Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

РЕЗОНАНСНЫЕ РЕЖИМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ, БЛИЗКИХ К КОНСЕРВАТИВНЫМ

Ю. В. Михлин

(Днепропетровск)

Методом Раушера строятся установившиеся резонансные решения неавтономных многомерных систем, близких к консервативным. Предполагается, что порождающая система имеет аналитический потенциал и допускает нормальные колебания с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве.

Как известно, вынужденные колебания систем с одной степенью свободы в резонансной области близки к собственным колебаниям невозмущенных консервативных систем [1]. Представляется возможность обобщить этот результат на многомерный случай, используя понятие о нормальных формах колебаний консервативных нелинейных систем [2, 3].

Путем подбора специальных типов внешних воздействий было показано [4], что резонансные режимы обладают свойствами нормальных колебаний консервативных систем. Для достаточно общих типов внешних периодических возмущений квазилинейных систем, близких к системам Ляпунова, периодические режимы исчерпывающим образом изучены И. Г. Малкиным [5].

1. Рассмотрим уравнения

$$x_s^{\cdot\cdot} = f_s(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \varepsilon g_s(x_1, x_2, \ldots, x_n, t), \quad s = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1}$$

Здесь ε — малый параметр, f_s, g_s — аналитические функции $x_1, x_2, \ldots, x_n$; g_s — периодические функции t периода T.

Предполагается, что невозмущенная система консервативна и допускает нормальные колебания с прямолинейными траекториями в конфигурационном пространстве: $x_{j0} = C_j x_n$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$, $C_j = \text{const}$. Пусть также при некоторой амплитуде период собственных нормальных колебаний равен T.

Рассмотрение ведется в декартовой системе координат, в которой все $C_j = 0$, $x_{j0} = 0$. В этой системе обозначим

$$x_n \equiv x, \; f_n \equiv f, \; g_n \equiv g$$

Разыскивается T-периодическое решение системы (1.1) такое, что $x^{\cdot} = x^{\cdot}(x)$ и $t = t(x)$ — однозначные функции x для главных значений t, заключенных в интервале $[0, T/2]$.

Если такое решение существует, то имеют смысл уравнения для определения траектории $x_s = x_s(x)$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$

$$\frac{d^2 x_s}{dx^2}[x^{\cdot}(x)]^2 + \frac{dx_s}{dx}[f(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)) + \varepsilon g(x, x_1(x), \ldots, t(x))] = \\ = f_s(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)) + \varepsilon\, g_s(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x), t(x)) \tag{1.2}$$

Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x^\cdot, t$ будем искать в виде степенных рядов по ε и x

$$x_s = \sum_{l=0}^{\infty} x_{sl}(x)\,\varepsilon^l, \quad x^\cdot = \sum_{l=0}^{\infty} x_l^\cdot(x)\,\varepsilon^l, \quad t = \sum_{l=0}^{\infty} t_l(x)\,\varepsilon^l \tag{1.3}$$

Граничные условия выберем такими же, как и для нормальных колебаний консервативных систем [3].

Функция $x^\cdot(x)$ разыскивается в следующей форме:

$$x^{\cdot 2} = 2\,[h - F(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)) - \varepsilon G(x, x_1(x), \ldots, t(x))] \times \tag{1.4}$$
$$\times \left[1 + \sum_{j=1}^{n-1} \left(\frac{dx_j(x)}{dx}\right)^2\right]^{-1}$$

Здесь F — потенциал невозмущенной консервативной системы, постоянная h и функция G определяются в ходе решения задачи.

Должны существовать такие значения $x = X_1$ и $x = X_2$, при которых $x^\cdot = 0$.

