

СТРУКТУРА ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ УДАРНЫХ ВОЛН В МНОГОКОМПОНЕНТНЫХ И МНОГОФАЗНЫХ СМЕСЯХ В СЛУЧАЕ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПАРАМЕТРА ВЗАИМОДЕЙСТВИЯ

В. В. Гогосов, В. А. Налетова, Н. Л. Фарбер

(Москва)

Исследуется структура ударных волн в многокомпонентных и многофазных смесях, состоящих из нейтрального газа и $N - 1$ сортов заряженных частиц, каждый из которых характеризуется собственным коэффициентом подвижности. Параметр взаимодействия произволен. Рассматриваются случаи малых чисел Прандтля, когда температуру среды можно считать постоянной, и больших чисел Прандтля, когда процессами, связанными с теплопроводностью, можно пренебречь.

Как и в обычной электрогидродинамике [1], решение задачи о структуре электрогидродинамической ударной волны существенно зависит от направлений скорости, электрического поля и плотности токов перед фронтом волны. Всюду для определенности предполагается, что нормальная к фронту ударной волны составляющая скорости перед волной $u_I > 0$. Показано, что если нормальная к фронту волны составляющая электрического поля перед волной $E_I > 0$, то ударная волна всегда имеет структуру, а электрическое поле на фронте волны непрерывно.

Если $E_I < 0$, а плотности токов всех компонент положительны, то структура ударной волны существует не при всех значениях параметров перед фронтом волны. Из анализа структуры, если последняя существует, следует, что электрическое поле на фронте волны либо непрерывно, либо терпит разрыв. В последнем случае нормальные к фронту волны составляющие электрического поля и скорости за фронтом волны связаны соотношением $u_{II} + b_2 E_{II} = 0$, где b_2 — наибольший из коэффициентов подвижностей компонент. Поверхностный заряд на фронте ударной волны возникает вследствие резкого увеличения плотности заряда компоненты с наибольшим коэффициентом подвижности. В случае, когда $E_I < 0$, а плотности токов всех компонент отрицательны, из анализа структуры ударной волны следует, что электрическое поле на фронте ударной волны непрерывно, если перед фронтом волны сумма $u_I + b_N E_I \neq 0$ (b_N — наименьший из коэффициентов подвижностей компонент). Если сумма $u_I + b_N E_I = 0$, то поле на фронте волны может терпеть разрыв; для определения параметров за фронтом волны один из параметров за волной нужно задавать. Если при этом за фронтом волны $u_{II} + b_N E_{II} \neq 0$, то скорость перед волной больше, а за волной меньше скорости звука. Если $u_{II} + b_N E_{II} = 0$, то скорость газа перед и за фронтом ударной волны сверхзвуковая. На существование структуры такого типа ударных волн указывалось и в обычной электрогидродинамике [1] с одним сортом заряженных частиц. В рассматриваемом случае движения многокомпонентной среды роль этого одного сорта заряженных частиц играет компонента с наименьшим коэффициентом подвижности. В случае, когда $E_I < 0$, а плотности токов компонент имеют разные знаки, структура ударных волн существует не при всех значениях параметров перед фронтом волны. Пусть плотности токов j_2, j_3, \dots, j_p отрицательны, а $j_{p+1}, j_{p+2}, \dots, j_N$ положительны. Вид дополнительных соотношений, замыкающих систему уравнений на фронте ударной волны, находится из анализа структуры волны. При этом возможны случаи, когда либо электрическое поле на фронте ударной волны непрерывно, либо поле разрывно, а параметры за фронтом волны или перед волной связаны соответственно соотношениями $u_{II} + b_{p+1} E_{II} = 0$, либо $u_I + b_p E_I = 0$. В последнем случае какой-либо параметр за

фронтом волны нужно задавать, чтобы определить остальные параметры. Если при этом $u_{II} + b_p E_{II} \neq 0$, то скорость перед фронтом ударной волны сверхзвуковая, за фронтом — дозвуковая. Существует структура ударных волн, у которых перед фронтом волны сумма $u_I + b_p E_I = 0$, а за фронтом $u_{II} + b_p E_{II} = 0$; при этом скорость газа перед фронтом и за фронтом ударной волны сверхзвуковая.

Из анализа структуры ударной волны, если последняя существует, следует, что в случае отрицательного поля ($E_I < 0$) и токов разных знаков имеется класс ударных волн, у которых и перед фронтом и за фронтом волны параметры среды удовлетворяют уравнениям $u_I + b_p E_I = 0$ и $u_{II} + b_{p+1} E_{II} = 0$. Скорость газа перед волной сверхзвуковая, за волной — дозвуковая. Распределение плотности суммарного объемного заряда внутри структуры таких волн имеет два максимума. Первый максимум возникает за счет возрастания плотности заряда p -го сорта заряженных частиц (плотности зарядов остальных компонент меняются слабо), второй максимум — за счет возрастания плотности заряда $p + 1$ -го сорта заряженных частиц при слабом изменении плотностей зарядов остальных компонент. Ударные волны такого типа могут реализоваться лишь в смесях, содержащих заряженные частицы нескольких сортов, и в обычной электрогидродинамике не существуют.

1. Рассмотрим стационарное течение многокомпонентной или многофазной среды — смеси газа и $N - 1$ сортов ионов или заряженных частиц в приближении электрогидродинамики. Будем обозначать индексом α ($\alpha = 2, 3, \dots, N$) параметры, относящиеся к соответствующим сортам заряженных частиц. Направим ось координат x вдоль скорости потока и будем считать, что электрическое поле имеет единственную составляющую, параллельную оси x . Пусть все параметры потока зависят только от x . Уравнения, описывающие такое течение (для описания движения заряженных частиц или капель, если таковые имеются, используется диффузионное приближение [2]) с учетом вязкости и теплопроводности в безразмерной форме, имеют вид (см. также [1-3])

$$(1.1) \quad \rho u = 1, \quad \frac{du}{d\xi} = u + \frac{1}{\gamma M_0^2} \frac{T}{u} - SE^2 - \Pi, \quad \Pi = \text{const}$$

$$(1.2) \quad \frac{3}{4(\gamma - 1) M_0^2 \text{Pr}} \frac{dT}{d\xi} + u \frac{du}{d\xi} = \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2} T + \\ + \frac{1}{2} u^2 + 2SJ(\varphi - \varphi_0) - \Sigma$$

$$p = \rho T, \quad \Sigma = \text{const}$$

$$(1.3) \quad \frac{dE}{d\xi} = \sum_{\alpha=2}^N \frac{\varepsilon_\alpha}{E + R_{q\alpha} u}, \quad \frac{d\varphi}{d\xi} = -QE, \quad R_{q\alpha} J_\alpha = q_\alpha (E + R_{q\alpha} u) \\ J_\alpha = \text{const}, \quad \alpha = 2, \dots, N$$

