Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 531.31

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ПРЕЦЕССИОННЫХ ДВИЖЕНИЙ ОТНОСИТЕЛЬНО ВЕРТИКАЛИ ТЯЖЕЛОГО ТВЕРДОГО ТЕЛА С ОДНОЙ НЕПОДВИЖНОЙ ТОЧКОЙ

Г. В. Горр

(Донецк)

Доказываются новые свойства прецессионных движений относительно вертикали тежелого твердого тела, имеющего неподвижную точку. В частности, показанó, что полурегулярные прецессии возможны только в решении Гесса, а в случае, когда не постоянны скорости прецессии и собственного вращения, постоянная интеграла момента количества движения равна нулю.

1. Постановка задачи. *Определение* [1-3]. Прецессионными движениями твердого тела с одной неподвижной точкой называются движения, при которых угол между двумя прямыми, одна из которых фиксирована в теле, а другая — в неподвижном пространстве, остается постоянным.

Пусть $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$ — единичные векторы, фиксированные соответственно в теле и в пространстве, и ϑ — угол между ними. Тогда движения тела—прецессии, если $\vartheta = \text{const}$. Вводя в рассмотрение углы Эйлера ϑ, φ, ψ, получим для вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ выражение

$$\boldsymbol{\omega} = \varphi^{\cdot}\mathbf{k} + \psi^{\cdot}\boldsymbol{\nu}^* \tag{1.1}$$

показывающее, что вектор $\boldsymbol{\omega}$ лежит во все время движения в плоскости, проходящей через векторы $\mathbf{k}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$.

Если в формуле (1.1) $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ постоянны, то такие движения тела называют регулярными прецессиями. Движения в случае $\psi^{\cdot} = \text{const}$—полурегулярные прецессии [2].

Аппельрот [3] изучал прецессии относительно вертикали ($\boldsymbol{\nu}^*$ совпадает с единичным вектором $\boldsymbol{\nu}$ направления силы тяжести) гироскопов, эллипсоид инерции которых в неподвижной точке есть эллипсоид вращения. Он показал, что прецессии таких гироскопов невозможны, если центр тяжести не лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции.

В дальнейшем прецессионным движениям были посвящены в основном работы итальянских ученых. Гриоли [1] рассмотрел регулярные прецессии относительно наклонной оси (вектор $\boldsymbol{\nu}^*$ не совпадает с вектором $\boldsymbol{\nu}$). Принимая дополнительное условие $\varphi = \psi$, он нашел новое решение, характеризующееся условиями $\theta = \pi / 2$, $\omega_3 = \text{const}$. Центр тяжести гироскопа Гриоли лежит на перпендикуляре ($\mathbf{k}$) к круговому сечению эллипсоида инерции. Брессан [4], исследуя прецессионные движения в решении Гесса, показал, что в этом решении существуют только прецессии относительно вертикали ν и относительно горизонтальной оси $\boldsymbol{\nu}^*$ (угол между векторами $\boldsymbol{\nu}$ и $\boldsymbol{\nu}^*$ равен $\pi / 2$). Отметим, что постоянная интеграла момента количества движения в первом случае отлична от нуля, во втором — равна нулю.

Примеры прецессионных движений, указанные итальянскими учеными в задаче о движении тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, не являются исчерпывающими, так как анализ частных решений в этой задаче показывает, что, например, решение А. И. Докшевича [5] описывает прецессионное движение относительно вертикали. Поэтому представляет интерес получить общие свойства прецессий и указать все случаи интегрируемости, которые характеризуются прецессионным движением.

Рассмотрим прецессии тяжелого твердого тела относительно вертикали $\mathbf{v}$. Свяжем с телом правую систему координат таким образом, чтобы третья координатная ось проходила через вектор $\mathbf{k}$. Обозначим через ν_1, ν_2, ν_3 компоненты единичного вектора $\mathbf{v}$ и через e_1, e_2, e_3 компоненты единичного вектора, направленного из неподвижной точки в центр тяжести тела. Поворотом подвижной системы координат вокруг третьей оси добьемся равенства $e_2 = 0$, которое не ограничивает общности задачи. Принимая за переменные задачи углы Эйлера, из (1.1) найдем ($\mathbf{v}^* = \mathbf{v}$)

$$\nu_1 = \sin\vartheta \sin\varphi, \quad \nu_2 = \sin\vartheta\cos\varphi, \quad \nu_3 = \cos\vartheta$$
$$\omega_1 = \psi^\cdot \sin\vartheta\sin\varphi, \quad \omega_2 = \psi^\cdot\sin\vartheta\cos\varphi, \quad \omega_3 = \psi^\cdot\cos\vartheta + \varphi^\cdot$$

