Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 534.222.2

ПЛОСКИЕ И ОСЕСИММЕТРИЧНЫЕ НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ТЕЧЕНИЯ ГАЗА С СИЛЬНЫМИ УДАРНЫМИ ВОЛНАМИ

В. И. Богатко

(Ленинград)

Для построения решения по методу Г. Г. Черного [1-3] предлагается способ нахождения второго и следующих приближений. Предельные нестационарные течения невязкого газа были исследованы в работах [4, 5].

1. Рассмотрим автомодельное движение газа за фронтом сильной ударной волны, распространяющейся по закону

$$x = N_0 t f_1(s), \quad y = N_0 t f_2(s) \tag{1.1}$$

Здесь x и y — декартовы координаты, N_0 — некоторая характерная скорость перемещения фронта ударной волны, t — время. Если параметр s отождествить с длиной дуги фронта волны в плоскости автомодельных переменных, то функции f_1 и f_2 должны удовлетворять условию $f_1'^2 + f_2'^2 = 1$.

В осесимметричном случае под плоскостью x, y следует подразумевать меридиональную плоскость, при этом за ось симметрии примем ось x.

Предположим, что все гидродинамические характеристики потока зависят от двух переменных ξ и η. Уравнения газовой динамики запишем в переменных Лагранжа, которые в силу автомодельности введем по формулам

$$x = N_0 t \xi(\mu, \psi), \quad y = N_0 t \eta(\mu, \psi)$$
$$\left(\xi = \frac{x}{N_0 t}, \; \eta = \frac{y}{N_0 t}, \; \mu = \frac{t_0}{t}\right)$$

Здесь t_0 — момент времени входа частицы в ударный слой, ψ — полярный угол точки входа частицы газа в ударный слой. Затем, комбинируя два уравнения движения и уравнение неразрывности, придем к системе

$$\begin{gathered}
\mu^2(\xi^{\cdot}\xi^{\cdot\cdot} + \eta^{\cdot}\eta^{\cdot\cdot}) = -\tau \frac{\partial p}{\partial \mu} \\
\mu^2\left(\xi^{\cdot\cdot}\frac{\partial \xi}{\partial \psi} + \eta^{\cdot\cdot}\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\right) = -\tau \frac{\partial p}{\partial \psi} \\
\frac{\partial \eta}{\partial \psi}\frac{\partial p}{\partial \mu} - \eta^{\cdot}\frac{\partial p}{\partial \psi} = -\frac{\mu^{\nu+3}}{\eta^{\nu}}\xi^{\cdot\cdot}C(\psi) \\
\frac{\partial i}{\partial \mu} = \tau \frac{\partial p}{\partial \mu}, \qquad \tau = \tau(i, p)
\end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь τ — величина, обратная безразмерной плотности, p и i — безразмерные давление и энтальпия газа, $\nu = 0$ для плоских и $\nu = 1$ для осесимметричных движений. Функцию $C(\psi)$ следует искать из условий динамической совместности на фронте ударной волны. Компоненты вектора скорости v_x и v_y, отнесенные к N_0, связаны с новыми искомыми функциями $\xi(\mu, \psi)$ и $\eta(\mu, \psi)$ формулами (точка означает дифференцирование по μ)

$$v_x = \xi - \mu\xi^{\cdot}, \quad v_y = \eta - \mu\eta^{\cdot}$$

Систему (1.2) можно использовать для построения некоторого итерационного процесса, где за исходное приближение удобно взять предельное течение газа, которое является точным решением уравнений газодинамики при $\tau = 0$. В каждом приближении первые два уравнения (1.2) образуют систему для определения закона движения частиц газа. По найденному закону движения из третьего уравнения (1.2) определится давление газа, а из четвертого уравнения — энтальпия. После определения τ по давлению и энтальпии из последнего соотношения (1.2) можно переходить к отысканию закона движения в следующем приближении из нелинейной системы первых двух уравнений (1.2).

