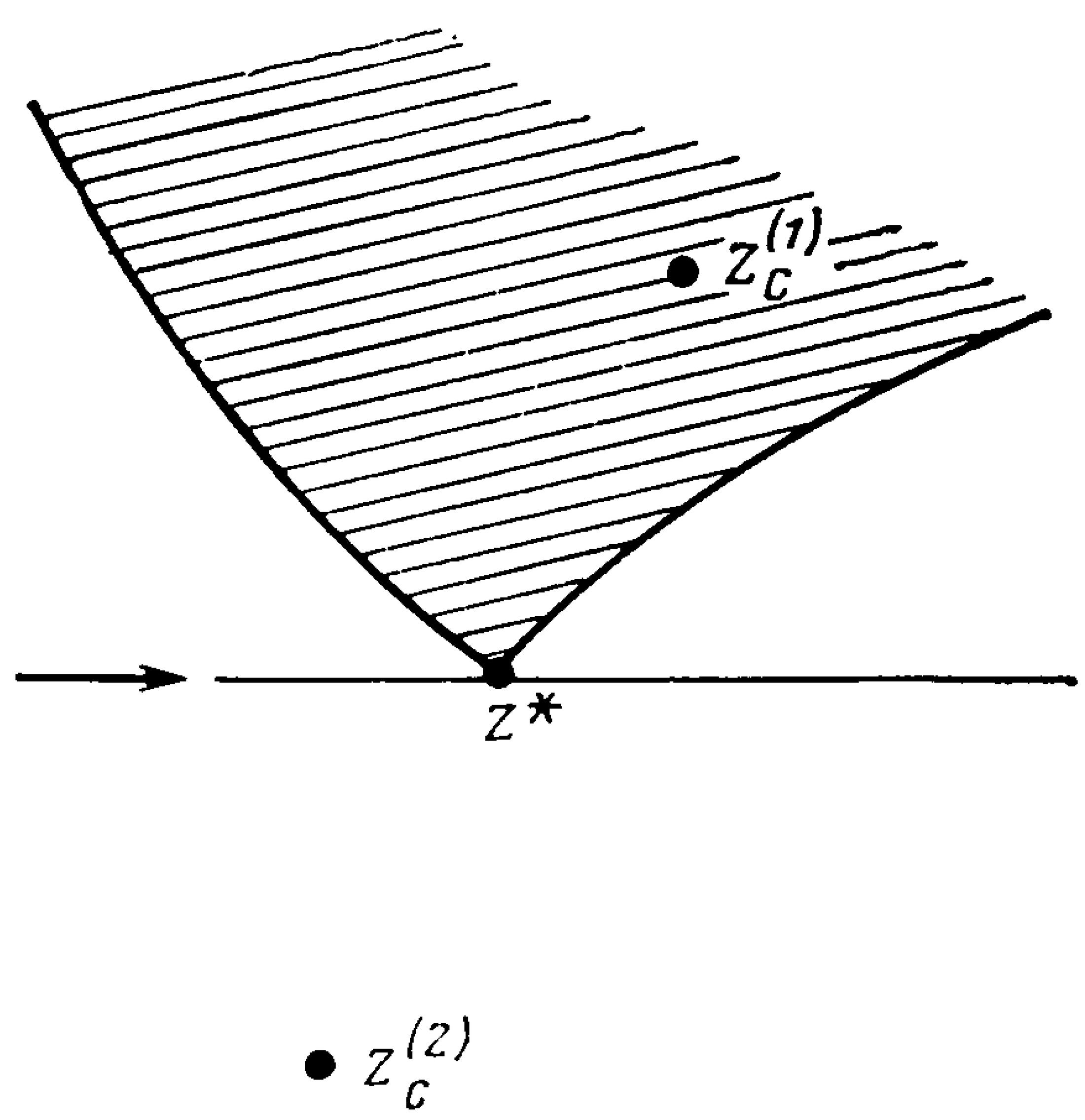
Очевидно, $|\varepsilon| \sim \sqrt{|c - u(z^*)|}$. Уравнение принимает вид

$$\xi(\xi - \varepsilon)\Phi'' + m(\xi, \varepsilon)\Phi = 0, \quad \Phi(\xi, \varepsilon) = \varphi(z, c) \tag{3.4}$$

где $m(\xi, \varepsilon)$ — гладкая функция двух переменных, аналитическая по ξ.