Безразмерные параметры, входящие в уравнения (1.1)–(1.3), определяются формулами

$$(1.4) \quad \rho = \frac{\rho^*}{\rho_0^*}, \quad u = \frac{u^*}{u_0^*}, \quad p = \frac{p^*}{p_0^*}, \quad T = \frac{T^*}{T_0^*} \\ E = \frac{E^*}{E_0^*}, \quad q_\alpha = \frac{q_\alpha^*}{q_0^*}, \quad q_0^* = \sum_{\alpha=2}^N q_{\alpha 0}^*, \quad \varphi = \frac{4\pi q_0^* \varphi^*}{E_0^{*2}} \\ M_0 = \frac{u_0^*}{a_0^*}, \quad a_0^{*2} = \frac{\gamma p_0^*}{\rho_0^*}, \quad \gamma = \frac{c_p}{c_v}, \quad S = \frac{E_0^{*2}}{8\pi \rho_0^* u_0^{*2}}$$

$$Q = \frac{4\pi q_0^* l}{E_0^*}, \quad J_\alpha = \frac{j_\alpha^*}{q_0^* u_0^*}, \quad R_{q\alpha} = \frac{u_0^*}{b_\alpha E_0^*}$$

$$Pr = \frac{c_p \eta}{\kappa}, \quad J = \sum_{\alpha=2}^N J_\alpha, \quad \varepsilon_\alpha = R_{q\alpha} Q J_\alpha = \frac{4\pi l j_\alpha^*}{b_\alpha E_0^{*2}}$$

$$\zeta = \frac{x}{l}, \quad l = \frac{4\eta}{3\rho_0^* u_0^*}$$

Здесь ρ^* , u^* , p^* , T^* — соответственно размерные плотность, скорость, давление и температура среды, $q_\alpha^* > 0$, j_α^* , E^* , φ^* — размерные плотности объемных зарядов и токов, напряженность электрического поля и электрический потенциал, b_α — коэффициенты подвижности заряженных частиц α -го сорта; η , κ — коэффициенты вязкости и теплопроводности смеси (величины b_α , η , κ в дальнейшем считаются постоянными) c_p , c_v — удельные теплоемкости, l — величина, равная по порядку длине свободного пробега.

Нулевым индексом обозначены параметры в одной из точек потока, где членами, стоящими в левых частях второго уравнения (1.1) и первого уравнения (1.2), связанными с вязкостью и теплопроводностью, можно пренебречь. Постоянные интегрирования Π и Σ , определенные по значениям параметров течения в этой точке, равны

$$(1.5) \quad \Pi = 1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} - S, \quad \Sigma = \frac{1}{(\gamma - 1) M_0^2} + \frac{1}{2}$$

Система соотношений на фронте электрогидродинамической ударной волны в многофазной среде, вытекающая из законов сохранения и уравнений Максвелла, так же, как и в обычной электрогидродинамике [1,3], незамкнута. Недостающее соотношение в обычной электрогидродинамике было получено в работе [3] в случае малого и в работе [1] в случае произвольного параметра взаимодействия. В электрогидродинамике многофазных сред соответствующие соотношения в случае малого параметра взаимодействия выведены в работах [2,4], а в случае большого параметра взаимодействия и малых чисел Прандтля — в работе [5]. В последнем случае можно считать, что температура среды постоянна, и заменить первое уравнение (1.2) соотношением $T = 1$.

В данной работе из анализа структуры ударной волны находятся уравнения, замыкающие систему соотношений на фронте ударной волны в многофазной или многокомпонентной среде в случае произвольного параметра взаимодействия для произвольного числа компонент, когда число Прандтля $Pr \gg 1$, что соответствует малому коэффициенту теплопроводности смеси.

Пренебрегая в первом уравнении (1.2) членом с производной $dT/d\zeta$ и считая, что $\varphi = \varphi_0$ [1], получим с использованием второго уравнения (1.1) соотношение для температуры газа

$$(1.6) \quad T = \gamma (\gamma - 1) M_0^2 (1/2 u^2 - SE^2 u - \Pi u + \Sigma)$$

Исследуем поведение интегральных кривых уравнений (1.1), (1.3) и (1.6) в полуплоскости uE , $u > 0$. Разделив первое уравнение (1.3) на второе уравнение (1.1), в котором температура T исключена с помощью выражения (1.6), получим

$$(1.7) \quad dE/du = \sum_{\alpha=2}^N \varepsilon_\alpha \prod_{\beta \neq \alpha} (E + R_{q\beta} u) \left[L_{(2)} \prod_{\alpha=2}^N L_{(1)\alpha} \right]^{-1}$$

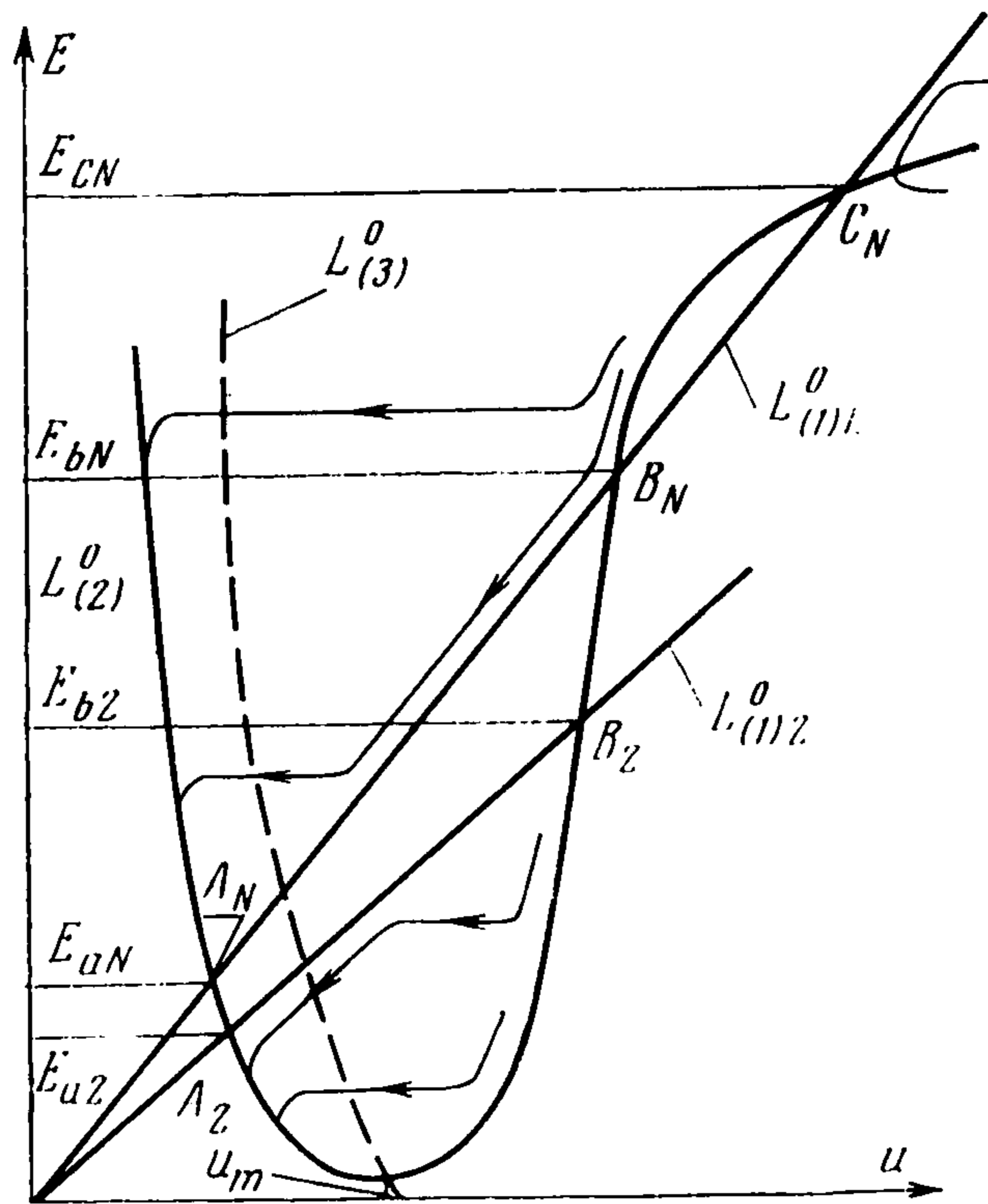
$$L_{(1)\alpha} = E + R_{q\alpha} u, \quad L_{(2)} = \frac{\gamma + 1}{2} u + \left(\frac{1}{M_0^2} + \frac{\gamma - 1}{2} \right) \frac{1}{u} -$$

$$- \gamma SE^2 - \gamma \left(1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} - S \right)$$