2. На фронте ударной волны (1.1), распространяющейся с большой скоростью по покоящемуся газу, условия динамической совместности (при $\mu = 1$) запишем в виде

$$\xi - \xi^{\cdot} = r(1 - \tau)\cos\gamma\cos(\psi - \gamma) \tag{2.1}$$
$$\eta - \eta^{\cdot} = r(1 - \tau)\cos\gamma\sin(\psi - \gamma)$$
$$p_+ = r^2(1 - \tau)\cos^2\gamma, \quad i_+ = {}^1/_2(1 - \tau^2)\,r^2\cos^2\gamma$$

Здесь

$$\operatorname{tg}\gamma = \frac{dr}{r\,d\psi}, \quad r^2 = f_1^2 + f_2^2, \quad \operatorname{tg}\psi = \frac{f_2(s_0)}{f_1(s_0)}$$

где γ — угол между радиус-вектором и внешней нормалью к фронту ударной волны (1.1), s_0 — значение параметра s, соответствующее точке входа частицы газа в ударный слой.

Формулы (2.1) справедливы для ударных волн большой интенсивности, т. е. когда величинами порядка a_0^2/N_0^2 можно пренебречь по сравнению с оставленными членами (a_0 — скорость звука в покоящемся газе перед фронтом ударной волны) [6].

Используя первые два соотношения, найдем функцию $C(\psi)$

$$C(\psi) = r^{\nu+2}(\sin\psi)^\nu \tag{2.2}$$

Форма фронта ударной волны $r = r(\psi)$ подлежит определению в процессе решения задачи из дополнительного условия. Таким условием может служить условие обтекания, условие на поршне и т. п. При этом может быть полезна формула для расстояния частицы от фронта ударной волны [5] в плоскости автомодельных переменных

$$\Lambda = \int_\mu^1 \frac{\tau\mu^{\nu+1}r^{\nu+2}\sin^\nu\psi}{\eta^\nu Q(\mu, \psi)}\sqrt{r^2 + r'^2}\,d\mu \tag{2.3}$$
$$Q(\mu, \psi) = \frac{\partial\eta}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(r\sin\psi) + \frac{\partial\xi}{\partial\psi}\frac{\partial}{\partial\psi}(r\cos\psi)$$

В некоторых задачах (например в задаче о поршне), используя формулу (2.3), удается получить форму фронта ударной волны в следующем приближении, не уточняя закон движения частиц.

3. Предположим, что решение системы (1.2) представимо в виде $q = q_0 + \varepsilon q_1$, где ε — некоторое характерное значение величины τ ($\tau_0 = 0$). Тогда из первых двух уравнений (1.2) для определения закона движения частиц в нулевом приближении (предельное течение) получим систему

$$\xi_0^{\cdot}\xi_0^{\cdot\cdot} + \eta_0^{\cdot}\eta_0^{\cdot\cdot} = 0, \quad \xi_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi} + \eta_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\eta_0}{\partial\psi} = 0 \tag{3.1}$$

Из уравнения неразрывности имеем $\eta_0 = f(\xi_0)$, где вид функции f определяется формой ударной волны (1.1). Тогда система уравнений (3.1) сводится к одному уравнению

$$\xi_0^{\cdot\cdot}(1 + f'^2) + f'f''(\xi_0^{\cdot})^2 = 0$$

Интегрируя его по μ, получим

$$\int\sqrt{1 + f'^2(\xi_0)}\,d\xi_0 = \mu C_1(\psi) + C_2(\psi)$$

Отсюда следует, что путь, пройденный частицей в ударном слое вдоль фронта ударной волны, линейно зависит от μ. После определения произвольных функций $C_1(\psi)$ и $C_2(\psi)$ из условий (2.1) при $\tau = 0$ закон движения частицы вдоль фронта ударной волны можно записать в виде

$$\xi_0 = f_1(s), \quad \eta_0 = f_2(s), \quad s(\mu, \psi) = s_0(\psi) + (\mu - 1)\,C_1(\psi) \tag{3.2}$$

$$C_1(\psi) = \frac{r_0 r_0'}{\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}}, \qquad s_0(\psi) = \int_0^{\psi}\sqrt{r_0^2 + r_0'^2}\,d\psi$$

После определения из дополнительного условия функции $r_0(\psi)$ перейдем к определению давления. Из третьего уравнения (1.2) с учетом (2.2) имеем

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\psi}\frac{\partial p_0}{\partial\mu} - \eta_0^{\cdot}\frac{\partial p_0}{\partial\psi} = -\mu^{\nu+3}\xi_0^{\cdot\cdot}r_0^{\nu+2}\left(\frac{\sin\psi}{\eta_0}\right)^{\nu} \equiv \Phi_0(\mu, \psi) \tag{3.3}$$

Отметим, что распределения давлений в ударном слое в плоском и осесимметричном случае различаются уже в предельном течении.

