

**МИНИМИЗАЦИЯ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ КИНЕТИЧЕСКОЙ  
ЭНЕРГИИ ГАРМОНИЧЕСКОГО ОСЦИЛЛЯТОРА  
ИМПУЛЬСНЫМ УПРАВЛЕНИЕМ**

**С. Т. Завалицин, А. Н. Сесекин**

(Свердловск)

Минимизируется кинетическая энергия переходного процесса гармонического осциллятора воздействиями с ограниченным текущим полным импульсом. Такая задача возникает, например, при выборе программы расхода массы, минимизирующей кинетическую энергию перевода спутника на круговую орбиту реактивной силой, имеющей направление силы земного тяготения (см. [1], стр. 32). Показано, что оптимальное управление содержит импульсную составляющую. Это приводит к нарушению принципа оптимальности для экстремалей. Поэтому процедура синтеза основана на анализе вспомогательной вариационной задачи уже при обычных ограничениях на управление [2].

**1. Постановка задачи и ее редукция.** Пусть объект описывается дифференциальным уравнением управляемого гармонического осциллятора ( $u$  — управление)

$$(1.1) \quad x'' + \omega^2 x = ku \quad (\omega, k \neq 0)$$

$$(1.2) \quad u(t) = 0 (t < 0); |v[u](t)| \leq 1, v[u](t) = \int_{-\infty}^t u(\tau) d\tau$$

Здесь  $v[u](t)$  — величина, пропорциональная текущему значению полного импульса управляющей силы. Рассмотрим выходную величину  $x[x_0, x_0'; u](t)$  объекта (1.1), отвечающую начальным условиям

$$(1.3) \quad x[x_0, x_0'; u](0) = x_0, \quad x'[x_0, x_0'; u](0) = x_0'$$

и некоторой программе  $u(t)$ , подчиненной требованиям (1.2). Определим оценку качества управления

$$(1.4) \quad \Delta[x_0, x_0', u] = \int_0^{\infty} \{x'[x_0, x_0', u](t)\}^2 dt$$

В данной работе решается следующая задача.

**Задача А.** В классе (1.2) найти управление, минимизирующее функционал (1.4), вычисленный на движении объекта (1.1) с начальными условиями (1.3).

Строгая математическая постановка задачи А дана в [2].

Поскольку допустимые управления — обобщенные функции [2], то классические вариационные принципы, выписанные для задачи А, теряют смысл. Это обстоятельство отражает более глубокий факт: как будет установлено, экстремали задачи А не удовлетворяют принципу оптимальности [3]. В данной работе, как и в [2], такое препятствие преодоле-

вается переходом к вспомогательной вариационной задаче уже с обычными ограничениями на управление

Прежде чем формулировать эту задачу, заметим, что без ограничения общности можно положить  $\omega = k = 1$ . Тогда в стандартных обозначениях  $x_1 = x$ ,  $x_2 = \dot{x}$  объект (1.1) описывается системой

$$(1.5) \quad \dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 + u; \quad x_1(0) = x_{10} = x_0, \quad x_2(0) = x_{20} = \dot{x}_0.$$

При этом функционал (1.4) получает форму

$$(1.6) \quad \Delta [x_{10}, x_{20}; u] = \int_0^{\infty} x_2^2(t) dt$$

Определим преобразование фазовых траекторий (но не координат!) системы (1.5), полагая

$$(1.7) \quad x_1 = \mu_2, \quad x_2 = v - \mu_1$$

В [2] доказано, что так преобразованные траектории описываются системой

$$(1.8) \quad \dot{\mu}_1 = \mu_2, \quad \dot{\mu}_2 = v - \mu_1; \quad \mu_1(0) = \mu_{10} = -x_{20}, \quad \mu_2(0) = \mu_{20} = x_{10}$$

а функционалу (1.6) отвечает критерий

$$(1.9) \quad \Delta [\mu_{10}, \mu_{20}; v] = \int_0^{\infty} (v - \mu_1)^2 dt$$

Итак, задача  $A$  эквивалентна следующей вспомогательной задаче.

**Задача  $B$ .** В классе (1.2) управляющих сигналов  $v$  (первое из условий (1.2) означает, что  $v(t) = 0$  при  $t < 0$ ) найти программу, реализующую минимум функционала (1.9), вычисленного на траектории системы (1.8).

Из известного обобщения теоремы Вейерштрасса вытекает теорема.

**Теорема 1.** Решение задачи  $B$  существует и единственно.

**2. Синтез оптимального управления для вспомогательной задачи.**

Для решения задачи  $B$  применим принцип максимума [4]. Согласно этому принципу, оптимальная функция  $v(t)$  удовлетворяет соотношению

$$(2.1) \quad \max_{|v| \leq 1} H[\mu_1(t), \mu_2(t); \psi_1(t), \psi_2(t); v] = H[\mu_1(t), \mu_2(t); \psi_1(t), \psi_2(t); v(t)] = 0$$

$$(2.2) \quad H[.,.,.,.,.] = -(v - \mu_1)^2 + \psi_1 \mu_2 + \psi_2 (v - \mu_1)$$

Здесь  $\psi_1, \psi_2$  — нетривиальное решение сопряженной системы

$$(2.3) \quad \dot{\psi}_1 = \psi_2 + 2[\mu_1 - v(t)], \quad \dot{\psi}_2 = -\psi_1; \quad \psi_1(0) = \psi_{10}, \\ \psi_2(0) = \psi_{20}$$

Пусть  $t_\alpha \geq 0$  и в некоторой окрестности  $t_\alpha$   $|v(t)| = 1$ . Тогда из (2.1)  $v(t) = \text{sign } v^\circ(t)$ ,  $v^\circ = \mu_1 + \psi_2 / 2$ ,  $\psi_1, \psi_2$  — решение системы (2.3) с начальными условиями  $\psi_1(t_\alpha), \psi_2(t_\alpha)$ . Под действием этого управления фазовая точка системы (1.8) движется по окружности

$$(2.4) \quad [\mu_1 - v(t_\alpha)]^2 + \mu_2^2 = [\mu_1(t_\alpha) - v(t_\alpha)]^2 + \mu_2^2(t_\alpha)$$