Будем считать, что $q_\alpha^* > 0$, величина

$$|\varepsilon_\alpha| = 4\pi q_0^* l |R_{q\alpha} J_\alpha| |E_0^*| \ll 1$$

а коэффициенты $b_2 > b_3 > \dots > b_N$ во всей области течения; при этом $|R_{qN}| > |R_{q(N-1)}| > \dots > |R_{q\alpha}|$. Пусть вначале $E_0^* < 0$. Линии

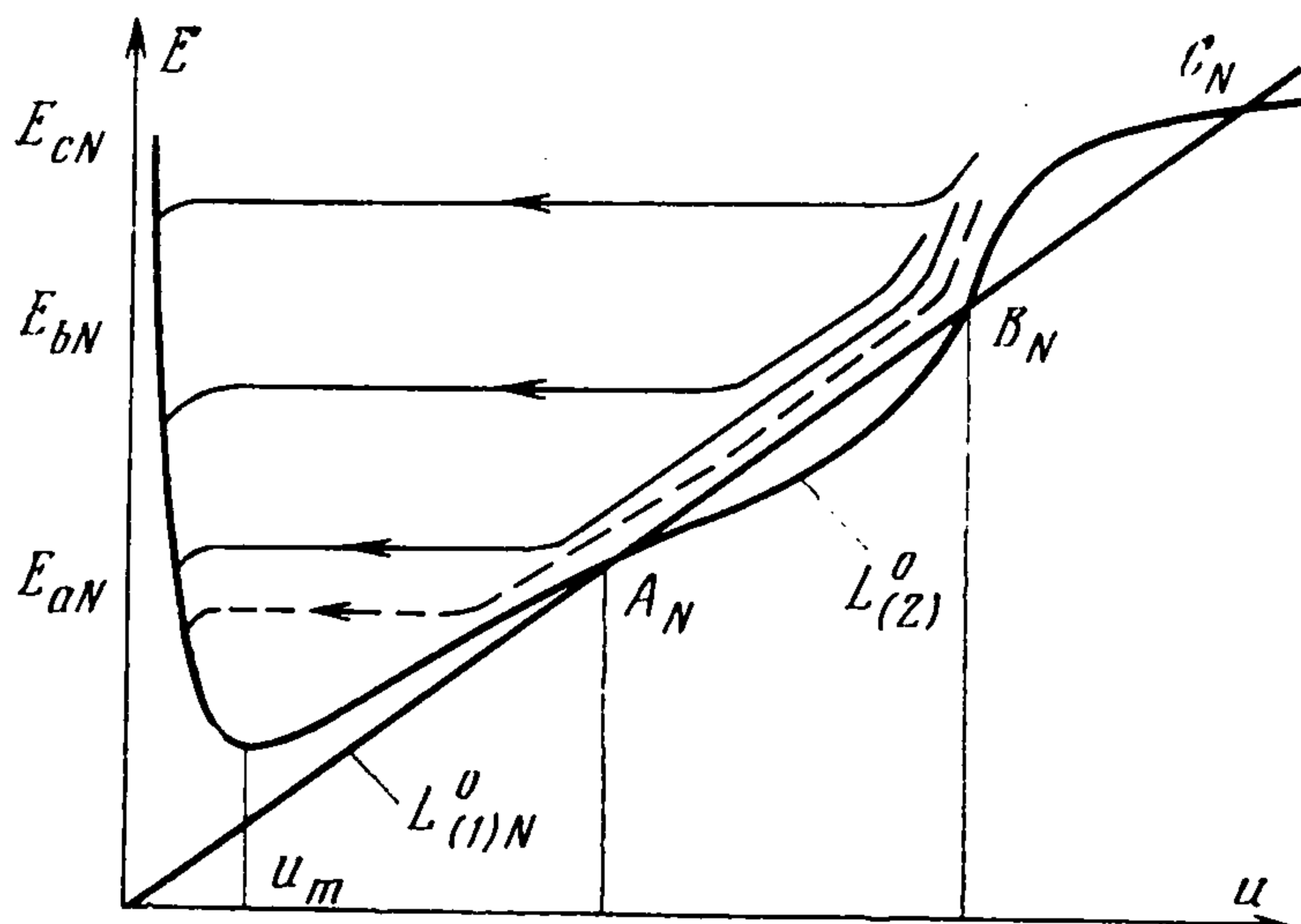


Фиг. 1

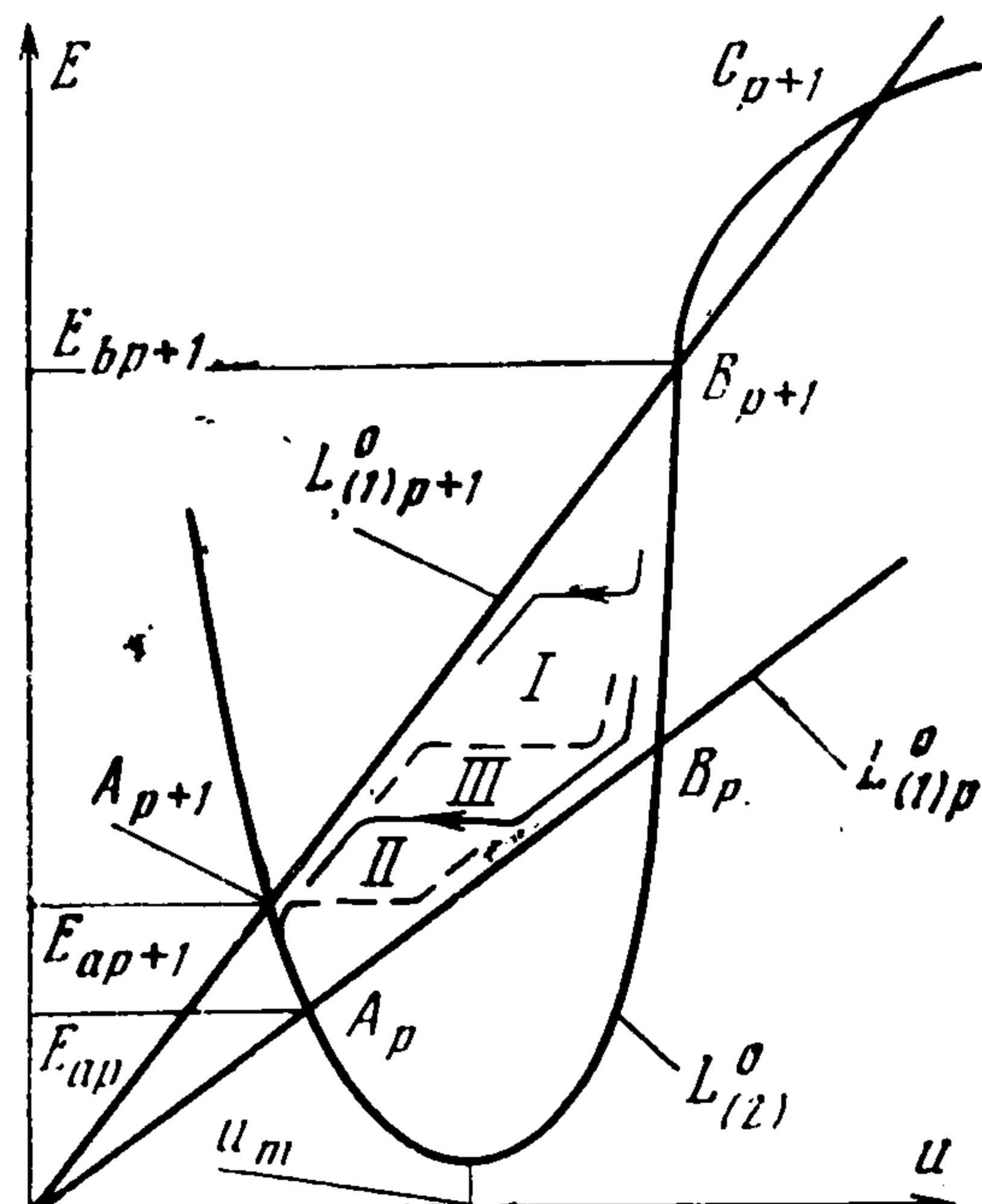
$L_{(1)\alpha} = 0$ и $L_{(2)} = 0$ — изоклины, на которых интегральные кривые уравнения (1.7) имеют вертикальные касательные ($dE/du = \infty$). Эти линии, поведение которых определяется параметрами $\gamma, M_0, R_{q\alpha}$ и S , будем обозначать $L_{(1)\alpha}^0$ и $L_{(2)}^0$ соответственно. Вид линии $L_{(2)}^0$ исследован в работе [1]. На фиг. 1—5 данной работы в плоскости uE изображен для определенности случай, когда линия $L_{(2)}^0$ на части плоскости $u > 0, E > 0$ имеет одну ветвь, экстремум которой находится в точке u_m, E_m . Все результаты легко обобщаются на случай другого расположения линии $L_{(2)}^0$.