Учитывая (1.4), получим, что при амплитудных значениях $x = X_{1,2}$ выполняются соотношения

$$h = F(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots, x_{n-1}(X_{1,2})) + \varepsilon\, G(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots \tag{1.5}$$
$$\ldots, t(X_{1,2}))$$

Условие $x^\cdot(X_{1,2}) = 0$ совместно с уравнениями (1.2) приводит к другим соотношениям ($s = 1, 2, \ldots, n-1$)

$$\left.\frac{dx_s}{dx}\right|_{x=X_{1,2}} \cdot [f(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots, x_{n-1}(X_{1,2})) + \tag{1.6}$$
$$+ \varepsilon g(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots, t(X_{1,2}))] = f_s(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots,$$
$$\ldots, x_{n-1}(X_{1,2})) + \varepsilon g_s(X_{1,2}, x_1(X_{1,2}), \ldots, t(X_{1,2}))$$

В консервативной системе условия (1.6) означают, что траектория ортогональна максимальной изоэнергетической поверхности (1.5).

Представление (1.4) в консервативной системе непосредственно следует из интеграла энергии. Поскольку исходная система (1.1) неконсервативна, условия (1.4)—(1.6) справедливы только для установившихся резонансных колебаний.

Если траектория периодического режима определена, то из уравнения

$$x^{\cdot\cdot} = f(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x)) + \varepsilon\, g(x, x_1(x), \ldots, x_{n-1}(x), t(x))$$

при начальных условиях $x(0) = X_1$, $x^\cdot(0) = 0$ можно получить квадратуру ($x \leqslant X_2$)

$$t = I(x), \quad I(x) = \int_{X_1}^{x} 2^{-1/2}\,[h - F(\xi, x_1(\xi), \ldots, x_{n-1}(\xi)) - \tag{1.7}$$
$$- \varepsilon G(\xi, x_1(\xi), \ldots, x_{n-1}(\xi), \; t(\xi))]^{-1/2}\, d\xi$$

Отсюда следует, что решение должно удовлетворять условию периодичности

(1.8) $\qquad T = 2I\,(X_2)$

Выберем в качестве порождающего нормальное решение невозмущенной консервативной системы периода $T: x = x\,(t)$, $x_{j^0} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n - 1)$. Амплитуды порождающего решения X_{10}, X_{20} и постоянную h_0 можно найти из уравнений

(1.9) $$T = 2\int\limits_{X_{10}}^{X_{20}} 2^{-1/2}\,[h - F\,(\xi, 0, \ldots, 0)]^{-1/2}\,d\xi$$

(1.10) $$h_0 = F\,(X_{10},\,_{20},\ 0, \ldots, 0)$$

Предположим, что

а) корень h_0 уравнения (1.9) и корни X_{10}, X_{20} уравнения (1.10) некратные;

б) определители $\Delta_m \neq 0$, $m = 0, 1, 2, \ldots$, где ($\delta_s{}^j$ — символы Кронекера)

(1.11) $$\Delta_m = \Big|\delta_s{}^j m\,(m-1)\,\frac{2\cdot f^{(r)}\,(1, 0, \ldots, 0)}{r+1} + \delta_s{}^j m f^{(r)}\,(1, 0, \ldots, 0) - \\ - \frac{\partial f_s^{(r)}}{\partial x_j}\,(1, 0, \ldots, 0)\Big|$$

функции $f^{(r)}$, $f_s{}^{(r)}$ содержат лишь члены r-й степени по $x, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$.

В квазилинейном случае ($r = 1$) ограничение (1.11) соответствует исключению из рассмотрения кратных частот в порождающей системе. Такое условие принято при исследовании систем Ляпунова и систем, близких к системам Ляпунова [5].

Функцию $t_0 = t_0\,(x)$ определим квадратурой

$$t_0 = \int\limits_{X_{10}}^{x} 2^{-1/2}\,[h_0 - F\,(\xi, 0, \ldots, 0)]^{-1/2}\,d\xi, \qquad x \leqslant X_{20}$$

Если справедливо предположение а), то для главных значений t_0 функция $t_0 = t_0\,(x)$ является однозначной аналитической функцией x [1,6].