причем тождественно

$$(2.5) \quad - [v(t_\alpha) - \mu_1]^2 + \psi_1 \mu_2 + \psi_2 [v(t_\alpha) - \mu_1] = 0$$

Пусть  $t_\beta$  — отличный от  $t_\alpha$  корень уравнения

$$(2.6) \quad v^\circ(t) = v(t_\alpha)$$

В момент  $t_\beta$ , согласно (2.1), произойдет переключение на управление  $v(t) = v^\circ(t)$ , где  $\psi_1, \psi_2$  — решение системы

$$(2.7) \quad \psi_1^\circ = 0, \quad \psi_2^\circ = -\psi_1$$

с начальными условиями  $\psi_1(t_\beta), \psi_2(t_\beta)$ , При  $t > t_\beta$  тождественно

$$(2.8) \quad \psi_1(t_\beta) \mu_2 + (\psi_2/2)^2 = 0$$

так как в силу (2.7)  $\psi_1 = \text{const}$ . Определяя из (2.8)  $\psi_2$  и входя с ним в формулу для  $v^\circ$ , получим

$$(2.9) \quad v(t) = \mu_1 + \sqrt{-\psi_1(t_\beta) \mu_2} \text{sign } \psi_2$$

С учетом (2.9) само движение объекта будет описываться системой

$$(2.10) \quad \mu_1^\circ = \mu_2, \quad \mu_2^\circ = \sqrt{-\psi_1(t_\beta) \mu_2} \text{sign } \psi_2$$

По определению момента  $t_\beta$  и согласно (2.9), в момент переключения фазовая точка системы (1.8) находится на линии

$$(2.11) \quad \mu_1 + \sqrt{-\psi_1(t_\beta) \mu_2} \text{sign } \psi_2(t_\beta) = v(t_\beta)$$

Последующее ее движение, согласно (2.10), осуществляется по полукубическим параболам

$$(2.12) \quad \mu_1 - \mu_1(t_\beta) = \frac{2}{3} \frac{\text{sign } \psi_2(t)}{\sqrt{-\psi_1(t_\beta)}} [\mu_2^{3/2} - \mu_2^{3/2}(t_\beta)], \quad \mu_2(t_\beta) > 0$$

$$(2.13) \quad \mu_1 - \mu_1(t_\beta) = \frac{2}{3} \frac{\text{sign } \psi_2(t)}{\sqrt{\psi_1(t_\beta)}} [(-\mu_2)^{3/2} - (-\mu_2(t_\beta))^{3/2}], \quad \mu_2(t_\beta) < 0$$

Далее возможны два случая. В первом из них в некоторый момент  $t_\gamma$  имеем  $\psi_2(t_\gamma) = 0$ . Тогда из (2.8)  $\mu_2(t_\gamma) = 0$  и, так как  $|v(t_\gamma)| \leq 1$ , то в силу (2.9)  $|\mu_1(t_\gamma)| \leq 1$ . Из (2.1) для  $t > t_\gamma$  будем иметь  $v(t) = \mu_1(t_\gamma)$ , и под действием этого управления фазовая точка будет находиться в положении равновесия. Во втором случае  $\psi_2$  не меняет знак. Производная (2.9) в силу (2.10) имеет вид  $v^\circ|_{(2.10)} = \mu_2 - \frac{1}{2} \psi_1(t_\beta)$ . Согласно (2.8),  $\mu_2$  и  $\psi_1(t_\beta)$  противоположны по знаку. Поэтому обсуждаемая производная — знакопостоянная. Далее производная  $v^\circ$  в силу (1.8) и (2.3) в момент  $t_\beta$  равна  $v^\circ|_{(2.10)}(t_\beta)$  и имеет знак числа  $-v(t_\beta)$ . Следовательно,  $v^\circ|_{(2.10)}(t) v(t_\beta) < 0$ . Это неравенство позволяет сделать вывод, что в некоторый момент  $t_\gamma$  фазовая точка системы (1.8) окажется на линии

$$(2.14) \quad \mu_1 + \sqrt{-\psi_1(t_\beta) \mu_2} \text{sign } \psi_2(t_\beta) = -v(t_\beta)$$

Таким образом, экстремаль задачи  $B$  состоит из дуг окружностей (2.4) с чередующимися центрами  $(-1, 0), (1, 0)$ . Эти дуги разделены кус-

ками парабол (2.12), (2.13). Тем самым, задача *B* сведена к выяснению положения исходной позиции на экстремали и определению начальных условий сопряженной системы, отвечающих этой экстремали.

Первый из этих вопросов решается для начальных условий

$$(2.15) \quad 1 \leq \mu_{10}, \quad \mu_{20} = 0$$

Предполагая  $|v(0)| < 1$ , из (2.8) можно получить  $\psi_{20} = 0$ . Это с учетом (2.9) приводит к оценке  $|\mu_{10}| < 1$ , противоречащей (2.15). Следовательно, в начальный момент должно выполняться соотношение (2.5), откуда вытекает, что  $v(0) = 1$  и

$$(2.16) \quad \psi_{20} = 1 - \mu_{10}$$

Условимся называть  $\psi_{10}$ -траекторией проекцию на плоскость  $(\mu_1, \mu_2)$  траектории систем (1.8), (2.3) с начальными условиями, удовлетворяющими соотношениям (2.15), (2.16).