Относительно асимптотического поведения решений таких уравнений при $\varepsilon \to 0$ можно доказать следующее. Рассмотрим предельное при $\varepsilon = 0$ уравнение

$$\xi^2\Phi'' + m(\xi, 0)\Phi = 0 \tag{3.5}$$



Фиг. 3

Оно имеет одно решение $\Phi_0(\xi, 0)$, обращающееся при $\xi = 0$ в нуль как ξ^{λ_1}, где λ_1 — наибольший корень уравнения $\lambda(\lambda - 1) + m(0, 0) = 0$, который предполагается вещественным (как будет показано, в данном случае это условие выполнено). Величина λ_1, очевидно, больше $1/2$. Уравнение (3.4) имеет решение, аналитическое в нуле и обращающееся там в нуль как ξ. При надлежащей нормировке это решение $\Phi_0(\xi, \varepsilon)$ стремится к $\Phi_0(\xi, 0)$, равномерно в области на плоскости ξ, показанной на фиг. 3 вне заштрихованного сектора с фиксированным углом 2α. Что касается остальных решений $\Phi(\xi, \varepsilon)$ уравнения (3.4), то если такое решение стремится в какой-либо области левее окрестности сливающихся особых точек $\xi = 0$ и $\xi = \varepsilon$ к решению $\Phi(\xi, 0)$ уравнения (3.5), то правее этой окрестности, будучи аналитически продолженным вдоль контура, проходящего между особыми точками $\xi = 0$ и $\xi = \varepsilon$, оно представляет собой сумму другой ветви этой функции, в обход особой точки $\xi = 0$, и выражения

$$Kw\Phi_0(\xi, 0)\varepsilon^{1-2\lambda_1}[1 + O(\varepsilon)]$$

Здесь K — некоторая абсолютная константа, отличная от нуля, w — вронскиан решений $\Phi(\xi, 0)$ и $\Phi_0(\xi, 0)$. Если $w \neq 0$, то это слагаемое стремится к бесконечности при $\varepsilon \to 0$, так как $\lambda_1 > 1/2$. Первое слагаемое — функция, продолженная в обход особой точки, напротив, непрерывна при $\varepsilon \to 0$. Для самой окрестности сливающихся особых точек $\xi = 0$, $\xi = \varepsilon$ имеет место такая оценка. В $|\varepsilon|$-окрестности точки $\xi = 0$ и левее нее

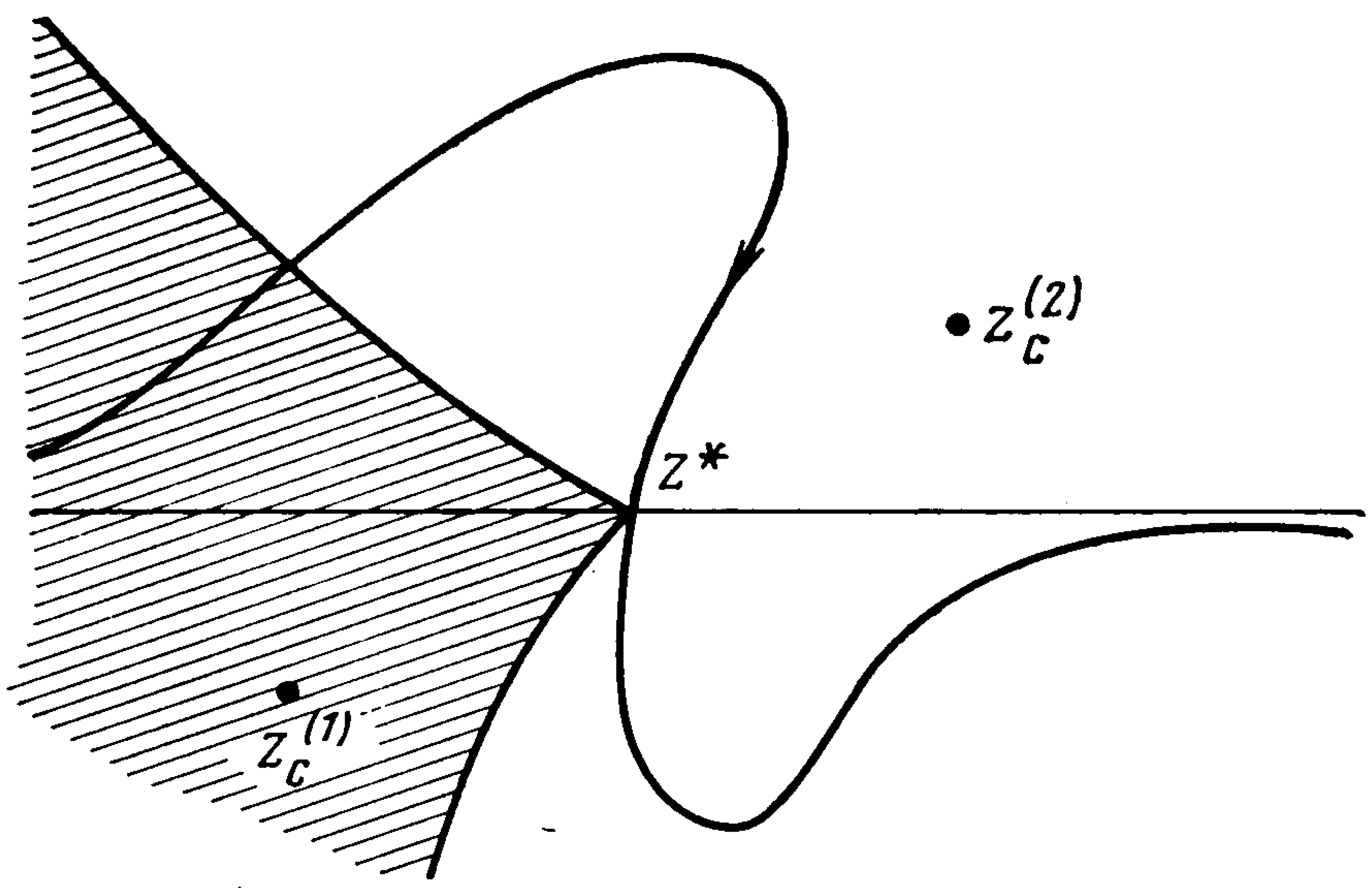
$$|\Phi(\xi, \varepsilon)| < C(|\xi| + |\varepsilon|)^{1-\lambda_1} \tag{3.6}$$