Используя обозначения работы [6], запишем уравнения движения твердого тела в случае прецессий $\vartheta^\cdot = 0$ в виде

$$\begin{aligned}
(1.2)\qquad & \psi^{\cdot\cdot}(a_1\sin\varphi + a_2\cos\varphi + a_3) + A_{13}\varphi^{\cdot\cdot} - A_{23}\varphi^{\cdot 2} + \psi^\cdot\varphi^\cdot \times \\
& \times (a_4\cos\varphi - 2a_2\sin\varphi - 2a_5) + \psi^{\cdot 2}(a_6\cos 2\varphi + \\
& + a_7\sin 2\varphi + a_8\cos\varphi - a_9\sin\varphi + a_{10}) + a_{11}\cos\varphi = 0 \\
& \psi^{\cdot\cdot}(b_1\cos\varphi + a_2\sin\varphi + a_5) + A_{23}\varphi^{\cdot\cdot} + A_{13}\varphi^{\cdot 2} + \\
& + \psi^\cdot\varphi^\cdot(2a_2\cos\varphi + b_2\sin\varphi + 2a_3) + \psi^{\cdot 2}(a_7\cos 2\varphi - \\
& - a_6\sin 2\varphi + a_9\cos\varphi + b_3\sin\varphi + b_4) - a_{11}\sin\varphi + b_5 = 0 \\
& \psi^{\cdot\cdot}(c_0\cos\varphi + c_1\sin\varphi + c_2) + A_{33}\varphi^{\cdot\cdot} - (c_3\cos 2\varphi + c_4\sin 2\varphi + \\
& + c_5\cos\varphi - c_6\sin\varphi)\psi^{\cdot 2} - c_7\cos\varphi = 0
\end{aligned}$$

Здесь a_i, b_i, c_i — постоянные. (Γ — произведение веса тела и расстояния от неподвижной точки до центра тяжести, A_{ij} — компоненты тензора инерции det A).

$$\begin{aligned}
(1.3)\qquad & a_1 = A_{11}\sin\vartheta, \quad a_2 = A_{12}\sin\vartheta, \quad a_3 = A_{13}\cos\vartheta \\
& a_4 = (A_{11} - A_{22} + A_{33})\sin\vartheta, \quad a_5 = A_{23}\cos\vartheta, \\
& a_6 = {}^1/_2 A_{23}\sin^2\vartheta \\
& a_7 = {}^1/_2 A_{13}\sin^2\vartheta, \; a_8 = (A_{33} - A_{22})\sin\vartheta\cos\vartheta \\
& a_9 = A_{12}\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad a_{10} = {}^1/_2 A_{23}(\sin^2\vartheta - 2\cos^2\vartheta), \\
& a_{11} = e_3\Gamma\sin\vartheta \\
& b_1 = A_{22}\sin\vartheta, \quad b_2 = (A_{11} - A_{22} - A_{33})\sin\vartheta, \\
& b_3 = (A_{11} - A_{33})\sin\vartheta\cos\vartheta \\
& b_4 = {}^1/_2 A_{13}(2\cos^2\vartheta - \sin^2\vartheta), \quad b_5 = e_1\Gamma\cos\vartheta \\
& c_0 = A_{23}\sin\vartheta, \quad c_1 = A_{13}\sin\vartheta, \quad c_2 = A_{33}\cos\vartheta, \\
& c_3 = A_{12}\sin^2\vartheta \\
& c_4 = {}^1/_2(A_{11} - A_{22})\sin^2\vartheta, \quad c_5 = A_{13}\sin\vartheta\cos\vartheta, \\
& c_6 = A_{23}\sin\vartheta\cos\vartheta, \quad c_7 = e_1\Gamma\sin\vartheta
\end{aligned}$$

Интегралы уравнений (1.2)

$$\varphi^{\cdot}\Phi_1 - \psi^{\cdot}\Phi_2 = k \tag{1.4}$$

$$A_{33}\varphi^{\cdot 2} + 2\varphi^{\cdot}\psi^{\cdot}\,\Phi_1 - \psi^{\cdot 2}\Phi_2 - 2\,(c_7 \sin\varphi + E_1) = 0 \tag{1.5}$$