Фазовая точка системы (1.8), двигаясь по  $\psi_{10}$ -траектории, сначала вращается вокруг точки  $(1, 0)$ . Момент  $t_1$  переключения на нелинейное управление (2.9) ( $t_\beta = t_1$ ) определяется уравнением (2.6) ( $t_\alpha = 0, v(t_\alpha) = 1$ ). Дальнейшее движение осуществляется по параболе (2.13) до попадания либо на отрезок  $|\mu_1| \leq 1, \mu_2 = 0$ , либо на линию (2.14) ( $t_\beta = t_1, v(t_\beta) = 1$ ) второго программного переключения. С момента  $t_2 = t_\gamma$  фазовая точка начинает вращение вокруг точки  $(-1, 0)$ . На этом участке решение систем (1.8), (2.3), подсчитанное по формуле Коши, имеет вид

$$(2.17) \quad \begin{aligned} \mu_1 + 1 &= \mu_{22} (l_2 \cos \tau + \sin \tau), \quad \mu_2 = \mu_{22} (\cos \tau - l_2 \sin \tau) \\ \psi_1 &= (\tau - l_2) (\mu_1 + 1), \quad \psi_2 = -2(\mu_1 + 1) + \tau \mu_2 + \\ &+ \mu_{22} (1 + l_2^2) \sin \tau \end{aligned}$$

Здесь

$$\tau = t - t_2, \quad \mu_{i2} = \mu_i(t_2) \quad (i = 1, 2), \quad \mu_{12} + 1 = l_2 \mu_{22}$$

Момент  $t_3 = t_2 + \tau_3$  переключения на нелинейное управление определяется уравнением (2.6) ( $t_\alpha = t_2, v(t_\alpha) = 1$ ). Подстановка в это уравнение первого и последнего решений (2.17) дает соотношение

$$(2.18) \quad \operatorname{ctg} \tau = l_2 - (1 + l_2^2) \tau^{-1}$$

Пусть  $\varphi_2 = \operatorname{arctg} l_2$ . Так как нуль правой части (2.18)  $\operatorname{tg} \varphi_2 + \operatorname{ctg} \varphi_2 > 2 > \pi/2$ , то справедливо утверждение

*Лемма 1.* Если  $0 < \varphi_2 < \pi/2$ , то  $\pi/2 < \tau_3 < \pi$ . Для  $-\pi/2 < \varphi_2 < 0$  имеет место оценка  $\pi/2 - \varphi_2 < \tau_3 < \pi$ .

*Следствие.* Вдоль  $\psi_{10}$ -траектории в каждом  $\frac{1}{2}$  полупространстве  $\mu_2 < 0, \mu_2 > 0$  не более двух переключений.

Пусть  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$  — значение  $\psi_{10}$ , отвечающее оптимальной  $\psi_{10}$ -траектории. При прогонке  $\mu_{10}$  от 1 до  $\infty$  точки  $(\mu_{1i}, \mu_{2i}) = (\mu_1(t_i), \mu_2(t_i))$  ( $i = 1, 2$ )  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$ -траектории опишут соответственно линии

$$(2.19) \quad \mu_1 + s_i(\mu_2) = (-1)^{i+1} \quad (i = 1, 2)$$

Согласно следствию леммы 1, в области  $\mu_2 < 0$  нет других линий переключений задачи синтеза оптимального управления системы (1.8). Из соображений симметрии линии переключения области  $\mu_2 > 0$  имеют вид

$$(2.20) \quad \mu_1 - s_i(-\mu_2) = -(-1)^i \quad (i = 1, 2)$$

С помощью леммы 1 и ее следствия устанавливается утверждение.

*Лемма 2.*  $s_i(\mu_2) > 0$  при  $\mu_2 < 0$  ( $i = 1, 2$ )

*Лемма 3.* Оптимальный переходный процесс в системе (1.8) неограничен во времени.

Действительно, предполагая время  $t_\gamma$  переходного процесса конечным, согласно [4], имеем  $\psi_1(t_\gamma) = \psi_2(t_\gamma) = 0$ . Так как процесс может завершаться лишь в режиме нелинейного управления, то в силу (2.7)  $\psi_1(t) = 0$  при  $t_1 \leq t_2 \leq t_\gamma$ . Следовательно, экстремаль на отрезке  $[t_1, t_\gamma]$  — прямая, параллельная оси  $\mu_2 = 0$ , и пересечь ее не может.

Теперь с помощью лемм 3, 2 можно вывести относительно  $s_1$  уравнение в суперпозициях как уравнение инвариантных кривых.

Далее, учитывая (2.19) ( $i = 1$ ) в (2.11), получим

$$(2.21) \quad \psi_{11} = \psi_1(t_\beta) = -\mu_{21}^{-1} s_1^2(\mu_{21})$$

Согласно (2.7),  $\psi_1$  на участке нелинейного управления (2.9) не изменяется. Следовательно, эта функция является реализацией функции  $\Psi_-(\mu_1, \mu_2)$ , определяемой уравнением

$$(2.22) \quad \sqrt{-\mu_2} \partial \Psi_- / \partial \mu_1 - \sqrt{\Psi_-} \partial \Psi_- / \partial \mu_2 = 0$$

с начальными условиями (2.21) на линии (2.19) ( $i = 1$ ). Уравнение (2.22) имеет следующие интегралы:

$$(2.23) \quad c_1 = \Psi_-, \quad c_2 = 1 - \mu_1 + \frac{2}{3} \Psi_-^{-1/2} (-\mu_2)^{3/2}$$

Подставляя в них (2.21) и (2.19) ( $i = 1$ ), с учетом леммы 2 получим относительно  $\mu_2$  уравнение третьей степени, решая которое по формулам Кардано, имеем

$$\mu_2^0 = \frac{1}{2} (c_1)^{1/3} [2^{1/3} c_1^{2/3} - (3c_2 + \sqrt{2c_1^2 + 9c_2^2})^{1/3} - (3c_2 - \sqrt{2c_1^2 + 9c_2^2})^{1/3}]$$

Второе соотношение, необходимое для получения связи между  $c_1$  и  $c_2$ , имеет вид  $-\mu_2^{0-1} s_1^2(\mu_2^0) = c_1$ . Последующая подстановка в эти две формулы интегралов (2.23) дает уравнение, определяющее искомую функцию  $\Psi_-$ . В области  $\mu_2 > 0$  обсуждаемая функция имеет вид  $-\Psi_-(-\mu_1, -\mu_2)$ . Теперь нетрудно завершить синтез оптимального управления. Экстремали задачи Б изображены на фиг. 1. Здесь 1, 2 — линии (2.19) ( $i = 1, 2$ ); 3, 4 — линии (2.20) ( $i = 1, 2$ ).