Вид линии $L_{(3)}^0$, на которой скорость равна скорости звука, также

исследован в работе [1]. Пересечение этой линии с линией $L_{(2)}^0$ возможно только в точках экстремумов линии $L_{(2)}^0$, если последние существуют. В слу-



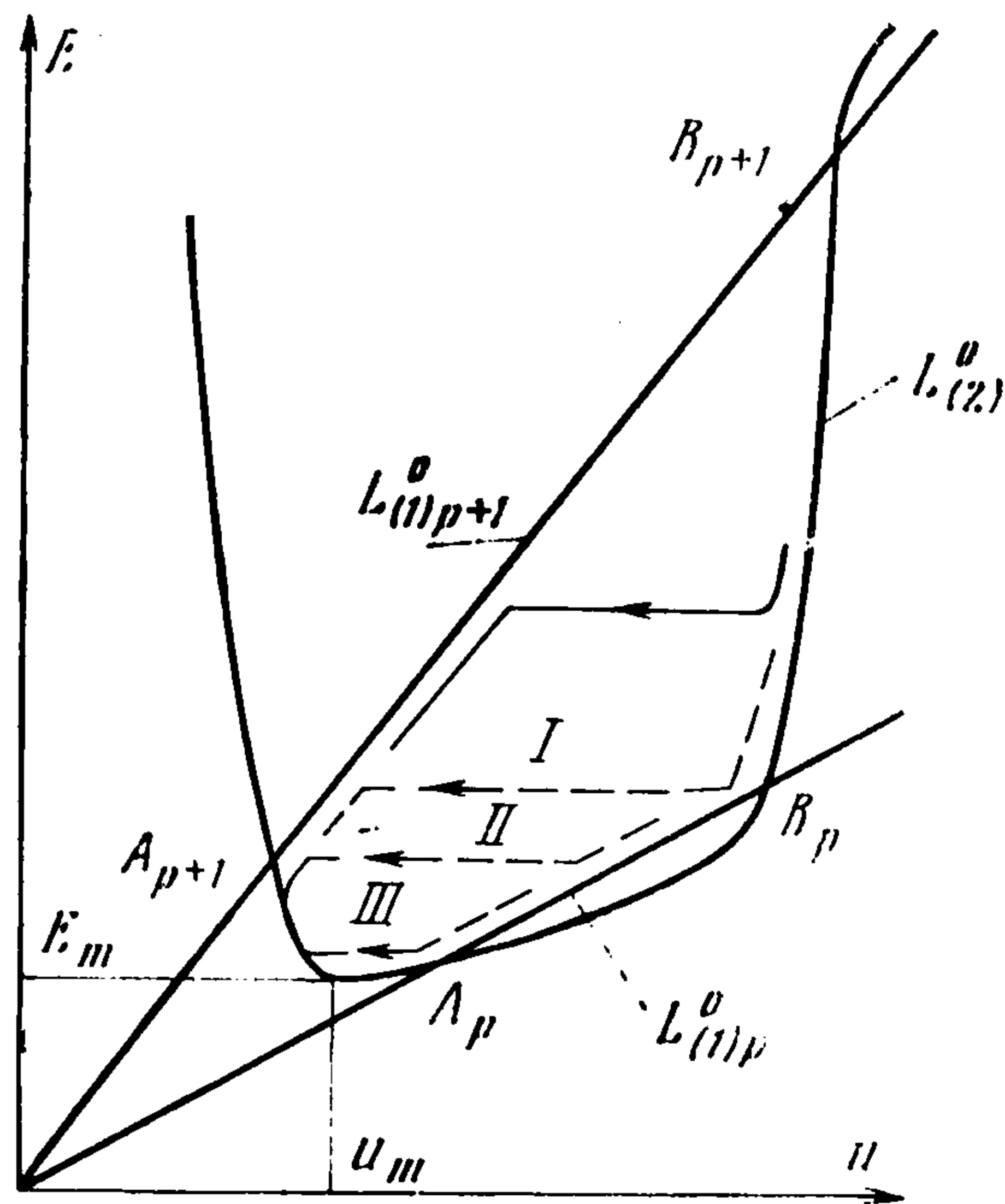
Фиг. 2



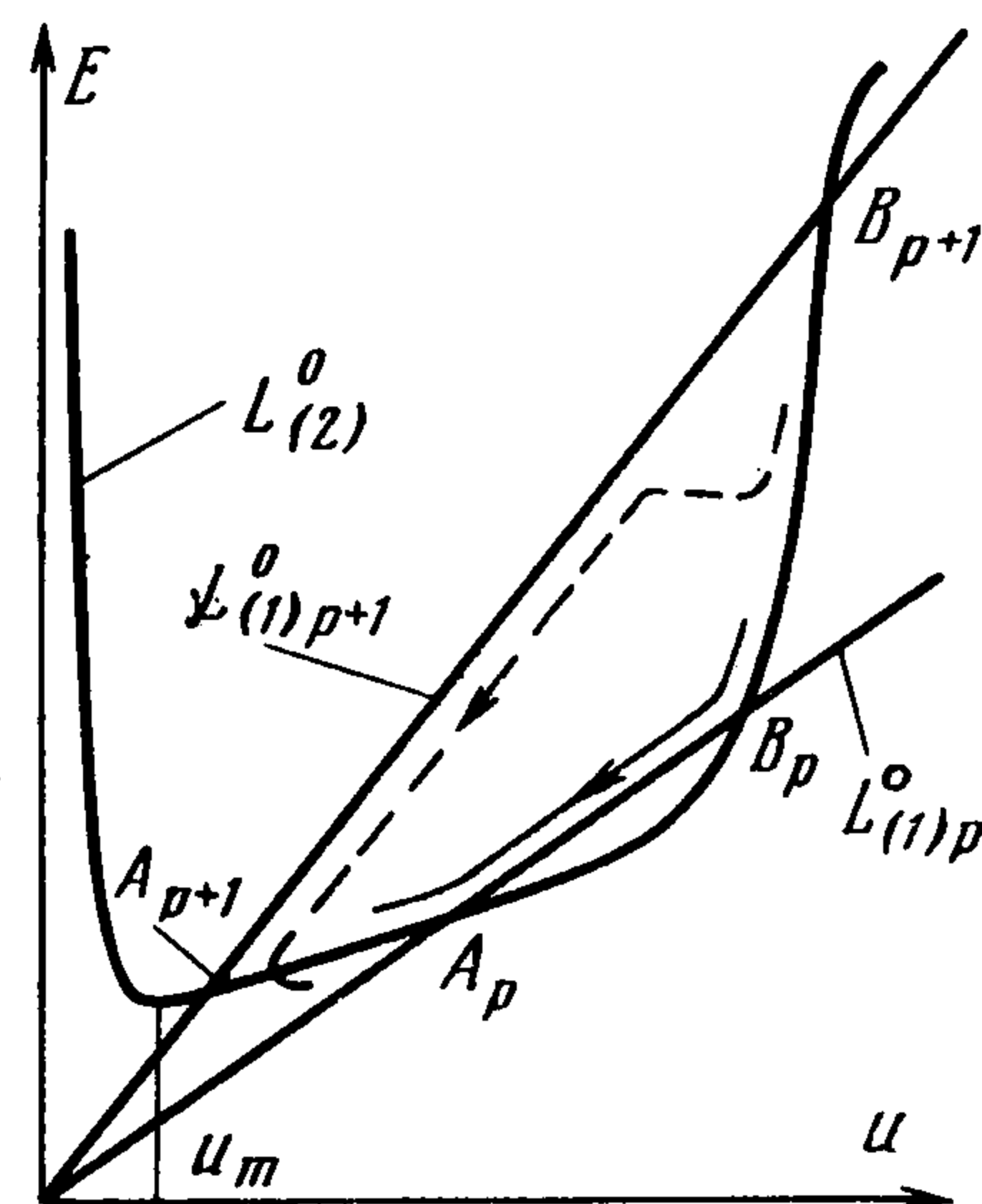
Фиг. 3

чае пересечения $L_{(2)}^0$ и $L_{(3)}^0$ части линии $L_{(2)}^0$, лежащие в интервале $u < u_m$, находятся в дозвуковой области, лежащие в интервале $u > u_m$ — в сверхзвуковой; в точке пересечения скорость звуковая. Одно из возможных поведений линии $L_{(3)}^0$ указано на фиг. 1 пунктиром. На остальных фигурах,

чтобы не загромождать чертежа, линия $L_{(3)}^\circ$ не указана. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в работе [1], получим, что линии $L_{(1)\alpha}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ могут пересекаться либо в одной точке, лежащей в дозвуковой или в сверхзвуковой области, либо в трех точках фиг. 1—5. В последнем случае или все точки расположены в сверхзвуковой области фиг. 2, 4, 5, или две



Фиг. 4



Фиг. 5

лежат в сверхзвуковой, а одна — в дозвуковой областях фиг. 1, 3. Координаты точек пересечения определяются из уравнений

$$E = -R_{q\alpha}u$$

$$SR_{q\alpha}^2 u^3 - \frac{\gamma+1}{2\gamma} u^2 + \left(1 + \frac{1}{\gamma M_0^2} - S\right) - \left(\frac{1}{\gamma M_0^2} + \frac{\gamma-1}{2\gamma}\right) = 0$$

В дальнейшем будем исследовать поведение интегральных кривых уравнения (1.7) только в тех областях, где они имеют физический смысл. Интегральные кривые, расположенные ниже изоклины $L_{(1)2}^\circ$ между изоклинами $L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ и выше изоклины $L_{(1)N}^\circ$, описывают течения при $j_\alpha > 0$ (фиг. 1), при $j_p < 0, j_{p+1} > 0$ (фиг. 3—5), и при $j_\alpha < 0$ (фиг. 1, 2) соответственно (всюду $\alpha = 2, 3, \dots, N, 2 \leq p \leq N - 1$). Чтобы не загромождать чертежа приведены только две из $N - 1$ изоклин $L_{(1)\alpha}^\circ$: $L_{(1)2}^\circ$ и $L_{(1)N}^\circ$, соответствующие компонентам с наибольшим и наименьшим коэффициентами подвижностей на фиг. 1 и $L_{(1)p}^\circ, L_{(1)p+1}^\circ$ на фиг. 3—5.

2. Рассмотрим течение смеси в случае, когда $j_\alpha > 0, \alpha = 2, \dots, N$. Интегральные кривые, описывающие такое течение, расположены ниже изоклины $L_{(1)2}^\circ$ (фиг. 1). Направление движения по интегральным кривым указано на фиг. 1 стрелками. Вид получаемых из исследования структуры ударной волны соотношений существенно зависит от расположения изоклин $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)2}^\circ$. Рассмотрим наиболее интересный случай, когда линии $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)2}^\circ$ пересекаются в трех точках A_2, B_2, C_2 (точка C_2 на фиг. 1 не указана), причем точка A_2 находится в дозвуковой, а B_2 и C_2 — в сверхзвуковой области. Обозначим значение поля в этих точках посредством E_{a2}, E_{b2}, E_{c2} . Будем считать, что участки интегральных кривых в сверх-