Общее решение уравнения (3.3) можно представить в виде

$$p_0(\mu, \psi) = F(s) + \int\frac{\Phi_0\,d\mu}{f_2'\,[s_0' + (\mu - 1)\,C_1']}$$

За аргумент произвольной функции вместо η_0 или s можно взять любую величину, характеризующую положение частицы при ее движении вдоль фронта ударной волны. Определяя произвольную функцию из третьего условия (2.1), для давления в предельном случае получим

$$p_0(\mu, \psi) = p_{0+}(s) + \frac{1}{f_2'}\int_1^{\mu}\frac{\Phi_0\,d\mu}{s_0' + (\mu - 1)\,C_1'} \tag{3.4}$$

Из четвертого уравнения (1.2) имеем

$$i_0 = i_{0+}(\varphi) = \frac{1}{2}p_{0+}(\psi) = \frac{1}{2}\frac{r_0^4}{r_0^2 + r_0'^2} \tag{3.5}$$

Из уравнения состояния (последнее соотношение (1.2)) по p_0 и i_0 находим τ_1. Так, например, для термодинамически совершенного газа

$$\tau_1 = \frac{2i_0(\psi)}{p_0(\mu, \psi)} = \frac{1}{p_0}\frac{r_0^4}{r_0^2 + r_0'^2} \tag{3.6}$$

4. Для определения следующих членов разложения из первых четырех уравнений (1.2) получим систему

$$\xi_0^{\cdot}\xi_1^{\cdot\cdot} + \xi_0^{\cdot\cdot}\xi_1^{\cdot} + \eta_0^{\cdot}\eta_1^{\cdot\cdot} + \eta_0^{\cdot\cdot}\eta_1^{\cdot} = -\frac{\tau_1}{\mu^2}\frac{\partial p_0}{\partial\mu} \tag{4.1}$$

$$\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\xi_1^{\cdot\cdot} + \xi_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi} + \frac{\partial\eta_0}{\partial\psi}\eta_1^{\cdot\cdot} + \eta_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\eta_1}{\partial\psi} = -\frac{\tau_1}{\mu^2}\frac{\partial p_0}{\partial\psi}$$

$$\frac{\partial\eta_0}{\partial\psi}\frac{\partial p_1}{\partial\mu} - \eta_0^{\cdot}\frac{\partial p_1}{\partial\psi} = \Phi_1(\mu, \psi), \qquad \frac{\partial i_1}{\partial\mu} = \tau_1\frac{\partial p_0}{\partial\mu}$$

Здесь

$$\Phi_1(\mu, \psi) = \eta_1^{\cdot}\frac{\partial p_0}{\partial\psi} - \frac{\partial\eta_1}{\partial\psi}\frac{\partial p_0}{\partial\mu} -$$

$$-\mu^{\nu+3}\left(\frac{\sin\psi}{\eta_0}\right)^{\nu} r_0^{\nu+2}\left[\xi_1^{\cdot\cdot} - \nu\xi_0^{\cdot\cdot}\frac{\eta_1}{\eta_0} + (\nu+2)\xi_0^{\cdot\cdot}\frac{r_1}{r_0}\right]$$

При решении обратной задачи (фронт волны задан) следует положить

$$r_1(\psi) = r_2(\psi) = \ldots = 0$$

Граничные условия для системы (4.1) найдем из (2.1), собирая члены при ε

$$\xi_1^{\cdot} = A_1(\psi)r_1 + B_1(\psi)r_1' + \frac{r_0}{r_0'}\eta_0^{\cdot} \tag{4.2}$$

$$\eta_1^{\cdot} = D_1(\psi)r_1 + E_1(\psi)r_1' - \frac{r_0}{r_0'}\xi_0^{\cdot}$$

$$p_{1+} = \frac{2r_0^3}{(r_0^2 + r_0'^2)^2}[(r_0^2 + 2r_0'^2)r_1 - r_0r_0'r_1'] - p_{0+}$$

$$i_{1+} = \frac{r_0^3}{(r_0^2 + r_0'^2)^2}[(r_0^2 + 2r_0'^2)r_1 - r_0r_0'r_1']$$