Здесь

$$\begin{gathered}\Phi_1 = c_0 \cos\varphi + c_1 \sin\varphi + c_2\\ \Phi_2 = c_4 \cos 2\varphi - c_3 \sin 2\varphi - 2c_5 \sin\varphi - 2c_6 \cos\varphi - c_8\\ c_8 = A_{33}\cos^2\vartheta + {}^1/_2\,(A_{11} + A_{22})\sin^2\vartheta, \quad E_1 = E + e_3\Gamma\cos\vartheta\end{gathered} \tag{1.6}$$

Через k и E обозначены соответственно постоянные интегралов момента количества движения и энергии.

2. Случаи $\varphi^{\cdot} = \mathrm{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$ и $\varphi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$, $\psi^{\cdot} = \mathrm{const}$. Из интегралов (1.4), (1.5), найдем зависимость $\psi^{\cdot}$ и $\varphi^{\cdot}$ от переменной φ

$$\psi^{\cdot} = \frac{1}{\Phi_2}(\Phi_1\varphi^{\cdot} - k) \tag{2.1}$$

$$\varphi^{\cdot 2} = \frac{1}{A_{33}\Phi_2 + \Phi_1^2}\,[2(c_7 \sin\varphi + E_1)\,\Phi_2 + k^2] \tag{2.2}$$

Представим

$$\begin{gathered}A_{33}\Phi_2 + \Phi_1^2 = m_1 \cos 2\varphi + m_2 \sin 2\varphi + m_3\\ m_1 = {}^1/_2\,[A_{33}(A_{11} - A_{22}) + A_{23}^2 - A_{13}^2]\sin^2\vartheta\\ m_2 = (A_{23}A_{13} - A_{33}A_{12})\sin^2\vartheta\\ m_3 = {}^1/_2\,[A_{13}^2 + A_{23}^2 - A_{33}(A_{11} + A_{22})]\sin^2\vartheta\end{gathered}$$

Знаменатели в (2.1), (2.2), не обращаются в нуль тождественно по переменной φ, и следовательно, эти формулы решают задачу интегрирования уравнений (1.2) при условии их совместности. Для отыскания достаточных условий существования прецессий необходимо потребовать, чтобы значения $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ (2.1), (2.2) удовлетворяли уравнениям (1.2). При подстановке их в последнее уравнение (1.2) приходим к тождеству. Если подставить (2.1), (2.2) в уравнение, полученное сложением первого и второго уравнений (1.2), умноженных соответственно на $\sin\varphi$ и $\cos\varphi$, то опять получим тождество. Поэтому достаточно подставить $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ лишь в первое уравнение (1.2).

Внося $\psi^{\cdot}$ из (2.1) в первое уравнение (1.2), получим

$$\begin{gathered}\Phi_2\,[(a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi + a_3)\,\Phi_1 + A_{13}\Phi_2]\,\varphi^{\cdot\cdot} +\\ + \varphi^{\cdot 2}\,\{(a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi + a_3)\,[\Phi_2\,(c_1 \cos\varphi - c_0 \sin\varphi) +\\ + 2\Phi_1\Phi_3] - A_{23}\Phi_2^2 + \Phi_1\Phi_2\,(a_4 \cos\varphi - 2a_2 \sin\varphi - 2a_5) +\\ + \Phi_1^2\,(a_6 \cos 2\varphi + a_7 \sin 2\varphi + a_8 \cos\varphi - a_9 \sin\varphi + a_{10})\} +\\ + a_{11}\Phi_2^2 \cos\varphi + k^2\,(a_6 \cos 2\varphi + a_7 \sin 2\varphi + a_8 \cos\varphi -\\ - a_9 \sin\varphi + a_{10}) = k\varphi^{\cdot}\,[2\Phi_3\,(a_1 \sin\varphi + a_2 \cos\varphi + a_3) +\\ + \Phi_2\,(a_4 \cos\varphi - 2a_2 \sin\varphi - 2a_5) + 2\Phi_1\,(a_6 \cos 2\varphi +\\ + a_7 \sin 2\varphi + a_8 \cos\varphi - a_9 \sin\varphi + a_{10})]\end{gathered} \tag{2.3}$$

где

$$\Phi_3 = c_3 \cos 2\varphi + c_4 \sin 2\varphi + c_5 \cos\varphi - c_6 \sin\varphi$$

Известно, что при постоянных $\varphi^{\cdot}$ и $\psi^{\cdot}$ имеет место только регулярная прецессия гироскопа Лагранжа. Рассмотрим случай $\varphi^{\cdot} = \text{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \text{const}$.