звуковой и дозвуковой областях, где интегральные кривые идут в ε -окрестности линии $L_{(2)}^\circ$, описывают течение газа перед и за ударной волной соответственно. Точки, в которых интегральные кривые выходят при $\varepsilon \rightarrow 0$ из ε -окрестности изоклины $L_{(2)}^\circ$, соответствуют состояниям перед ударной волной. Точки, в которых интегральные кривые входят при $\varepsilon \rightarrow 0$ в ε -окрестность изоклины $L_{(2)}^\circ$, соответствуют состояниям за ударной волной. Части интегральных кривых, параллельные оси $E = 0$ и изоклине $L_{(1)2}^\circ$, описывают структуру электрогидродинамической ударной волны. Будем обозначать цифрами I и II значения поля перед и за ударной волной соответственно. Проводя рассуждения, аналогичные изложенным в работе [1], можно показать, что интегральные кривые, на которых поле перед фронтом волны $E_I \leq E_{a2}$, описывают структуру ударной волны с непрерывным полем на фронте волны. Если $E_{a2} < E_I < E_{b2}$, то интегральные кривые, на которых перед фронтом волны лежит выбранная величина поля, описывают структуру ударной волны с разрывом электрического поля и образованием поверхностного заряда на фронте волны. Для нахождения величины поверхностного заряда на фронте волны, а значит, для замыкания системы соотношений на фронте ударной волны необходимо использовать уравнения

$$(2.1) \quad u_{II}^* + b_2 E_{II}^* = 0, \quad 4\pi\sigma = -u_{II}^* / b_2 - E_I^*$$

Поверхностный заряд на фронте волны возникает вследствие резкого увеличения плотности заряда компоненты с наибольшим коэффициентом подвижности. Интегральные кривые, выходящие из изоклины $L_{(2)}^\circ$ выше точки C_2 , пересекая линию $L_{(2)}^\circ$, далее нигде не идут вдоль нее — нет участка, соответствующего невязкому течению. Такие интегральные кривые не описывают структуры ударной волны. Следует отметить, что алгебраические соотношения, вытекающие из законов сохранения на фронте ударной волны, допускают скачкообразный переход с помощью ударной волны из состояния, которому соответствует описанная часть изоклины $L_{(2)}^\circ$ (невязкое течение), в состояние, которому соответствует часть линии $L_{(2)}^\circ$, находящаяся в дозвуковой области (также описывающая невязкое течение). Из сказанного выше следует, что ударные волны такого типа не имеют структуры.

