Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ИССЛЕДОВАНИЕ НЕКОТОРЫХ ОПТИМАЛЬНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ УСРЕДНЕНИЯ

Л. Д. Акуленко

(Москва)

Строится схема канонического усреднения для решения некоторых задач оптимального управления на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина. Предполагается, что объект описывается системой с вращающейся фазой [1], а управление входит только в возмущающие члены [2]. Рассмотрение проводится на большом интервале времени, таком, что управляемые величины изменяются существенно. Развитая методика иллюстрируется конкретными примерами квазилинейных колебательных систем.

Методы малого параметра для приближенного решения задач оптимального управления применялись в [2-5].

1. Постановка задачи. Сформулируем задачу об управлении некоторым механическим объектом малыми управляющими воздействиями. Пусть соответствующая система уравнений имеет вид

$$x^{\cdot} = \varepsilon X(\tau, x, y, u, \varepsilon), \quad \tau = \varepsilon(t - t_0) + \tau_0, \quad x(t_0) = x_0 \tag{1.1}$$

$$y^{\cdot} = Y_0(\tau, x, y) + \varepsilon Y(\tau, x, y, u, \varepsilon), \qquad y(t_0) = y_0$$

Здесь x, X — n-мерные векторы; y, Y_0, Y — векторы размерности m; u — l-мерное управление τ — «медленное время», ε — скалярный малый параметр $\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$.

Предполагается, что правые части системы (1.1) определены в некоторой, быть может, неограниченной области изменения своих аргументов и удовлетворяют в ней всем необходимым условиям гладкости и периодичности, которые будут следовать из дальнейших построений. Критерий качества управления будет введен несколько позднее, после вывода стандартной системы с вращающейся фазой.

Из (1.1) следует, что при $\varepsilon = 0$ система становится неуправляемой

$$y^{\circ\cdot} = Y_0(\tau, x^\circ, y^\circ), \quad \tau = \tau_0 = \text{const}, \quad x^\circ = \text{const}$$

Пусть эта невозмущенная система допускает полное $(n + m + 1)$ — параметрическое семейство решений вида [6]

$$y^\circ = (\Pi/2\pi)[\nu(\tau)(t - t_0) + \psi_0] + \varphi(\nu(\tau)(t - t_0) + \psi_0, \tau, c, x^\circ)$$

Здесь Π — постоянный m-вектор с составляющими, равными нулю, для колеблющихся переменных; $\nu(\tau)$ — скалярная собственная частота, зависящая от параметра τ; $\psi = \nu(\tau)(t - t_0) + \psi_0$ — невозмущенная фаза, ψ_0 — фазовая постоянная, c — $(m - 1)$-мерный вектор независимых параметров семейства, $\varphi(\psi, \tau, c, x^\circ)$ — равномерная почти периодическая функция фазы ψ. Естественно предположить, что правая часть системы

(1.1) — равномерная почти периодическая функция вращающихся составляющих быстрого вектора y.

Введем критерий качества управления системой (1.1). Пусть цель управления заключается в минимизации функционала

$$J = g(x(T),\ c(T),\ \psi(T)) + \varepsilon \int_{t_0}^{T} G(\tau,\ x,\ c,\ \psi,\ u,\ \varepsilon)\, dt \tag{1.2}$$

где параметр c в силу возмущенной системы (1.1) — медленно меняющаяся функция времени t. От подынтегральной функции G естественно потребовать равномерной почти периодичности по быстрой переменной (фазе) ψ и аналогичной гладкости. Верхний предел интеграла считается фиксированной величиной, причем T имеет порядок ε^{-1}, чтобы управляемые медленные переменные x и c на рассматриваемом интервале времени $[t_0,\ T]$ изменились существенно, т. е. на величину порядка единицы. При таком выборе T множитель ε перед интегралом в (1.2) взят с целью выравнивания порядков входящих в функционал величин и чтобы получающееся значение оптимального управления $u\ (t)$ было по величине порядка единицы.

Для удобства рассмотрения систему (1.1) приведем к стандартному виду с вращающейся фазой [1,7]

$$x^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon X\ (\tau,\ x,\ y^\circ(\psi,\ \tau,\ c,\ x),\ u,\ \varepsilon)$$

$$c^{\boldsymbol{\cdot}} = \varepsilon C\ (\tau,\ x,\ \psi,\ c,\ u,\ \varepsilon)$$

$$\psi^{\boldsymbol{\cdot}} = \nu\ (\tau) + \varepsilon \Psi\ (\tau,\ x,\ \psi,\ c,\ u,\ \varepsilon)$$

Здесь функции C и Ψ находятся как решение линейной алгебраической системы

$$\frac{\partial y^\circ}{\partial \psi} \Psi + \frac{\partial y^\circ}{\partial c} C = Y\ (\tau,\ x,\ y^\circ,\ u,\ \varepsilon) - \frac{\partial y^\circ}{\partial x} X\ (\tau,\ x,\ y^\circ,\ u,\ \varepsilon) - \frac{\partial y^\circ}{\partial \tau}$$

причем дифференцирование ψ по τ не проводится. Предполагается, что функциональный определитель (определитель Вронского для невозмущенной системы в вариациях) $\det\ (\partial y^\circ\ /\ \partial\psi,\ \partial y^\circ\ /\ \partial c)$ отличен от нуля в рассматриваемой области аргументов τ, ψ, c и x.