Теорема. 1 Прецессионные движения тяжелого твердого тела относительно вертикали в случае $\varphi^{\cdot} = \text{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \text{const}$ динамически невозможны.

Доказательство. Обратимся к уравнениям (2.2), (2.3). В силу $\varphi^{\cdot} = \text{const}$ эти уравнения должны быть тождествами. Приравнивая нулю коэффициенты при $\sin 3\varphi$ и $\cos 3\varphi$ в выражении (2.2) и коэффициенты при $\sin 5\varphi$ и $\cos 5\varphi$ в уравнении (2.3), найдем

$$e_1c_4 = 0, \quad e_1c_3 = 0, \quad e_3c_4 = 0, \quad e_3c_3 = 0.$$

Так как $e_1^2 + e_3^2 = 1$, то необходимо считать

$$c_3 = 0, \quad c_4 = 0 \tag{2.4}$$

или $A_{12} = 0$, $A_{11} = A_{22}$. Отождествляя по φ уравнение (2.2) и учитывая (2.4), получаем

$$\begin{gathered} m_1\varphi^{\cdot 2} - 2c_5c_7 = 0, \quad m_2\varphi^{\cdot 2} + 2c_6c_7 = 0, \quad E_1c_6 = 0 \\ 2E_1c_5 + c_7c_8 = 0, \quad m_3\varphi^{\cdot 2} + (2E_1c_8 + 2c_5c_7 - k^2) = 0 \end{gathered} \tag{2.5}$$

Пусть вначале $E_1 = 0$. Из четвертого уравнения (2.5) следует, что $c_7 = 0$ $(e_1 = 0)$. Первые два уравнения (2.5) дают равенства $m_1 = 0$, $m_2 = 0$ и, следовательно, из соотношений для m_1, m_2 вытекает, что $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$. Из формулы (2.1) следует, что $\psi^{\cdot} = \text{const}$.

Следовательно, $E_1 \neq 0$, $c_6 = A_{23}\cos\vartheta = 0$. Допущение $\cos\vartheta = 0$ приводит снова к равенствам $c_5 = 0$, $A_{13} = 0$, $A_{23} = 0$.

Пусть $A_{23} = 0$, $\cos\vartheta \neq 0$. Приравнивая нулю коэффициент при $\cos 4\varphi$ в уравнении (2.3), придем к равенству $A_{13} = 0$, откуда вновь следует $\psi^{\cdot} = \text{const}$. Теорема доказана.

Рассмотрим случай полурегулярной прецессии: $\psi^{\cdot} = \text{const}$.

Теорема 2. Полурегулярные прецессии тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, относительно вертикали имеют место только в решении Гесса.

Доказательство. Предполагая скорость прецессии постоянной, подставим значение $\varphi^{\cdot}$, найденное из (1.4), в уравнения (1.2) и (1.5). Требование того, чтобы полученные соотношения были тождествами по переменной φ приводит к условиям на параметры

$$\begin{gathered} e_1 = 0, \quad e_2 = 0, \quad e_3 = 1, \quad A_{12} = A_{23} = 0, \quad A_{13}^2 = A_{33}\times \\ \times(A_{11} - A_{22}) \\ \psi^{\cdot 2} = \frac{\Gamma}{A_{22}\cos\vartheta}, \quad k = A_{22}\psi^{\cdot}\sin^2\vartheta, \quad E = \frac{1}{2}A_{22}\psi^{\cdot 2}\sin^2\vartheta - e_3\Gamma\cos\vartheta \end{gathered} \tag{2.6}$$

Зависимость переменной φ от времени устанавливаем из (1.4)

$$\varphi^{\cdot} = -\frac{\psi^{\cdot}}{A_{33}}(A_{13}\sin\vartheta\sin\varphi + A_{33}\cos\vartheta)$$

Проекция кинетического момента на третью координатную ось несущую центр масс тела, равна $A_{13}\omega_1 + A_{33}\omega_3 = 0$. Полученное линейное инвариантное соотношение и условия (2.6) характеризуют частный случай решения Гесса.

В работе [7] эта теорема доказана для гиростата.