**3. Вопросы аппроксимации.** Ниже понадобится явный вид решения систем (1.8), (2.3) с начальными условиями (2.15), (2.16)

$$(3.1) \quad \begin{aligned} \mu_1 - 1 &= (\mu_{10} - 1) \cos t, & \mu_2 &= -(\mu_{10} - 1) \sin t \\ \psi_1 &= t(\mu_1 - 1) + \psi_{10} \cos t, & \psi_2 &= -\mu_1 + 1 + t\mu_2 - \psi_{10} \sin t \end{aligned}$$

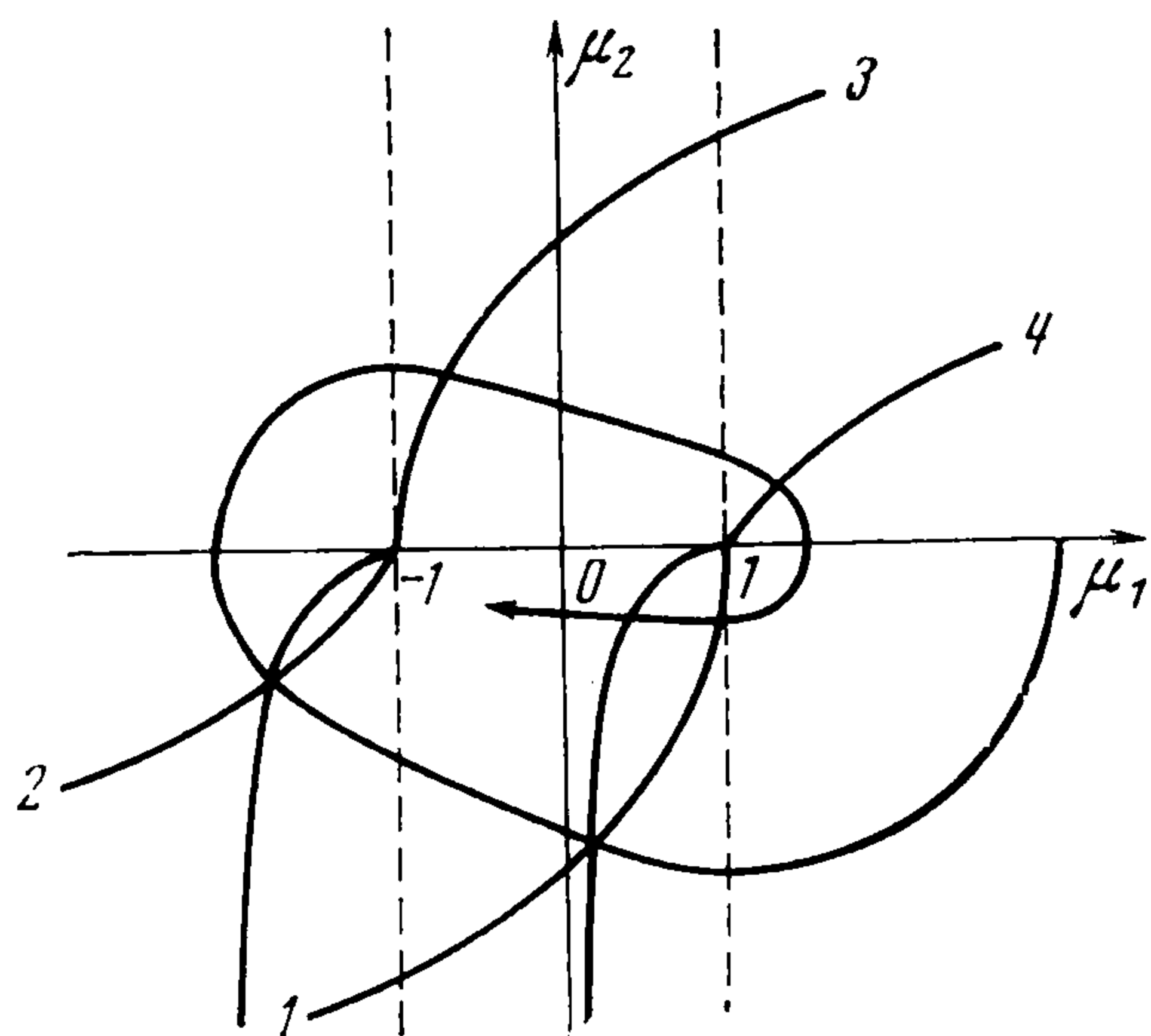
Подстановка первого и последнего решений (3.1) в (2.6) дает уравнение

$$(3.2) \quad \operatorname{ctg} t = l_0 + t, \quad l_0 = (\mu_{10} - 1)^{-1} \psi_{10}$$

В приложении доказано утверждение.

**Лемма 4.** Пусть  $\psi_{10}^{(1)} > \psi_{10}^{(2)}$ . Тогда  $\psi_{10}^{(1)}$  — траектория, окаймляющая  $\psi_{10}^{(2)}$ -траекторию, удаляется от нее.

Разобьем числовую прямую на три множества. К множеству  $M_1$  отнесем те  $\psi_{10}$ , для которых  $\psi_{10}$ -траектории имеют конечное время переходного процесса.



Фиг. 1

Значения  $\psi_{10}$ , определяющие  $\psi_{10}$ -траектории, не сходящиеся к отрезку  $|\mu_{10}| \leq 1, \mu_{20} = 0$ , составят множество  $M_3$ . Все остальные войдут в  $M_2$ . Из лемм 3, 4 и теоремы 1 вытекает утверждение.

**Теорема 2.** Множества  $M_i$  ( $i = 1, 3$ ) непрерывны,  $M_2$  состоит из одной точки  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$ . Соответствующая  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$ -траектория — экстремаль задачи  $B$  с начальными условиями (2.15).