Здесь A_1, B_1, D_1 и E_1 — известные функции ψ. Комбинируя первые два уравнения (4.1), а затем интегрируя первое из них с учетом первых двух соотношений (4.2), для определения закона движения частиц в следующем приближении получим систему двух уравнений первого порядка

$$\xi_0^{\cdot}\xi_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi} + \xi_0^{\cdot}\eta_0^{\cdot}\frac{\partial\eta_1}{\partial\psi} - \xi_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\xi_1^{\cdot} - \tag{4.3}$$

$$-\eta_0^{\cdot\cdot}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\eta_1^{\cdot} = \frac{\tau_1}{\mu^2}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\frac{\partial p_0}{\partial\mu} - \xi_0^{\cdot}\frac{\partial p_0}{\partial\psi}\right)$$

$$\xi_0^{\cdot}\xi_1^{\cdot} + \eta_0^{\cdot}\eta_1^{\cdot} = \int_\mu^1 \frac{\tau_1}{\mu^2}\frac{\partial p_0}{\partial\mu}d\mu + V_1(\psi)$$

Система уравнений (4.3) может быть сведена к одному уравнению второго порядка, например для функции $\eta_1(\mu, \psi)$

$$\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\mu\,\partial\psi} - \frac{1}{\xi_0^{\cdot}}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\mu^2} - \frac{\eta_0^{\cdot\cdot}}{\eta_0^{\cdot}}\frac{\partial\eta_1}{\partial\psi} + \tag{4.4}$$

$$+\left[\eta_0^{\cdot\cdot}\frac{(\xi_0^{\cdot})^2 - (\eta_0^{\cdot})^2}{(\xi_0^{\cdot})^3\eta_0^{\cdot}}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi} - \frac{1}{\xi_0^{\cdot}}\frac{\partial^2\xi_0}{\partial\mu\,\partial\psi}\right]\frac{\partial\eta_1}{\partial\mu} =$$

$$= \frac{\xi_0^{\cdot}\eta_0^{\cdot}}{(\xi_0^{\cdot})^2 + (\eta_0^{\cdot})^2}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi} - \frac{\partial}{\partial\mu}\left(F_1 - \frac{\varphi_1}{\xi_0^{\cdot}}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\right)\right]$$

$$F_1(\mu,\psi)=\frac{\tau_1}{\mu^2\xi_0^{\cdot}\xi_0^{\cdot\cdot}}\left(\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\frac{\partial p_0}{\partial\mu}-\xi_0^{\cdot}\frac{\partial p_0}{\partial\psi}\right)$$

$$\varphi_1(\mu,\psi)=\frac{1}{\xi_0^{\cdot}}\left[\int\limits_{\mu}^{1}\frac{\tau_1}{\mu^2}\frac{\partial p_0}{\partial\mu}d\mu+V_1(\psi)\right],\qquad V_1(\psi)=\frac{r_0'^4r_0r_1}{(r_0^2+r_0'^2)^2}$$

Переходя от независимых переменных μ и ψ к переменным ξ_0 и ψ, приведем уравнение (4.4) к каноническому виду

$$\frac{\partial^2\eta_1}{\partial\xi_0\partial\psi}-\frac{\eta_0^{\cdot\cdot}}{\xi_0^{\cdot}\eta_0^{\cdot}}\frac{\partial\eta_1}{\partial\psi}=L_1(\xi_0,\psi)\tag{4.5}$$

$$L_1(\xi_0,\psi)=\frac{\eta_0^{\cdot}}{(\xi_0^{\cdot})^2+(\eta_0^{\cdot})^2}\left[\frac{\partial\varphi_1}{\partial\psi}-\frac{\partial}{\partial\mu}\left(F_1-\frac{\varphi_1}{\xi_0^{\cdot}}\frac{\partial\xi_0}{\partial\psi}\right)\right],\qquad \xi_0=\xi_0(\mu,\psi)$$