3. Скорости прецессии и собственного вращения не постоянны. Предположим теперь $\varphi^{\cdot} \neq \text{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \text{const}$.

Теорема 3. Необходимым условием существования прецессионных движений тяжелого твердого тела, имеющего неподвижную точку, в случае, когда скорости прецессии и собственного вращения не постоянны, является равенство $k = 0$.

Доказательство. Подставив $\varphi^{\cdot}$ из (2.2) в соотношение (2.3), получим уравнение следующего вида:

$$(3.1) \qquad \begin{aligned} &(\alpha_9 \cos 9\varphi + \alpha_9{}^* \sin 9\varphi + \ldots)^2 = \\ &= k^2 (c_4 c_7 \sin 3\varphi + c_3 c_7 \cos 3\varphi + \ldots) \times \\ &\times (m_1 \cos 2\varphi + m_2 \sin 2\varphi + m_3)^3 (\beta_3 \cos 3\varphi + \beta_3{}^* \sin 3\varphi + \ldots)^2 \end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что $\alpha_9 = 0$, $\alpha_9{}^* = 0$. Используя (1.3), (1.6), распишем эти равенства

$$(3.2) \qquad \begin{aligned} &e_1 [(\varkappa_1 - 2\varkappa_4)(c_3 m_2 + c_4 m_1) + (\varkappa_2 + 2\varkappa_3)(c_3 m_1 - c_4 m_2)] + \\ &+ 2e_3 [(c_3 m_2 + c_4 m_1)^2 - (c_3 m_1 - c_4 m_2)^2] = 0 \\ &e_1 [(\varkappa_2 + 2\varkappa_3)(c_3 m_2 + c_4 m_1) - (\varkappa_1 - 2\varkappa_4)(c_3 m_1 - c_4 m_2)] - \\ &- 4e_3 (c_3 m_2 + c_4 m_1)(c_3 m_1 - c_4 m_2) = 0 \end{aligned}$$

Здесь

$$(3.3) \qquad \begin{aligned} \varkappa_1 &= c_4 (c_0 a_2 - a_1 c_1 + 2 A_{13} c_4) + c_3 (c_0 a_1 + c_1 a_2 - 2 A_{13} c_3) \\ \varkappa_2 &= - c_3 (c_0 a_2 - a_1 c_1 + 2 A_{13} c_4) + c_4 (c_0 a_1 + c_1 a_2 - 2 A_{13} c_3) \\ \varkappa_3 &= (a_4 - a_1)(c_3 c_1 + c_0 c_4) - 2 A_{23} (c_4{}^2 - c_3{}^2) + a_2 (c_1 c_4 - \\ &- c_0 c_3) + a_6 (c_0{}^2 - c_1{}^2) - 2 a_7 c_0 c_1 \\ \varkappa_4 &= (a_4 - a_1)(c_1 c_4 - c_0 c_3) + 4 A_{23} c_3 c_4 - a_2 (c_0 c_4 + c_1 c_3) + \\ &+ a_7 (c_0{}^2 - c_1{}^2) + 2 a_6 c_0 c_1 \end{aligned}$$

В силу того, что $e_1{}^2 + e_3{}^2 = 1$, определитель уравнений (3.2) равен нулю. Это приводит к случаям

1°. $c_3 = 0$, $c_4 = 0$, 2°. $m_1 = 0$, $m_2 = 0$

3°. $(\varkappa_1 - 2\varkappa_4)(c_3 m_1 - c_4 m_2) + (\varkappa_2 + 2\varkappa_3)(c_3 m_2 + c_4 m_1) = 0$

Для случая 1° имеем

$$(3.4) \qquad A_{12} = 0, \; A_{11} = A_{22}$$

При условиях (3.4) равенства $\alpha_8 = 0$, $\alpha_8{}^* = 0$ запишутся так:

$$(3.5) \qquad \begin{aligned} &c_7 [\varkappa_3 (c_5 m_1 + c_6 m_2) - \varkappa_4 (c_5 m_2 - c_6 m_1)] = 0 \\ &c_7 [\varkappa_4 (c_5 m_1 + c_6 m_2) + \varkappa_3 (c_5 m_2 - c_6 m_1)] = 0 \end{aligned}$$