2. Предположим, что $x_{sl}\,(x)$, $t_l\,(x)$, $x_l{}^*\,(x)$, $l < k$ определены. В k-м приближении по ε получим уравнения

(2.1) $$2\,\frac{d^2x_{sk}}{dx^2}\,[h_0 - F\,(x, 0, \ldots, 0)] + \frac{dx_{sk}}{dx}\,f\,(x, 0, \ldots, 0) = \\ = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_s}{\partial x_j}\,(x, 0, \ldots, 0)\,x_{jk} + N_{sk}\,(x), \quad s = 1, 2, \ldots, n-1$$

где N_{sk} — известные функции, зависящие от $x_{sl}\,(x)$, $t_l\,(x)$ $(l < k)$.

Решение (2.1) представим в виде степенных рядов по x

(2.2) $$x_{sk} = \sum_{j=0}^{\infty} A_{sj}^{(k)} x^j$$

Подставляя ряды (2.2) в уравнения (2.1), обнаружим, что коэффициенты $A_{sj}^{(k)}$ и $A_{sj+r}^{(k)}$ выражаются один через другой взаимно-однозначно. Все величины $A_{sj}^{(k)}$ можно выразить через $2(n-1)$ коэффициентов $\{A_{s0}^{(k)}\}$ и $\{A_{s1}^{(k)}\}$ $(s = 1, 2, \ldots, n-1)$. Неизвестные коэффициенты однозначно получаются в виде степенных рядов по $X_{1,2}$ из граничных условий (1.6), соответствующих k-му приближению

$$
\begin{aligned}
(2.3) \qquad & \left.\frac{dx_{sk}}{dx}\right|_{x=X_{1,2}} \cdot f(X_{1,2}, 0, \ldots, 0) = \\
& = \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial f_s}{\partial x_j}(X_{1,2}, 0, \ldots, 0)\, x_{jk}(X_{1,2}) + N_{sk}(X_{1,2})
\end{aligned}
$$

Функция G в этом приближении определится из равенства

$$
\frac{dG}{dx} = g\left(x, \sum_{l=0}^{k-1} x_{1l}\varepsilon^l, \ldots, \sum_{l=0}^{k-1} x_{n-1l}\varepsilon^l\right)
$$

причём постоянную интегрирования следует отбросить.

Выделив теперь в (1.4) и (1.7) члены при k-й степени ε, найдем $t_k = t_k(x)$ и $x_k^\bullet = x_k^\bullet(x)$. Так как корни уравнений (1.9) и (1.10) некратные, то существует такое значение $\varepsilon = \varepsilon_0$, что при всех $\varepsilon < \varepsilon_0$ корни уравнений (1.5) и (1.8) будут некратными в k-м и следующих приближениях по ε [7]. Тогда из (1.4) и (1.7) степенные ряды $t_k = t_k(x)$ и $x_k^\bullet = x_k^\bullet(x)$ определятся однозначно.

Построенная таким образом траектория $x_s = x_s(x)$ зависит от трех параметров: h, X_1 и X_2, которые связаны уравнениями (1.5) и (1.8). Вследствие предположения а) можно однозначно получить из (1.6) и (1.8) неизвестные величины в виде степенных рядов по ε [7], таких, что при $\varepsilon = 0$ $h = h_0$, $X_1 = X_{10}$ и $X_2 = X_{20}$.

В результате применения метода Раушера на каждом шаге построения исходная система (1.1) сводится к автономной. Метод решения аналогичен примененному в работе [3], где рассмотрены траектории периодических решений консервативных систем, близкие к прямолинейным нормальным формам колебаний. Следовательно, сходимость рядов (1.3) и (2.2) можно доказать в некоторой окрестности начала координат таким же образом, как это было сделано в [3].

Итак, каждой нормальной форме колебаний невозмущенной консервативной системы при выполнении условий а) и б) соответствует единственное резонансное периодическое решение неавтономной системы (1.1), близкое к порождающему решению и удовлетворяющее граничным условиям (1.5), (1.6). На траектории установившегося вынужденного режима неавтономная система (1.1) ведет себя подобно консервативной.

Заметим, что порождающие системы не могут быть линейными, так как для последних в силу свойства изохронности все корни уравнения периодичности (1.9) кратные. Этот результат подчеркивает важность изучения нормальных колебаний нелинейных консервативных систем.