Общее решение уравнения (4.5) можно представить в виде

$$\eta_1(\xi_0,\psi)=\int\eta_0^{\cdot}C_3(\psi)\,d\psi+\int\eta_0^{\cdot}K_1(\xi_0,\psi)\,d\psi+C_4(\xi_0)\tag{4.6}$$

$$K_1(\xi_0,\psi)=\int\frac{L_1(\xi_0,\psi)}{\eta_0^{\cdot}}d\xi_0$$

Для определения функции $\xi_1(\xi_0,\psi)$ в первом уравнении системы (4.3) перейдем к переменным ξ_0, ψ

$$\frac{\partial\xi_1}{\partial\psi}-\frac{\xi_0^{\cdot}}{\eta_0^{\cdot}}\frac{\partial\eta_1}{\partial\psi}=F_1(\xi_0,\psi)$$

Интегрируя по ψ, получим

$$\xi_1(\xi_0,\psi)=\int F_1(\xi_0,\psi)\,d\psi+\int\xi_0^{\cdot}\,[C_3(\psi)+K_1(\xi_0,\psi)]\,d\psi+C_5(\xi_0)\tag{4.7}$$

Для определения трех произвольных функций $C_3(\psi)$, $C_4(\xi_0)$ и $C_5(\xi_0)$ имеем второе уравнение системы (4.3) и два очевидных условия

$$\xi_1=r_1\cos\psi,\quad \eta_1=r_1\sin\psi\quad\text{при }\mu=1\tag{4.8}$$

Удовлетворяя условиям (4.8), из (4.6) и (4.7) получим

$$\xi_1=\int\limits_{\varphi}^{\psi}F_1(\xi_0,\psi)\,d\psi+\int\limits_{\varphi}^{\psi}\xi_0^{\cdot}\,[C_3(\psi)+K_1(\xi_0,\psi)]\,d\psi+r_1\cos\psi\tag{4.9}$$

$$\eta_1=\int\limits_{\varphi}^{\psi}\eta_0^{\cdot}\,[C_3(\psi)+K_1(\xi_0,\psi)]\,d\psi+r_1\sin\psi$$

$$\xi_0=\xi_0(\varphi),\qquad \varphi=\operatorname{arc\,tg}\frac{f_2(s)}{f_1(s)}$$

Функцию $C_3(\psi)$ определим из второго уравнения системы (4.3). Решение третьего уравнения системы (4.1) можно представить в виде (3.4). В случае термодинамически совершенного газа из последнего уравнения системы (4.1) имеем

$$i_1(\mu,\psi)=i_{1+}(\psi)+2i_0(\psi)\ln\frac{p_0(\mu,\psi)}{p_{0+}}\tag{4.10}$$

При построении каждого следующего приближения система уравнений для коэффициентов разложения искомых функций будет отличаться от системы (4.1) только правыми частями, а следовательно, может быть проинтегрирована предложенным способом.

5. В качестве примера рассмотрим задачу о расширении поршня, уравнение которого в плоскости автомодельных переменных для упрощения выкладок зададим в виде

$$\frac{\xi^2}{(1+\alpha)^2}+\frac{\eta^2}{(1-\alpha)^2}=1, \quad \alpha\ll 1 \tag{5.1}$$

Пренебрегая величинами порядка α^2 и выше, из (5.1) имеем (φ — текущий полярный угол в плоскости ξ, η)

$$s=\varphi+\frac{\alpha}{2}\sin 2\varphi+O(\alpha^2), \quad \varphi=\operatorname{arctg}\frac{\eta}{\xi} \tag{5.2}$$