Анализ уравнения (3.2) с учетом леммы 2 дает оценку

$$\psi_{10}(\mu_{10} - 1) < \pi/2 (\mu_{10} - 1)$$

В теореме 2 заложен алгоритм аппроксимации  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$ . Опишем его. Пусть  $1 \leq \mu_{10} \leq 3$ . Тогда  $\psi_{10}$ -траектория с

$$(3.3) \quad \begin{aligned} \psi_{10}^{(1)}(\mu_{10} - 1) &= (\mu_{10} - 1) (\operatorname{ctg} t_1 - t_1) \\ t_1 &= \arccos [\sqrt{9(\mu_{10} - 1)^2 - 2} - 3(\mu_{10} - 1)^{-1}] \end{aligned}$$

за полуоборот попадает в позицию  $(-1, 0)$ . Значение (3.3) получается из (3.2), где  $t$  — число, найденное из условия, что точка  $(-1, 0)$  лежит на параболе (2.13) с

$$\operatorname{sign} \psi_2 = 1, \quad \sqrt{\psi_1(t_\beta)} = (1 - \mu_{11})(-\mu_{21})^{-1/2}$$

а  $\mu_{11}, \mu_{21}$  подсчитаны согласно (3.1). Можно показать, что из позиции с  $\mu_{10} > 3$  нельзя попасть за полуоборот в точку  $(-1, 0)$  и что при  $1 < \mu_{10} < 5$  существует  $\psi_{10}^{(2)}(\mu_{10} - 1)$ , для которого  $\psi_{10}$ -траектория за оборот попадает в точку  $(1, 0)$  и т. д. Итак, пусть  $2k - 1 < \mu_{10} < 2k + 1$  и  $\psi_{10}^{(n)}(\mu_{10} - 1)$  ( $n = k, k + 1, \dots$ ) таково, что соответствующая  $\psi_{10}$ -траектория за  $n$  полуоборотов попадает в положение  $((-1)^n, 0)$ .

Из теоремы 2 вытекает следствие.

**Следствие** Последовательность  $\psi_{10}^{(n)}(\mu_{10} - 1)$  возрастая, стремится при  $k \leq n \rightarrow \infty$  к  $\psi_{10}(\mu_{10} - 1)$ .

Теперь опишем алгоритм приближения линий переключений (2.19). Сначала построим линию, с которой фазовая точка под действием управления (2.9), где  $\psi_1(t_\beta)$  найдено в исходный момент из условия (2.11),

попадает в один из концов отрезка  $|\mu_1| \leq 1$ ,  $\mu_2 = 0$ . Имеем эллипс

$$(3.4) \quad \mu_1^2 + \frac{2}{3} \mu_2^2 = 1$$

Далее, получим в области  $\mu_1 < -1$ ,  $\mu_2 < 0$  линию, с которой точка под действием управления  $v = -1$  попадает на эллипс (3.4) как на линию переключения. Пусть  $\tau^{(1)}$  — время движения точки от искомой линии до оси  $\mu_2 = 0$ , а  $\tau^{(2)}$  — оставшееся время движения до эллипса (3.4). С помощью первых двух решений (2.17) можно получить значения

$$\begin{aligned} \tau^{(1)} &= \arctg (\mu_1 + 1)^{-1} \mu_2, \tau^{(2)} = \arccos (\sqrt{9 - 2R^2} - 3) R^{-1} \\ R^2 &= (\mu_1 + 1)^2 + \mu_2^2 \end{aligned}$$

Выражение для  $\tau^{(2)}$  имеет смысл при  $R \leq 2$ . Подставляя в (2.18)  $\tau = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$ , имеем уравнение искомой линии

$$(3.5) \quad \operatorname{ctg} \tau^{(1)} + \operatorname{ctg} \tau^{(2)} = \tau^{(1)} + \tau^{(2)}$$

Эта линия, начинаясь в точке  $(-1, 0)$ , примыкает под прямым углом к оси  $\mu_2 = 0$  в точке  $(-3, 0)$ . Теперь найдем в области  $\mu_1 < 1$ ,  $\mu_2 < 0$  линию предшествующего переключения на управление (2.9). Для этого разрешим относительно  $\mu_1(t_\beta)$  уравнение третьей степени, получающееся из (2.13) с учетом того, что для точек линии (3.5) выполняется (2.14), а для точек искомой линии — (2.11). Имеем

$$(3.6) \quad \begin{aligned} \mu_1(t_\beta) &= 1 + \sqrt{-q + \sqrt{q^2 + p^3}} + \sqrt{-q - \sqrt{q^2 + p^3}} \\ \mu_2(t_\beta) &= (\mu_1 + 1)^{-2} \mu^2 [\mu_1(t_\beta) - 1]^2 \\ p &= -\frac{2}{9} (\mu_1 + 1)^2 \mu_2^{-1} \\ q &= -\frac{1}{2} (\mu_1 + 1)^3 + \frac{1}{3} (\mu_1 + 1)^2 (\mu_1 - 1) \mu_2^{-1} \end{aligned}$$

Входящие в (3.6)  $\mu_1$ ,  $\mu_2$  связаны уравнением (3.5) и поэтому (3.6) — параметрические уравнения искомой линии. Последняя, начинаясь в точке  $(1, 0)$ , касается линии (3.5) в точке  $(-3, 0)$ . Линии (3.5) и (3.6), а также им центрально симметричные, образуют первое приближение линий (2.19).

Выбрав вместо эллипса (3.4) линию первого приближения, лежащую в области  $\mu_2 > 0$  и начинающуюся в точке  $(-1, 0)$ , и осуществив последние построения, получим второе приближение линий (2.19) и т. д. (см. фиг. 2). Можно установить, что линии  $n$ -го приближения