В случае, когда изоклины $L_{(1)2}^\circ$, $L_{(2)}^\circ$ пересекаются в единственной дозвуковой точке A_2 , поле на фронте ударной волны непрерывно, а интенсивность поверхностного заряда равна нулю, если $E_I \leq E_{a2}$. Если $E_I > E_{a2}$, то интегральные кривые, на которых может лежать выбранная величина поля, описывают структуру ударной волны с разрывом электрического поля и образованием поверхностного заряда на фронте волны. Для нахождения величины поверхностного заряда, а значит, для замыкания системы соотношений на фронте ударной волны необходимо использовать уравнения (2.1).

В случае пересечения изоклин $L_{(1)2}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ в точках, находящихся в сверхзвуковой области, нет интегральных кривых, описывающих структуру ударной волны.

3. Рассмотрим течение смеси в случае, когда $j_\alpha < 0$, $\alpha = 2 \dots N$. Изоклина $L_{(1)N}^\circ$ соответствует компоненте с наименьшим коэффициентом подвижности. Интегральные кривые, описывающие такое течение, расположены выше изоклины $L_{(1)N}^\circ$ (фиг. 1, 2). Вид получаемых из исследования структуры ударной волны соотношений существенно зависит от расположения изоклин $L_{(1)N}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$. Из третьего уравнения (1.3) следует, что $|R_{q\alpha}| < 1$, $\alpha = 2, \dots, N$. Линии $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)N}^\circ$ могут иметь либо три, либо одну точку пересечения. В последнем случае точка пересечения находится в сверхзвуковой области.

На фиг. 1 изображен случай, когда изоклины $L_{(1)N}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ пересекаются в трех точках A_N, B_N, C_N , причем точка A_N лежит в дозвуковой области, а точки B_N, C_N — в сверхзвуковой области плоскости uE . Обозначим значение электрического поля в точках A_N, B_N и C_N посредством E_{aN}, E_{bN} и E_{cN} соответственно ($E_{aN} < E_{bN} < E_{cN}$). Пусть за фронтом волны напряженность электрического поля удовлетворяет неравенству

$$(3.1) \quad E_{aN} < E_{II} < E_{bN}$$

Интегральные кривые, на которых может лежать выбранная величина электрического поля E_{II} , описывают структуру ударной волны с разрывом электрического поля на фронте волны [1]. Параметры перед фронтом волны удовлетворяют соотношению

$$(3.2) \quad u_I^* + b_N E_I^* = 0 \quad (4\pi\epsilon = E_{II}^* + u_I^* / b_N)$$

Электрическое поле за таким разрывом может принимать любые значения, удовлетворяющие неравенствам (3.1). Для определения параметров течения за фронтом ударной волны, когда параметры перед фронтом заданы и выполняется условие (3.2), один из параметров за фронтом волны нужно задавать. Отметим, что величину электрического поля за фронтом волны нужно задавать в пределах, определяемых неравенствами (3.1). На существование такого типа ударных волн в обычной электрогидродинамике в случае малого параметра взаимодействия указывалось в работе [6]. Если электрическое поле за фронтом ударной волны удовлетворяет неравенству $E_{bN} \leq E_{II} < E_{cN}$, то на фронте ударной волны электрическое поле непрерывно, а интенсивность поверхностного заряда равна нулю.

Рассмотрим примеры течений в случае, когда изоклины $L_{(2)}^\circ, L_{(1)N}^\circ$ пересекаются в сверхзвуковой области. Обозначим точки пересечения посредством A_N, B_N, C_N в случае трех точек и A_N в случае одной точки пересечения. Нетрудно видеть, что в случае трех точек пересечения изоклин $L_{(1)N}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ (фиг. 2), лежащих в сверхзвуковой области, электрическое поле на фронте ударной волны непрерывно, если за фронтом или перед фронтом волны выполняются соответственно неравенства $E_{bN} \leq E_{II} < E_{cN}, E_I < E_{aN}$. Поле терпит разрыв, если за фронтом волны выполняются неравенства $E_{aN} \leq E_{II} < E_{bN}$. При этом параметры перед фронтом разрыва удовлетворяют соотношению (3.2). Для определения параметров течения за фронтом ударной волны, когда параметры перед фронтом связаны соотношением (3.2), за фронтом волны нужно задавать один из параметров. При

этом величину электрического поля за фронтом волны нужно задавать в пределах, определяемых неравенствами $E_{aN} \leq E_{II} < E_{bN}$. Скорость газа за фронтом ударной волны во всех перечисленных выше случаях — дозвуковая.

Существует множество интегральных кривых, выходящих из малой окрестности точки B_N с наклоном, равным наклону линии $L_{(1)N}^\circ$. Ниже точки B_N такие интегральные кривые идут вдоль изоклины $L_{(1)N}^\circ$ до точки A_N , а затем вдоль изоклины $L_{(2)}^\circ$. (На фиг. 2 соответствующая интегральная кривая изображена пунктиром). Такие интегральные кривые описывают структуру ударных волн, у которых параметры перед и за фронтом волны связаны соотношениями $u_l^* + b_N E_l^* = 0$, $l = I, II$, скорость за фронтом волны (как и перед волной) сверхзвуковая и равна большему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{aN}) = 0$. Отметим, что существует структура ударной волны, у которой скорость за фронтом волны дозвуковая и равна меньшему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{aN}) = 0$; поле за фронтом волны $E_{II} = E_{aN}$, а перед фронтом удовлетворяет соотношению (3.2).

Пусть изоклины $L_{(2)}^\circ, L_{(1)N}^\circ$ имеют одну точку пересечения, лежащую в сверхзвуковой области. Предположим, что перед фронтом волны поле удовлетворяет неравенству $E_I < E_{aN}$. Интегральные кривые, на которых может лежать выбранная величина электрического поля, описывают структуру ударной волны с непрерывным полем. Других ударных волн, имеющих структуру, в этом случае не существует.

4. Рассмотрим течение, когда $j_\alpha < 0$ при $\alpha = 2, 3, \dots, p$ и $j_\alpha > 0$ при $\alpha = p + 1, \dots, N$. На фиг. 3 построены изоклины $L_{(2)}^\circ, L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$. Интегральные кривые, описывающие такое течение, расположены между изоклинами $L_{(1)p+1}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$. Вид получаемых из исследования структуры ударной волны соотношений существенно зависит от расположения изоклин $L_{(1)p+1}^\circ, L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$. Из третьего уравнения (1.3) следует, что $|R_{q\alpha}| < 1$ при $\alpha = 2, 3, \dots, p$ и $|R_{q\alpha}| > 1$ при $\alpha = p + 1, p + 2, \dots, N$. Изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ могут иметь либо три точки пересечения, из которых две или все три лежат в сверхзвуковой области, либо одну; последняя может лежать как в дозвуковой, так и в сверхзвуковой области.

4.1. Пусть изоклина $L_{(2)}^\circ$ имеет три точки пересечения с изоклинами $L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$: A_p, B_p, C_p и $A_{p+1}, B_{p+1}, C_{p+1}$ соответственно. Значение электрического поля в точках пересечения A_p, B_p, C_p и $A_{p+1}, B_{p+1}, C_{p+1}$ обозначим посредством E_{ap}, E_{bp}, E_{cp} и $E_{ap+1}, E_{bp+1}, E_{cp+1}$ соответственно. На фиг. 3 точки A_p и A_{p+1} лежат в дозвуковой области и, кроме того, выполняется неравенство $E_{ap+1} \leq E_{bp}$.