Фронт ударной волны в предельном течении будет совпадать с поверхностью поршня

$$r_0(\psi)=1+\alpha\cos 2\psi+O(\alpha^2) \tag{5.3}$$

Подставляя (5.2) и (5.3) в (3.2), получим закон движения частицы в виде

$$\varphi=\psi+2\alpha(1-\mu)\sin 2\psi+O(\alpha^2) \tag{5.4}$$

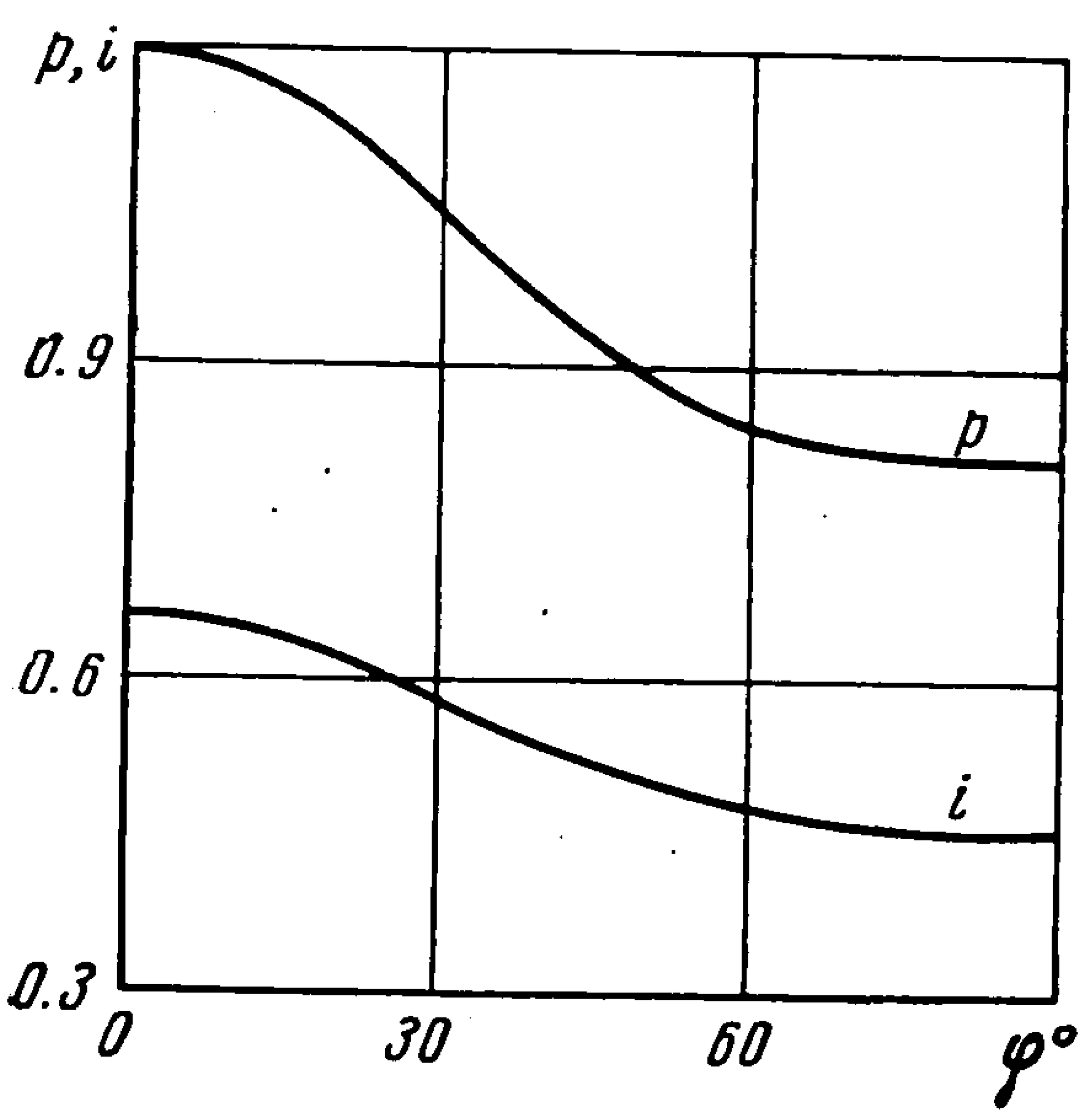
$$\xi_0=(1+\alpha\cos 2\varphi)\cos\varphi, \quad \eta_0=(1+\alpha\cos 2\varphi)\sin\varphi$$

Задача о движении поршня, близкого к сферическому, была рассмотрена М. П. Михайловой [7], где были учтены все члены, зависящие от ε и члены первого порядка малости по α.