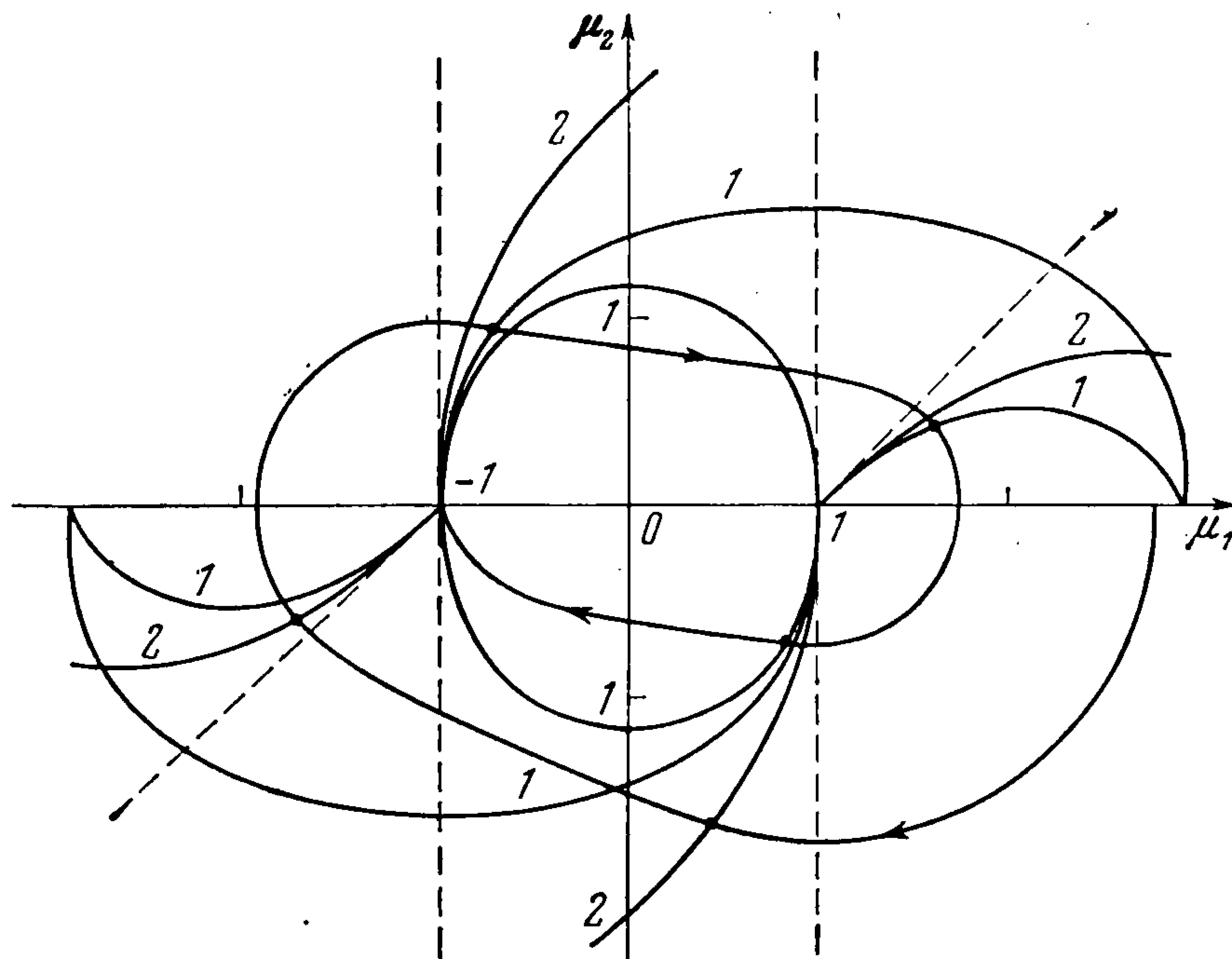
- 1) выходят из концов отрезка  $|\mu_1| \leq 1$ ,  $\mu_2 = 0$ ;
- 2) примыкают под одним и тем же углом к оси  $\mu_2 = 0$  в точке  $(-2n - 1, 0)$  в области  $\mu_2 < 0$  и в точке  $(2n + 1, 0)$  в области  $\mu_2 > 0$ ;
- 3) лежат ниже (выше) линий  $n - 1$ -го приближения ( $n \geq 2$ ) в полуплоскости  $\mu_2 < 0$  ( $\mu_2 > 0$ ).

По свойству 3) и следствию теоремы 2 полученная последовательность сходится к линиям оптимальных переключений в задаче Б.

Пусть  $\omega_-(l_2)$  — наибольший отрицательный корень уравнения (3.2).

*Лемма 5.* Линия (2.19) ( $i = 1$ ) в точке  $(1, 0)$  имеет прямой наклон, а наклон линии (2.19) ( $i = 2$ ) в точке  $(-1, 0)$  равен  $-\operatorname{tg} \omega_-(\pi/2)$ .

В самом деле, линия первого приближения в точке  $(1,0)$  касается луча  $\mu_1 = 1$ ,  $\mu_2 \leq 0$ , а линия (2.19) ( $i=1$ ) по свойству 3) и лемме 2 лежит между ними. Далее, исследование уравнения (3.2) с учетом леммы 2 показывает, что  $\omega_-(l_0) > \omega_-(-\pi/2)$ . Это означает, что луч с началом в точке  $(1,0)$  и наклоном  $-\operatorname{tg} \omega_-(-\pi/2)$  лежит выше линии (2.20) ( $i=2$ ). Последняя на основании свойства 3) располагается выше соответствующей линии первого приближения, которая в точке  $(1,0)$  имеет наклон  $-\operatorname{tg} \omega_-(-\pi/2)$ .



Фиг. 2

4. Синтез оптимального управления для исходной задачи. Преобразовывая уравнения (2.19) по формулам (1.7), получаем линии переключения исходной задачи

$$(4.1) \quad s_i(x_1) = x_2 \quad (i=1, 2)$$

По лемме 2 линии (4.1) расположены во втором квадранте. При этом, согласно лемме 5, первая из них касается оси  $x_1$ , а вторая — прямой  $x_2 = \operatorname{ctg} \omega_-(-\pi/2) x_1$ , выше которой она лежит. Две другие линии переключений центрально симметричны линиям (4.1).