а правее этой окрестности

$$|\Phi(\xi, \varepsilon)| < C(|\xi| + |\varepsilon|)^{\lambda_1}|\varepsilon|^{1-2\lambda_1} \tag{3.7}$$

(в $|\varepsilon|$-окрестности эти оценки смыкаются). Доказательство имеется в [7]. Применяя это к данному случаю, заметим, что здесь $m(0, 0) = -2$, как это вытекает из (3.3). Значит, $\lambda_1 = 2$. Оценки (3.6), (3.7) и $|\varepsilon| \sim \sim \sqrt{|c - u(z^*)|}$ дают (3.1), (3.2).

Далее, вронскиан решений $\varphi_1(z, c)$ и $\Phi(z, c) = \Phi_0(\xi, 0)$ не равен нулю, так как в противном случае решение, регулярное в экстремальной точке z^*, при $c = c^*$ удовлетворяло бы краевому условию при $z = a$,



Фиг. 4

т. е. c^*, вопреки предположению, являлось бы собственным значением. Отсюда вытекает, что при $c \to c^*$

$$W(c) \sim Kw\,\Phi_0(b, c^*)\,\varepsilon^{-3}\,[1 + O(\varepsilon)] \tag{3.8}$$

Но $\Phi(b, c^*) \neq 0$ из тех же соображений: решение, регулярное в точке z^* при $c = c^*$, не может удовлетворять краевому условию в правом конце. Таким образом, в окрестности $c = c^*$ функция $W(c)$ стремится к бесконечности.

б) $\operatorname{Re} c \geqslant u(z^*)$. Уравнение нужно интегрировать вдоль деформированного контура. Точка $z_c^{(1)}$, аналогичная точке $z_c^{(1)}$ на фиг. 3 внутри заштрихованного угла, лежит теперь в секторе, заштрихованном на фиг. 4, с границами, расходящимися из z^* под углами $3\pi/4$ и $5\pi/4$. Контур интегрирования указан на фиг. 4. Все оценки остаются в силе. Лемма доказана.

Из леммы сразу получается доказательство теоремы 1.

В самом деле, в окрестности $c = u(z^*)$ не может быть нулей функции $W(c)$, так как в силу (3.8) она там стремится к бесконечности. В точках же $c = u(a)$, $c = u(b)$ функция $W(c)$, по доказанному ранее, непрерывна. Если она отлична от нуля в этих точках (что предполагается в условии теоремы), то она не равна нулю и в указанной окрестности.