В формуле (3.4) интеграл будет иметь порядок α^2. Сохраняя в p_{0+} члены второго порядка малости по α, окончательно для давления в предельном течении имеем

$$p_0=1+2\alpha\cos 2\varphi+\alpha^2\left[1-8\sin^2 2\varphi+\frac{4}{\nu+4}(\mu^{\nu+4}-1)\sin^2 2\varphi\right]+O(\alpha^3)$$

Энтальпию газа в предельном течении и величину τ_1 для совершенного газа получим из (3.5) и (3.6)



$$i_0={}^1/_2[1+2\alpha\cos 2\varphi+\alpha^2(1-8\sin^2 2\varphi)]+O(\alpha^3) \tag{5.5}$$

$$\tau_1=1+\frac{4\alpha^2}{\nu+4}(1-\mu^{\nu+4})\sin^2 2\varphi+O(\alpha^3)$$

При нахождении следующего приближения для формы фронта ударной волны воспользуемся формулой (2.3) при $\mu=0$. Получим

$$r(\psi)=1+\alpha\cos 2\psi+\frac{\varepsilon}{\nu+2}\left[1-\alpha\frac{2\nu+(5\nu+1)\cos 2\psi}{\nu+3}\right]$$

Сохраняя главные члены в (4.9) и учитывая (5.4), найдем закон движения частицы в следующем приближении

$$\xi=\cos\psi\left\{1+\varepsilon\frac{\mu^{\nu+2}}{\nu+2}+\alpha[1-2(3-2\mu)\sin^2\psi]\right\} \tag{5.6}$$

$$\eta=\sin\psi\left\{1+\varepsilon\frac{\mu^{\nu+2}}{\nu+2}-\alpha[1-2(3-2\mu)\cos^2\psi]\right\}$$

Очевидно, что при $\mu=0$ координаты частицы, определяемые формулами (5.6), удовлетворяют уравнению (5.1). Учитывая формулы (5.5) и (4.10), окончательно для энтальпии газа получим формулу

$$i=\frac{1}{2}(1+2\alpha\cos 2\psi)+\frac{\alpha^2}{2}[1-8(2-\mu)\sin^2 2\psi]+\frac{\varepsilon}{\nu+2}\left[1-2\alpha\frac{\nu-(2-\nu)\cos 2\psi}{\nu+3}\right]$$

Давление газа в рассматриваемом приближении вычислим по формуле

$$p(\mu, \psi) = 1 + 2\alpha\cos 2\psi + \alpha^2 [1 + 8(\mu - 2)\sin^2 2\psi +$$
$$+\frac{4}{\nu+4}(\mu^{\nu+4} - 1)\sin^2 2\psi] + \frac{\varepsilon}{2(\nu+2)}[1 - \nu - (\nu+1)\mu^{2(\nu+2)}]$$

Распределения давления и энтальпии по поверхности осесимметричного поршня при $\alpha = 0.1$ представлено на фигуре.

Автор благодарит А. А. Гриба за внимание к работе и Г. А. Колтона за полезное обсуждение работы.

Поступила 11 VII 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. М., Физматгиз, 1959.
2. *Черный Г. Г.* Применение интегральных соотношений в задачах о распространении сильных ударных волн. ПММ, 1960, т. 24, вып. 1.
3. *Фадеев С. И.* Применение метода ударного слоя в неустановившихся одномерных движениях совершенного газа с нулевым градиентом температуры. Изв. Сиб. отд. АН СССР. Сер. техн. наук, 1967, № 13, вып. 3.
4. *Богатко В. И., Колтон Г. А.* Пространственное нестационарное движение газа за фронтом сильной ударной волны. Вестн. ЛГУ, 1971, № 1.
5. *Богатко В. И., Колтон Г. А.* Автомодельные гиперзвуковые течения невязкого газа. Вестн. ЛГУ, 1972, № 13.
6. *Седов Л. И.* Методы подобия и размерности в механике. М., «Наука», 1967.
7. *Михайлова М. П.* Движение газа за несимметричным поршнем. Докл. АН СССР, 1963, т. 148, № 1.