Опишем экстремаль с начальным условием  $x_{10} < 0$ . Случай  $x_{10} > 0$  аналогичен выбранному. Пусть сначала  $s_1(x_{10}) > x_{20} + 1$ . Тогда соответствующая в силу правила (1.8) пересчета начальных условий точка  $(\mu_{10}, \mu_{20})$  расположена в области  $\mu_2 < 0$  правее линии (2.19) ( $i=1$ ). Согласно п. 2,  $v=1$ . Так как  $v=0$  при  $t < 0$ , то управление  $u = v^*$  содержит импульсную составляющую, которая вызовет мгновенное перемещение фазовой точки системы (1.5) в положение  $(x_{10}, x_{20} + 1)$ . После этого она, вращаясь вокруг начала координат, достигнет в момент  $t_\beta$  линии (4.1) ( $i=1$ ). При  $t > t_\beta$   $v$  определяется формулой (2.9), дифференцирование которой в силу системы (2.10) дает управление  $u = \mu_2 - \frac{1}{2} \psi_1(t_\beta)$ . Учитывая в этом выражении (2.21) и (1.7), получим  $u = x_1 + \frac{1}{2} x_{11}^{-1} s_1^2(x_{11})$ , где  $x_{11}$  — абсцисса первой точки переключения. Это управление вызовет движение по параболе  $x_1 = x_{11} s_1^{-2}(x_{11}) x_2^2$  до момента  $t_\gamma$ . В этот момент фазовая точка системы (1.8) достигнет линии (2.19) ( $i=2$ ), а соответствен-

но экстремаль системы (1.5) — линии (1.4). Затем устанавливается  $v = -1$ , в результате чего фазовая точка системы (1.5), начав вращение вокруг начала координат, покинет рассматриваемую область.

Если  $x_{20} > s_2(x_{10}) + 1$ , то можно усмотреть, что после начального перемещения на единицу вниз фазовая точка системы (1.5) по окружности уходит в область  $x_{10} > 0$ .

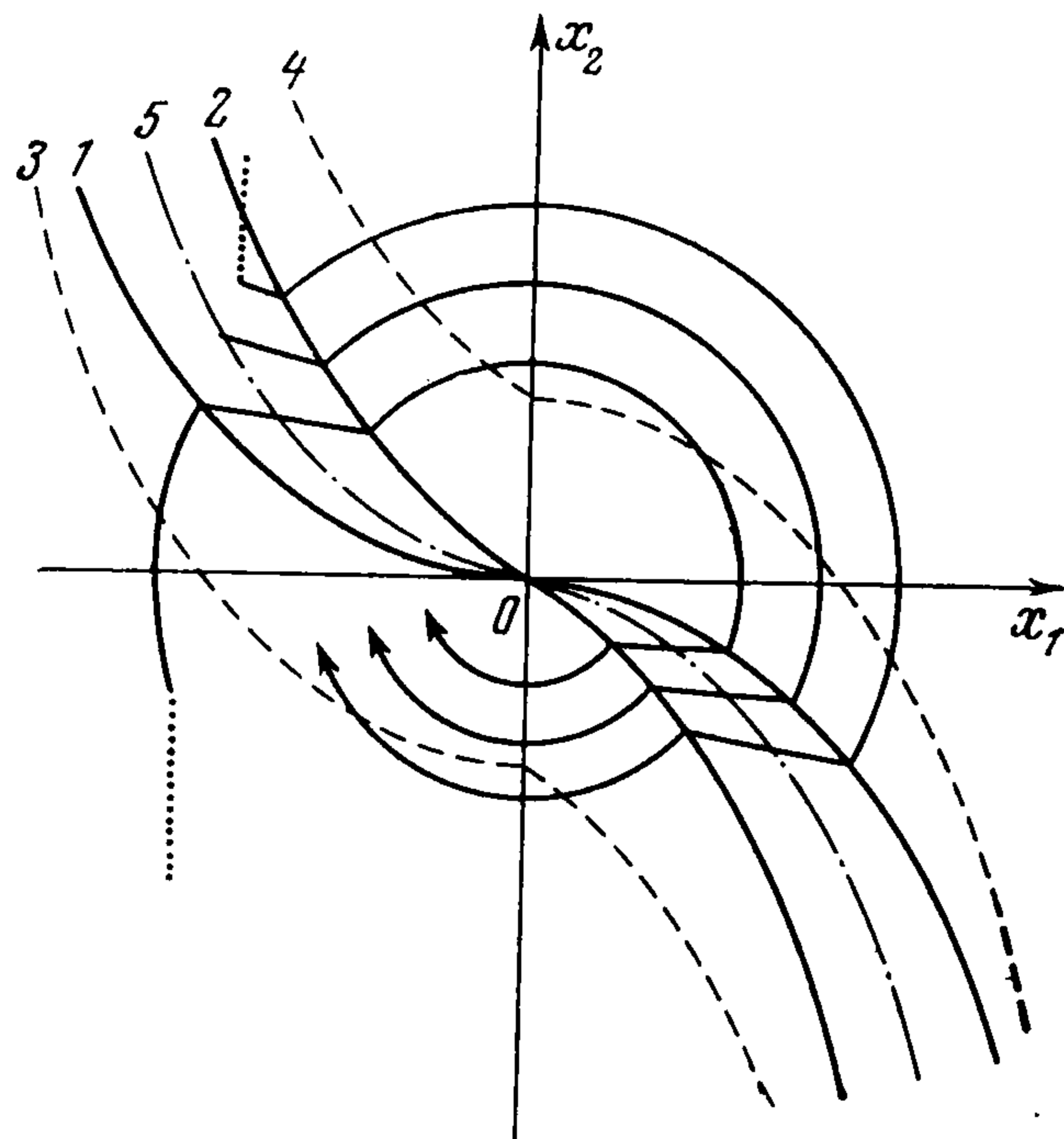
Осталось проанализировать случай, когда  $s_1(x_{10}) - 1 < x_{20} < s_2(x_{10}) + 1$ . Применяя формулы пересчета (1.8) и (2.9) с учетом выкладок, проведенных в конце п. 2, получим

$$v(0) = -x_{20} + \sqrt{-x_{10} \cdot \Psi_-(-x_{20}, x_{10})}$$

Линия

$$(4.2) \quad v(0) = 0$$

разделяет линии (4.1). Под действием импульса  $v(0) \delta$  фазовая точка системы (1.8) перебрасывается в створ линий (4.1). При этом, если  $v(0) > 0$ , то она попадает в положение, которое находится ниже линии (4.2). В случае  $v(0) < 0$  она не выходит из области, что выше линии (4.2). Если исходная позиция лежит на линии (4.2), импульс отсутствует. В любом из этих вариантов дальнейшее движение осуществляется по параболе до попадания на линию (4.1) ( $i = 2$ ). После этого фазовая точка системы (1.8), вращаясь вокруг начала координат, покидает рассматриваемую область. Далее, с учетом изложенного в конце п. 2 и (1.7), можно записать оптимальное управление в функции фазовых координат. Экстремали задачи А изображены на фиг. 3. Здесь 1, 2 — линии (4.1) ( $i = 1, 2$ ); 3, 4 — линии  $s_i(x_1) = x_2 - (-1)^i$  ( $i = 1, 2$ ); 5 — линия (4.2).