Обозначим цифрой I интегральную кривую, которая при $\varepsilon \rightarrow 0$ выходит с горизонтальным наклоном из малой окрестности точки B_p , а цифрой II — интегральную кривую, которая с горизонтальным наклоном входит в малую окрестность точки A_{p+1} (на фиг. 3 нанесены пунктиром). Интегральные кривые, выходящие с горизонтальным наклоном из окрестности линии $L_{(2)}^\circ$ между точками B_p и B_{p+1} (поле перед фронтом ударной волны удовлетворяет неравенствам $E_{bp} \leq E_I < E_{bp+1}$), идут до изоклины $L_{(1)p+1}^\circ$, далее поворачивают и идут вдоль изоклины и пересекают линию $L_{(2)}^\circ$ в окрест-

ности точки A_{p+1} . Эти интегральные кривые описывают структуру ударной волны со скачком электрического поля на фронте волны. Для замыкания системы уравнений на фронте ударной волны нужно использовать условия

$$(4.1) \quad u_{II}^* + b_{p+1}E_{II}^* = 0, \quad 4\pi\epsilon = -u_{II}^*/b_{p+1} - E_I^*$$

Ниже интегральной кривой I лежат интегральные кривые, описывающие структуру ударных волн со скачком электрического поля на фронте волны, у которых перед фронтом волны сумма

$$(4.2) \quad u_I^* + b_p E_I^* = 0 \quad (E_I = -R_{qp}u_I)$$

Интегральные кривые, лежащие ниже линии II, пересекают изоклину $L_{(2)}^\circ$ между точками A_p и A_{p+1} . Чтобы найти состояние за фронтом таких ударных волн, нужно задать за фронтом волны один из параметров. В частности, величину электрического поля можно задавать в пределах $E_{ap} < E_{II} < E_{ap+1}$.

Существует множество интегральных кривых, описывающих структуру ударных волн, у которых внутри структуры распределение плотности суммарного объемного заряда имеет два максимума. Эти интегральные кривые лежат между линиями I и II. Все они выходят из окрестности точки B_p , идут вдоль изоклины $L_{(1)p}^\circ$, отходят от нее, идут с малым наклоном до изоклины $L_{(1)p+1}^\circ$, поворачивают и идут в ϵ -окрестности последней до пересечения с изоклиной $L_{(2)}^\circ$ в ϵ -окрестности точки A_{p+1} . Одна из таких интегральных кривых кривая III изображена на фиг. 3. Перед фронтом ударных волн, которым соответствуют описанные интегральные кривые, сумма $E_I + R_{qp}u_I = 0$, а за фронтом — сумма $E_{II} + R_{qp+1}u_{II} = 0$. Перед фронтом такой ударной волны скорость сверхзвуковая, за фронтом — дозвуковая. Ударные волны такого типа имеют место лишь в средах, содержащих несколько сортов заряженных частиц, и в обычной электрогидродинамике реализоваться не могут. Первый максимум распределения плотности объемного заряда внутри структуры волны возникает за счет возрастания плотности заряда q_p (плотности зарядов q_i , $i \neq p$, меняются слабо), второй — возникает за счет возрастания плотности заряда q_{p+1} (плотности зарядов q_i , $i \neq p+1$, меняются слабо).

Если поле перед фронтом волны удовлетворяет неравенству $E_{cp+1} \leq E_I \leq E_{cp}$, то структуры ударной волны не существует.

Обратимся теперь к случаю, когда $E_{ap+1} > E_{bp}$. Пусть поле перед фронтом ударной волны удовлетворяет неравенствам $E_{ap+1} < E_I < E_{bp+1}$. Тогда на фронте ударной волны электрическое поле терпит разрыв. Параметры за фронтом волны удовлетворяют первому соотношению (4.1). Пусть за фронтом ударной волны поле удовлетворяет неравенствам $E_{ap} < E_{II} < E_{bp}$, тогда перед фронтом волны выполняется условие (4.2), при этом на фронте волны образуется поверхностный заряд. В случае, когда выполняется одно из следующих неравенств

$$E_{bp} < E_I \leq E_{ap+1}, \quad E_{bp} \leq E_{II} < E_{ap+1}$$

поле на фронте ударной волны непрерывно, а интенсивность поверхностного заряда равна нулю.

Рассмотрим случай, когда изоклины $L_{(1)p+1}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ имеют одну точку пересечения A_{p+1} в дозвуковой области, а изоклины $L_{(1)p}^\circ$ и $L_{(2)}^\circ$ — три точки пересечения A_p , B_p ,

C_p , одна из которых лежит в дозвуковой области. В этом случае для нахождения поверхностного заряда можно использовать результаты п. 4.1, заменив в неравенствах $E_{bp} \leq E_I < E_{bp+1}$, $E_{ap+1} < E_I < E_{bp+1}$ величину E_{bp+1} на E_{cp} .

4.2. Рассмотрим случай, когда все три точки пересечения изоклин $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$ находятся в сверхзвуковой области, а одна из трех точек пересечения изоклин $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ находится в дозвуковой области; пусть, кроме того, для определенности $E_{ap+1} \leq E_{bp}$ и $E_{ap} < E_{ap+1}$ (фиг. 4). Обозначим цифрами I и III интегральные кривые, которые при $\varepsilon \rightarrow 0$ выходят с горизонтальным наклоном из малых окрестностей точек B_p и A_p соответственно, а цифрой II — интегральную кривую, которая с горизонтальным наклоном входит в малую окрестность точки A_{p+1} . Интегральные кривые, выходящие при $\varepsilon \rightarrow 0$ с горизонтальным наклоном из окрестности линии $L_{(2)}^\circ$ между точками B_p и B_{p+1} (поле перед фронтом ударной волны удовлетворяет неравенству $E_{bp} < E_I < E_{bp+1}$), идут с горизонтальным наклоном до изоклины $L_{(1)p+1}^\circ$, затем вдоль нее и пересекают изоклину $L_{(2)}^\circ$ в окрестности точки A_{p+1} . Для замыкания системы уравнений на фронте ударной волны и для вычисления интенсивности объемного заряда нужно воспользоваться уравнениями (4.1).

Ниже интегральной кривой III лежат интегральные кривые, описывающие структуру ударных волн с непрерывным электрическим полем на фронте волны ($E_m < E_I < E_{ap}$).

Между линиями I и III лежат интегральные кривые, описывающие структуру ударных волн, у которых перед фронтом волны параметры связаны соотношением (4.2). Все эти интегральные кривые выходят из окрестности точки B_p и идут вначале вдоль изоклины $L_{(1)p}^\circ$. Отметим, что интегральные кривые, лежащие между линиями I и II, описывают структуру ударных волн, у которых перед фронтом волны параметры среды удовлетворяют уравнению $u_I + b_p E_I^2 = 0$, а за фронтом — соотношению $u_{II} + b_{p+1} E_{II} = 0$. Перед фронтом ударной волны скорость сверхзвуковая, за фронтом волны — дозвуковая. Внутри структуры таких ударных волн распределение плотности объемного заряда имеет два максимума. Первый максимум распределения плотности объемного заряда возникает за счет возрастания плотности заряда q_p (плотности зарядов q_i , $i \neq p$ меняются слабо), второй — возникает за счет возрастания плотности заряда q_{p+1} (плотности зарядов q_i , $i \neq p + 1$ меняются слабо). Такого типа ударные волны возможны лишь в электрогидродинамике многофазных сред и невозможны в электрогидродинамике с заряженными частицами одного сорта. Среди интегральных кривых, выходящих из малой окрестности точки B_p с наклоном, равным наклону изоклины $L_{(1)p}^\circ$, имеется множество интегральных кривых, которые идут вдоль изоклины $L_{(1)p}^\circ$ до точки A_p , а затем вдоль изоклины $L_{(2)}^\circ$. Такие интегральные кривые описывают структуру ударных волн, у которых параметры перед и за фронтом волны связаны соотношением $u_l^* + b_p E_l^{*2} = 0$, $l = I, II$, скорость за фронтом волны (как и перед волной) сверхзвуковая и равна большему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{ap}) = 0$. Отметим, что существует структура волны, у которой скорость за фронтом волны дозвуковая и равна меньшему корню уравне-

ния $L_{(2)}(u, E_{ap}) = 0$; поле за фронтом волны $E_{II} = E_{ap}$, а перед фронтом волны удовлетворяет соотношению (4.2). Интегральные кривые, расположенные между линиями II и III, описывают структуру ударных волн, у которых перед фронтом параметры связаны соотношением (4.2). Для замыкания системы соотношений на разрывах, структура которых описывается такими интегральными кривыми, необходимо задавать один из параметров за фронтом волны; при этом поле должно задаваться в интервале $E_{ap} < E_{II} < E_{ap+1}$.