Если $\varkappa_3{}^2 + \varkappa_4{}^2 = 0$ или $m_1{}^2 + m_2{}^2 = 0$, то третья координатная ось главная, и следовательно, прецессия становится регулярной. Поэтому из (3.5) с учетом обозначений (1.3) следует $e_1 \cos \vartheta = 0$. При $\cos \vartheta = 0$

уравнение (3.1) примет вид

$$[(-2c_7c_8\sin\varphi+\ldots)(m_1\cos 2\varphi+m_2\sin 2\varphi+\ldots)(^1/_4\varkappa_3\times \\ \times\cos 4\varphi+{}^1/_4\varkappa_4\sin 4\varphi+\ldots)+\ldots]^2=k^2(-2c_7c_8\sin\varphi+ \\ +\ldots)(m_1\cos 2\varphi+m_2\sin 2\varphi+\ldots)^3[^1/_2(A_{23}^2-A_{13}^2)\sin^3\vartheta\times \\ \times\cos 3\varphi+\ldots]^2 \tag{3.6}$$

Здесь указаны лишь члены с наибольшей кратностью угла φ. Из (3.6), приравнивая нулю коэффициент при $\sin 14\varphi$, устанавливаем, что $e_1=0$. Так как при этом условии центр тяжести тела лежит на перпендикуляре к круговому сечению эллипсоида инерции, то поворотом подвижной системы вокруг третьей оси добьемся равенства $A_{23}=0$. Обращаясь к уравнению (3.1), получаем

$$E_1=0,\ k=0,\ \operatorname{tg}^2\vartheta=A_{33}/A_{11},\ A_{11}A_{33}-A_{13}^2=0$$

Последнее ограничение не может иметь место для реального движения, так как из того условия, что кинетическая энергия есть определенно-положительная квадратичная форма, следует $A_{11}A_{33}-A_{13}^2>0$. Итак, в случае 1° возможны только регулярные прецессии.

Рассмотрим случай 2°. Имеем

$$A_{33}(A_{11}-A_{22})+A_{23}^2-A_{13}^2=0,\ A_{23}A_{13}-A_{33}A_{12}=0 \tag{3.7}$$

Если предположить $c_7\neq 0$, то равенства $\alpha_7=0$, $\alpha_7^*=0$ приводят к уравнениям

$$c_3(2\varkappa_3+3\varkappa_2)-c_4(2\varkappa_4-3\varkappa_1)=0,\ c_3(2\varkappa_4-3\varkappa_1)+c_4\times \\ \times(2\varkappa_3+3\varkappa_2)=0 \tag{3.8}$$

Так как случай $c_3^2+c_4^2=0$ рассмотрен, то из (3.8) следует

$$3\varkappa_1-2\varkappa_4=0,\ 3\varkappa_2+2\varkappa_3=0$$

Подставляя сюда $\varkappa_i$ $(i=1, 2, 3, 4)$ из (3.3) и решая полученные уравнения совместно с (3.7), получаем

$$A_{11}=A_{12}A_{13}/A_{23},\ A_{22}=A_{12}A_{23}/A_{13},\ A_{33}=A_{23}A_{13}/A_{12}$$

При этих условиях определитель $\det A$ обращается в нуль, что не имеет механического смысла. Поэтому $e_1=0$. Это условие показывает, что центр тяжести тела лежит на перпендикуляре к круговому сечению гирационного эллипсоида и, следовательно, можно добиться равенства $A_{23}=0$. Приравняем нулю коэффициенты при $\cos 8\varphi$ и $\cos 6\varphi$ в уравнении (3.1)

$$E_1=\frac{\Gamma\sin^2\vartheta}{\cos\vartheta},\quad A_{22}[\Gamma(A_{11}+A_{33})\sin^4\vartheta+k^2\cos\vartheta]^2= \\ =k^2\Gamma\sin^4\vartheta(A_{11}+A_{22}+A_{33})^2\cos\vartheta \tag{3.9}$$

Решая уравнение (3.9) относительно k^2, найдем два значения k^2

$$k_{(1)}^2=\frac{\Gamma(A_{11}+A_{33})^2}{A_{22}\cos\vartheta},\qquad k_{(2)}^2=\frac{\Gamma A_{22}\sin^4\vartheta}{\cos\vartheta}$$

Пусть $k = k_1$. Равенство нулю коэффициента при $\sin 5\varphi$ в уравнении (3.1) приводит к условию $A_{11} - A_{22} + A_{33} = 0$, что противоречит (3.7). В случае $k = k_{(2)}$ из (2.1), (2.2) вытекает

$$\varphi^{\cdot} = \frac{-\Gamma\Phi_1}{kA_{33}\cos\vartheta}, \quad \psi^{\cdot} = \mathrm{const}$$

Следовательно, условие 2° приводит к уже рассмотренному случаю полурегулярной прецессии.