Фиг. 3

5. Приложение. Доказательство леммы 4. Учитывая первое из соотношений (3.1) в третьем, можно получить выражение

$$(5.1) \quad \psi_{11}^{(i)} = \psi_1^{(i)}(t_1^{(i)}) = (\mu_{11}^{(i)} - 1) \operatorname{ctg} t_1^{(i)} \quad (i = 1, 2)$$

Анализ (3.2) показывает, что  $t_1^{(1)} < t_1^{(2)}$ . Это и (5.1) позволяет сделать вывод, что если  $t_1^{(2)} < \pi/2$ , то  $\psi_{11}^{(1)} > \psi_{11}^{(2)}$  и  $\psi_{11}^{(1)} < \psi_{11}^{(2)}$  для  $t_1^{(1)} > \pi/2$ . Последнее означает, что первая линия (2.11) ( $t_\beta = t_1^{(1)}$ ,  $\psi_1(t_\beta) = \psi_{11}^{(1)}$ ,  $\psi_2(t_\beta) = \psi_{21}^{(1)}$ ,  $v(t_\beta) = 1$ ) всегда правее второй. Установим, что  $\psi_{10}^{(i)}$ -траектории в полупространстве  $\mu_2 < 0$  находятся в предписанном леммой отношении. Из трех возможных случаев рассмотрим, например, тот, когда линии первого переключения находятся левее прямой  $\mu_1 = 1$ . В этом случае, согласно изложенному выше, в области справа от первой линии переключения  $\psi_{10}^{(i)}$  траектории — окружности. Разность их радиусов

$$\Delta r_1 = r_1^{(1)} - r_1^{(2)}, \quad r_1^{(i)} = \sqrt{[\mu_{21}^{(i)}]^2 - \psi_{11}^{(i)} \mu_{21}^{(i)}}$$

В области, что слева от второй линии второго переключения,  $\psi_{10}^{(i)}$ -траектории вновь окружности, разность радиусов которых равна величине  $\Delta r_2 = r_2^{(1)} - r_2^{(2)} > 0$ . Достаточно установить, что  $\Delta r_2 > \Delta r_1$ . Это будет так, если  $d/d\alpha \Delta r(\alpha) < 0$ , где  $\Delta r(\alpha)$  относится к линиям  $\mu_1 + \sqrt{-\psi_1^{(i)}} \mu_2 = \alpha$ ,  $|\alpha| \leq 1$ . Вычисляя  $(d/d\alpha) \mu_2^{(i)} = \mu_2^{(i)*} (\alpha^*)^{-1}$  в силу (2.10) ( $\psi_2 > 0$ ), получим

$$\frac{d}{d\alpha} \Delta r(\alpha) = \frac{d}{d\alpha} r^{(1)} - \frac{d}{d\alpha} r^{(2)}, \quad \frac{d}{d\alpha} r^{(i)} = \sqrt{\psi_1^{(i)} [\psi_1^{(i)} - \mu_2^{(i)}]^{-1}}$$

Компоненты градиента функции под знаком радикала по  $\psi_1^{(i)}$ ,  $\mu_2^{(i)}$  неотрицательны. Это дает требуемый факт.

Согласно следствию леммы 1, линии третьего переключения находятся в полупространстве  $\mu_2 > 0$ . Осталось установить, что вторая из них правее первой. Тогда  $\psi_{10}^{(i)}$ -траектории в области  $\mu_2 > 0$  окажутся в том же положении, что и в полупространстве  $\mu_2 < 0$ . Из трех возможных случаев опять рассмотрим лишь один: линии второго переключения — слева от прямой  $\mu_1 = -1$ , а линии третьего — справа от той же прямой. Достаточно установить убывание третьей функции (2.17) вдоль (2.14) ( $\nu = -1$ ) и неположительность  $\partial\psi_{13} / \partial l_2$ . Имеем

$$\frac{\partial\psi_{13}}{\partial\mu_{12}} \Big|_{(2.14)} = (\tau_3 - l_2) (2 + l_2^2) l_2^{-1} \sin \tau_3 < 0$$

так как из неравенств  $\psi_{13} < 0$ ,  $\mu_{13} + 1 > 0$  вытекает, что  $\tau_3 < l_2$ . Далее

$$(5.2) \quad \partial\psi_{13} / \partial l_2 = \mu_{22} [(\tau_3' - 1) (\mu_{12} + 1) \mu_{22}^{-1} + (\tau_3 - l_2) (\cos \tau_3 + \mu_{23} \mu_{22}^{-1} \tau_3')]$$

Из (2.21)

$$\tau_3' = \tau_3 \sin^2 \tau_3 (2l_2 - \tau_3) [(1 + l_2^2) \sin^2 \tau_3 + \tau_3^2]^{-1}$$

Очевидно,  $0 < \tau_3' < 1$ . По лемме 1  $\cos \tau_3 < 0$ . Следовательно, (5.2) неположительно.

Поступила 23 VII 1973

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. М., «Наука», 1968.
2. Завалицин С. Т. Минимизация интегрального квадратичного отклонения импульсным управлением. Автоматика и телемеханика, 1973 № 1.
3. Беллман Р. Динамическое программирование. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
4. Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф. Математическая теория оптимальных процессов. М., Физматгиз, 1961.