Если перед фронтом волны $E_{cp+1} \leq E_I \leq E_{cp}$, то структуры ударной волны не существует.

В случае, когда $E_{ap} \geq E_{ap+1}$, рассмотрение ведется аналогично. При этом за фронтом волны параметры связаны соотношением (4.1), когда $E_{bp} < E_I < E_{bp+1}$, $E_{ap+1} \leq E_I < E_{ap}$; поле на фронте волны непрерывно, когда $E_m < E_I \leq E_{ap+1}$ и т. д.

Обратимся теперь к случаю, когда $E_{ap+1} > E_{bp}$. Пусть поле перед фронтом волны удовлетворяет неравенствам $E_{ap+1} < E_I < E_{bp+1}$. Тогда на фронте ударной волны электрическое поле терпит разрыв, параметры за фронтом волны удовлетворяют первому соотношению (4.1). Если за фронтом ударной волны поле удовлетворяет неравенствам $E_{ap} \leq E_{II} < E_{bp}$, параметры перед фронтом волны связаны соотношением (4.2), при этом на фронте ударной волны образуется поверхностный заряд. В случае, когда выполняется одно из следующих неравенств;

$$E_{bp} < E_I \leq E_{ap+1}, E_{bp} \leq E_{II} < E_{ap+1}, E_I < E_{ap}$$

поле на фронте ударной волны непрерывно, и интенсивность поверхностного заряда равна нулю. Существует структура ударной волны, у которой перед и за фронтом ударной волны выполняются соотношения $E_l^* + b_p u_l^* = 0$, $l = I, II$. Скорость за фронтом волны (как и перед волной) сверхзвуковая и равна большему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{ap}) = 0$. Отметим, что существует структура волны, у которой скорость за фронтом волны дозвуковая и равна меньшему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{ap}) = 0$. Поле за фронтом волны $E_{II} = E_{ap}$, а перед фронтом волны удовлетворяет соотношению (4.2). Если $E_{cp+1} \leq E_I \leq E_{cp}$, то структуры ударной волны не существует.

Пусть изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$ имеют три сверхзвуковые точки пересечения, а изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ пересекаются в единственной точке A_{p+1} , находящейся в дозвуковой области. В этом случае для нахождения поверхностного заряда можно использовать результаты п. 4.2, заменив в неравенствах $E_{bp} < E_I < E_{bp+1}$, $E_{ap+1} < E_I < E_{bp+1}$ величину E_{bp+1} на E_{cp} .

Рассмотрим случай, когда изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$ пересекаются в единственной сверхзвуковой точке A_p , а точка пересечения изоклин $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ — A_{p+1} находится в дозвуковой области. Расположение изоклин отличается от представленного на фиг. 4 тем, что сверхзвуковая ветвь изоклины $L_{(2)}^\circ$ пересекает изоклину $L_{(1)p}^\circ$ в точке A_p , а дальше идет всюду ниже последней. Предположим, что перед фронтом волны поле удовлетворяет неравенствам $E_I < E_{ap}$, если $E_{ap} \leq E_{ap+1}$, или $E_I \leq E_{ap+1}$, если $E_{ap} > E_{ap+1}$. Интегральные кривые, на которых может лежать выбранная величина электрического поля, описывают структуру ударной волны с непрерывным полем на фронте волны. Пусть поле перед фронтом волны удовлетворяет неравенствам $E_{ap+1} < E_I < E_{ap}$, когда $E_{ap} > E_{ap+1}$. Интегральные кривые, на которых может лежать выбранная величина электрического поля, описывают структуру ударной волны с разрывом электрического поля. За фронтом волны поле должно удовлетворять первому соотношению (4.1). Других ударных волн, имеющих структуру, в этом случае не существует.

4.3. Рассмотрим случай, когда изоклина $L_{(2)}^\circ$ имеет три точки пересечения A_p, B_p, C_p и $A_{p+1}, B_{p+1}, C_{p+1}$ с изоклинами $L_{(1)p}^\circ, L_{(1)p+1}^\circ$ соответственно, и все три точки пересечения лежат в сверхзвуковой области (фиг. 5). Среди

интегральных кривых, выходящих из малой окрестности точки B_p с наклоном, равным наклону изоклины $L_{(1)p}^\circ$, есть интегральные кривые, которые идут вдоль изоклины $L_{(1)p}^\circ$ до точки A_p , а затем вдоль изоклины $L_{(2)}^\circ$. Такие интегральные кривые описывают структуру ударных волн, у которых параметры перед и за фронтом волны связаны соотношениями $u_l^* + b_p E_l^* = 0$, $l = I, II$. Скорость газа за фронтом волны (как и перед волной) сверхзвуковая и равна большему корню уравнения $L_{(2)}(u, E_{ap}) = 0$. Других интегральных кривых, описывающих структуру ударной волны, нет. В самом деле, интегральные кривые, пересекающие изоклину $L_{(2)}^\circ$ в окрестности точки A_{p+1} , нигде не идут вдоль изоклины. Другими словами, невозможно соединить невязкое течение перед ударной волной, которому соответствует отрезок $B_p B_{p+1}$ изоклины $L_{(2)}^\circ$, с каким-либо невязким течением, соответствующим состоянию за ударной волной.

Аналогичные выводы можно сделать, когда изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p+1}^\circ$ имеют единственную сверхзвуковую точку пересечения A_{p+1} , а изоклины $L_{(2)}^\circ$ и $L_{(1)p}^\circ$ пересекаются в трех точках A_p, B_p, C_p , находящихся в сверхзвуковой области. И в этом случае имеет структуру ударная волна, у которой скорости за и перед фронтом сверхзвуковые.

В случае, когда изоклина $L_{(2)}^\circ$ пересекается в единственной сверхзвуковой точке с изоклиной $L_{(1)p+1}^\circ$ и имеет единственную точку пересечения с изоклиной $L_{(1)p}^\circ$, лежащей в сверхзвуковой области, нет интегральных кривых, описывающих структуру ударной волны.

Поступила 18 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Гогосов В. В., Полянский В. А. Структура электрогидродинамических ударных волн. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
2. Гогосов В. В., Фарбер Н. Л. Уравнения электрогидродинамики многофазных сред. Об одномерных течениях, разрывных решениях и затухании слабых волн. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 5.
3. Гогосов В. В., Полянский В. А. Разрывы в электрогидродинамике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 5.
4. Гогосов В. В., Григорьева О. Н., Налетова В. А., Фарбер Н. Л. Структура электрогидродинамических ударных волн в трехфазных смесях, содержащих два сорта заряженных частиц. Об одномерных электрогидродинамических течениях с поверхностями разрывов. Магнитная гидродинамика, 1974, № 1.
5. Гогосов В. В., Налетова В. А., Фарбер Н. Л. О структуре ударных волн в электрогидродинамике многофазных сред. Доклад на III Всесоюзной научно-технической конференции по прикладной аэромеханике. Киев, 1973.
6. Гогосов В. В. Одномерные электрогидродинамические течения с переменным коэффициентом подвижности. Скачки испарения и конденсации. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.