Таким образом, при $\varphi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$ должно быть выполнено условие 3°. Так как из уравнений (3.2) при $e_1 = 0$ ($c_7 = 0$) получаем либо случай 1°, либо случай 2°, то в дальнейшем необходимо предполагать

$$c_7(m_1^2 + m_2^2)(c_3^2 + c_4^2) \neq 0 \tag{3.10}$$

Докажем теперь, что $k = 0$. Действительно, если предположить $k \neq 0$, то в силу (3.10) из уравнения (3.1) следует, что $\beta_i = \beta_i^* = 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$). При $\cos\vartheta \neq 0$ имеем

$$\begin{gathered}(A_{11} - A_{22})(A_{11} - A_{22} + A_{33}) - 2A_{23}^2 + 2A_{13}^2 = 0\\ A_{12}(A_{11} + A_{22} - A_{33}) + 2A_{13}A_{23} = 0, \quad A_{23}(A_{11} - A_{22} -\\ - A_{33}) - 2A_{12}A_{13} = 0\\ A_{13}(A_{11} - A_{22} + A_{23}) + 2A_{12}A_{23} = 0\end{gathered} \tag{3.11}$$

Решив уравнения (3.11) относительно A_{11}, A_{22}, A_{23}, получим

$$A_{11} = -\frac{A_{23}(A_{12}^2 + A_{13}^2)}{A_{12}A_{13}}, \quad A_{22} = -\frac{A_{13}(A_{12}^2 + A_{23}^2)}{A_{12}A_{23}}$$

$$A_{33} = -\frac{A_{12}(A_{13}^2 + A_{23}^2)}{A_{13}A_{23}}$$

что приводит к равенству $\det \mathbf{A} = 0$.

Если $\cos\vartheta = 0$, из равенств $\beta_i = \beta_i^* = 0$ ($i = 0, 1, 2, 3$) вытекают первые два уравнения (3.11) и

$$A_{22}(A_{11} - A_{22} + A_{33}) - 2A_{12}^2 - 2A_{23}^2 = 0$$

При этом опять $\det \mathbf{A} = 0$. Следовательно, все величины β_i, β_i^* не могут одновременно обращаться в нуль, поэтому в уравнении (3.1) необходимо потребовать $k = 0$.

Отметим следующее свойство прецессий с непостоянными скоростями прецессии и собственного вращения: если $\varphi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$, $\psi^{\cdot} \neq \mathrm{const}$, то центр тяжести не лежит на прямой ($\boldsymbol{k}$), образующей во все время движения постоянный угол ϑ с вертикалью. Это свойство можно получить из уравнений (3.2). Полагая в них $e_1 = 0$, приходим либо к случаю 1° регулярной прецессии, либо к случаю 2° полурегулярной прецессии.

Автор приносит благодарность П. В. Харламову за ценные советы при выполнении работы.

Поступила 6 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Grioli G.* Esistenza e determinazione delle precessioni regolari dinamicamente possibili per un solido pesante asimmetrico. Ann. Mat. pura ed appl. Ser. IV, 1947, vol. 26, No. 3—4, p. 271—281.
2. *Grioli G.* Generalized precessions. Rev. Roumaine Sci. Techn. Ser. Mecanique Appliquee, 1970, vol. 15, No. 2, p. 249—255.
3. *Аппельрот Г. Г.* Не вполне симметричные тяжелые гироскопы. В кн.: Движение твердого тела вокруг неподвижной точки. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1940.
4. *Брессан А.* О прецессионных движениях твердого тела, относящихся к случаю Гесса. Механика. Сб. перев., 1958, № 6.
5. *Докшевич А. И.* Интегрируемые случаи задачи о движении тяжелого твердого тела вокруг неподвижной точки. Прикл. механ., 1968, т. 4, вып. 11.
6. *Харламов П. В.* Лекции по динамике твердого тела, ч. I. Изд-во Новосибирск. ун-та, 1965.
7. *Горр Г. В.* Об одном виде прецессионных движений гиростата. В сб.: Механика твердого тела, вып. 4. Киев, «Наукова думка», 1972.