3. В качестве примера применения полученных результатов рассмотрим определение резонансных режимов системы уравнений

$$
\begin{aligned}
&x^{\cdot\cdot} + 4x + 2x^3 + 2.4\,(x - y) + 2\,(x - y)^3 = \varepsilon \operatorname{cn} \gamma t \\
&y^{\cdot\cdot} + 4y + 2y^3 + 2.4\,(y - x) + 2\,(y - x)^3 = 0
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

К такого типа уравнениям может приводить, например, задача исследования висячих конструкций, основные рабочие элементы которых с точки зрения расчета представляют собой гибкие нити, способные работать только на растяжение.

Ограничимся рассмотрением «синфазной» формы установившихся колебаний в (3.1), близких к нормальным колебаниям невозмущенной консервативной симметричной системы. Решение нулевого приближения имеет вид $y_0 = x$. Амплитуду колебаний в нулевом приближении выберем таким образом, чтобы период собственных колебаний совпадал с периодом возмущающего воздействия.

Для построения траектории искомого решения в первом приближении по ε используем уравнения, соответствующие (2.1)

$$
\begin{aligned}
&\frac{d^2y_1}{dx^2}\,[h_0 - (2x^2 + 0.5x^4)] + \frac{dy_1}{dx}\,[-4x - 2x^3] + \frac{x}{X_0} + \\
&+ 2.4y_1 = -6.4y_1 - 6x^2y_1
\end{aligned} \tag{3.2}
$$

где X_0 — амплитудное значение x в нулевом приближении, h_0 — постоянная энергии невозмущенной системы. Решение уравнения (3.2) ищем в форме ряда (2.2), удовлетворяя граничным условиям, соответствующим (2.3).

При численном расчете принимаем $\gamma = 2.5$, $\varepsilon = 1$. В порождающей системе решение с частотой $\omega = 2.5$ реализуется при амплитуде $x\,(0) \equiv X = 1.225$.

Сохраним в (2.2) члены не выше пятой степени x. Тогда, удовлетворяя уравнениям (3.2) и граничным условиям в форме (2.3), получим

$$y_1 \approx -0.08\,x - 0.02\,x^3 + 0.001\,x^5$$

С учетом нулевого и первого приближений получим, что форма колебаний имеет вид

$$y \approx 0.92\,x - 0.02\,x^3 + 0.001\,x^5$$

Из условий периодичности, соответствующих (1.8), найдем, что синфазная форма резонансных колебаний реализуется при следующих начальных условиях:

$$x^{\cdot}\,(0) = 0,\ x\,(0) \equiv X = 1.38,\ y^{\cdot}\,(0) = 0,\ y\,(0) \equiv Y = 1.24$$

Для оценки точности полученного асимптотического решения было проведено исследование системы (3.1) на аналоговой машине МН-7. Амплитуды периодического режима с частотой внешнего воздействия равны $X = 1.42$, $Y = 1.34$.

Сравнение асимптотического резонансного решения и решения, полученного на аналоговой машине, показывает, что учет нулевого и первого приближений обеспечивает приемлемую точность расчета.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Стокер Дж. Дж.* Нелинейные колебания в механических и электрических системах. М., Изд-во иностр. лит., 1953.
2. *Rosenberg R. M., Hsu C. S.* On the geometrization of normal vibrations of nonlinear systems having many degrees of freedom. Тр. Междунар. Симпоз. по нелинейным колебаниям, т. 1. Аналитические методы теории нелинейных колебаний. Киев, Изд-во АН УССР, 1963.
3. *Маневич Л. И., Михлин Ю. В.* О периодических решениях, близких к прямолинейным нормальным формам колебаний. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
4. *Rosenberg R. M.* Steady-state forced vibrations. Internat. J. of non-linear Mech., 1966, vol. 1, No. 2.
5. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. М., Гостехиздат, 1956.
6. *Уинтнер А.* Аналитические основы небесной механики. М., «Наука», 1967.
7. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления, т. 2. М., Физматгиз, 1962.