4. Докажем, наконец, теорему 2. Для этого оценим $G^*(z, \zeta; c)$ на контуре Γ_r. В окрестности вещественной оси есть лишь конечное число точек дискретного спектра, поэтому r можно выбирать так, чтобы окружности не приближались к собственным значениям ближе, чем на $r/4$. Горизонталь-

ную часть контура можно считать выше всех собственных значений в нижней полуплоскости. Тогда справедлива оценка

$$| G^* (z, \zeta; c) | < \mathrm{const} / r$$

В самом деле, вне фиксированных окрестностей экстремальных точек в выражении (1.1) для функции Грина числитель ограничен. Множители $u(\zeta) - c$ и $W(c)$ по модулю не меньше константы, умноженной на r; оба же одновременно они не могут быть малыми, так как при $\zeta \in [a; b]'$ выражение $u(\zeta)$ нигде не приближается к собственному значению.

Рассмотрим случай значений c в окрестностях $u(z^*)$.

Пусть сначала $z \leqslant \zeta \leqslant z^*$. Тогда $| z - z^* | \geqslant | \zeta - z^* |$ и по последней лемме имеем

$$\begin{aligned}
&| \varphi_1 (z, c) \varphi_2 (\zeta, c) | < \mathrm{const} \cdot (| z - z^* | + \sqrt{| c - u(z^*)|})^{-1} \times \\
&\times (| \zeta - z^* | + \sqrt{| c - u(z^*)|})^2 (| c - u(z^*) |)^{-3} < \\
&< \mathrm{const} \cdot (| \zeta - z^* | + \sqrt{| c - u(z^*)|}) (\sqrt{| c - u(z^*)|})^{-3} < \\
&< \mathrm{const} \cdot | c - u(z^*) |^{-3/2}
\end{aligned}$$

(оценки последней леммы применимы, очевидно, и к φ_2 с заменой слов «левее» на «правее» и наоборот. Если учесть теперь, что $W(c) \sim \mathrm{const} \cdot | c - u(z^*)|^{-3/2}$, получим требуемую оценку для G^*.

При $z \leqslant z^* \leqslant \zeta$ получается еще более сильная оценка

$$\begin{aligned}
&| \varphi_1 (z, c) \varphi_2 (\zeta, c) | \leqslant \mathrm{const} \cdot (| z - z^* | + \sqrt{| c - u(z^*)|})^{-1} \times \\
&\times (| \zeta - z^* | + \sqrt{| c - u(z^*)|})^{-1} < \mathrm{const} \cdot | c - u(z^*) |^{-1}
\end{aligned}$$

Остальные случаи расположения z, z^*, ζ по симметрии сводятся к рассмотренным.

Теперь вспомним формулу обращения

$$G(z, \zeta; t) = \frac{\alpha}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_r} e^{-i\alpha ct} G^* (z, \zeta; c)\, dc + \ldots$$

Точками обозначена сумма вычетов по дискретному спектру. Интеграл по горизонтальной части контура Γ_r экспоненциально стремится к нулю при $t \to \infty$ за счет $\exp(-i\alpha ct)$ и ограниченности $|G^*|$. На окружностях величины $\exp(-i\alpha ct)$ ограничены, так как r порядка t^{-1}. Длины окружностей порядка r, а $|G^*| < Cr^{-1}$. Поэтому интегралы по окружностям ограничены при $t \to \infty$.

Точно так же ограничены интегралы по вертикальным отрезкам

$$\left| \int e^{-i\alpha ct} G^* dc \right| < C \int\limits_0^\infty \exp(\alpha \operatorname{Im} ct)\, t d | \operatorname{Im} c | < \mathrm{const}$$

Теорема 2 доказана.

Поступила 18 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Дикий Л. А.* Устойчивость плоско-параллельных потоков идеальной жидкости. Докл. АН СССР, 1960, т. 135, № 5.
2. *Case K. M.* Stability of inviscid plane Couette flow. Phys. Fluids, 1960, vol. 3, No. 2, p. 143—148.
3. *Линь Цзя-Цзяо.* Теория гидродинамической устойчивости. М., Изд-во иностр. лит., 1958.
4. *Rosencrans S. I., Sattinger D. H.* On the spectrum of an operator occuring in the theory of hydrodynamic stability. J. Math. and Phys., 1966, vol. 45, No. 3, 289—300.
5. *Фаддеев Л. Д.* К теории устойчивости стационарных плоско-параллельных течений идеальной жидкости. В сб.: Краевые задачи математической физики. 5. Л., «Наука», 1971.
6. *Rosenbluth M. N., Simon A.* Necessary and sufficient condition for the stability of plane parallel inviscid flow. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 4.
7. *Богдатьева Н. Н.* Об асимптотическом поведении решений уравнений второго порядка при слиянии особых точек, Дифференциальные уравнения, 1974, т. 10, № 2.