Объединяя x и c в один медленный вектор a, полученную систему с вращающейся фазой запишем в стандартном виде

$$\begin{aligned} a^{\boldsymbol{\cdot}} &= \varepsilon f\ (\tau,\ a,\ \psi,\ u,\ \varepsilon), \qquad a\ (t_0) = a_0 \\ \psi^{\boldsymbol{\cdot}} &= \nu\ (\tau) + \varepsilon F\ (\tau,\ a,\ \psi,\ u,\ \varepsilon), \qquad \psi\ (t_0) = \psi_0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Здесь a — медленный вектор произвольной размерности n, ψ — скалярная вращающаяся фаза, т. е. $\nu\ (\tau) \geqslant \nu_0 > 0$; начальные значения этих переменных определяются через x_0, y_0. Отметим, что при выполнении сформулированных выше предположений правые части системы (1.3 будут гладкими функциями своих аргументов в рассматриваемой области и равномерными почти периодическими относительно ψ.

Критерий качества управления (1.2) можно переписать в виде

$$J = g(a(T),\ \psi(T),\ \varepsilon) + \varepsilon \int_{t_0}^{T} G(\tau,\ a,\ \psi,\ u,\ \varepsilon)\,dt \to \min \tag{1.4}$$

по u, где $u(t) \in U$, а U — некоторая выпуклая область допустимых значений l — вектора управления. Отметим, что, не ограничивая общности, можно полагать $G \equiv 0$. Действительно, пополнив вектор a еще одной составляющей, изменяющейся согласно уравнению

$$a^{\cdot}_{n+1} = \varepsilon G(\tau,\ \psi,\ u,\ \varepsilon), \qquad a_{n+1}(t_0) = 0$$

функционал (1.4) можно представить в виде функции конечных значений фазовых координат $J = g(a(T),\ \psi(T),\ \varepsilon) + a_{n+1}(T)$, т. е. можно считать, что $J = g(a(T),\ \psi(t),\ \varepsilon)$, $a = (a_1, \ldots, a_n, a_{n+1})$.

Цель работы заключается в построении приближенного оптимального решения задачи (1.3), (1.4) с любой степенью точности по малому параметру ε на асимптотически сколь угодно большом интервале времени. Задача оптимизации решается на основе принципа максимума Л. С. Понтрягина [8] в предположении, что такое решение существует и единственно.

Отметим, что к оптимальной задаче (1.3), (1.4) приводится ряд практических задач управления нелинейными и квазилинейными колебательными и вращательными системами при помощи малых управляющих воздействий. Квазилинейная колебательная система с одной степенью свободы рассматривается в п. 3.

2. Асимптотическое решение двухточечной задачи принципа максимума. Функция Гамильтона для задачи (1.3), (1.4) имеет вид

$$H(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ u,\ \varepsilon) = \varepsilon(f,\ p) + (\nu + \varepsilon F)q - \varepsilon G$$

где p — вектор, сопряженный a; q — скалярная переменная, сопряженная ψ. Необходимое условие оптимальности управления $u = v(t)$ (принцип максимума Л. С. Понтрягина [8]) состоит в том, что

$$H(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ v,\ \varepsilon) = \max_{u \in U} H(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ u,\ \varepsilon)$$

в любой момент времени $t \in [t_0,\ T]$; переменные a, ψ удовлетворяют системе (1.3) с $u = v(t)$, а p и q — соответствующей сопряженной системе и условиям трансверсальности на правом конце.

Пусть управление $u = u^*(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ \varepsilon)$, доставляющее максимум функции H при фиксированных других аргументах и являющееся достаточно гладкой функцией, равномерной почти периодической по ψ, известно и единственно. Введем обозначение

$$H^* = H(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ u^*,\ \varepsilon) = \nu(\tau)q + \varepsilon h(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ u^*,\ \varepsilon)$$

Тогда решение оптимальной задачи (1.3), (1.4) сводится к построению решения двухточечной задачи для гамильтоновой системы уравнений

$$a^{\cdot} = \varepsilon f^*(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ \varepsilon), \quad \psi^{\cdot} = \nu(\tau) + \varepsilon F^*(\tau,\ a,\ \psi,\ p,\ q,\ \varepsilon) \tag{2.1}$$

$$p^{\cdot} = \varepsilon\left[\frac{\partial G}{\partial a} - \frac{\partial(f,p)}{\partial a} - \frac{\partial F}{\partial a}q\right]^*, \quad q^{\cdot} = \varepsilon\left[\frac{\partial G}{\partial \psi} - \left(\frac{\partial f}{\partial \psi},\ p\right) - \frac{\partial F}{\partial \psi}q\right]^*$$

Здесь звездочка в степени означает, что соответствующие функции и их частные производные берутся при известном выражении для $u = u^*(\tau, a, \psi, p, q, \varepsilon)$. Условия на правом конце для сопряженного вектора p, q — условия трансверсальности имеют вид

$$(2.2)\qquad p(T, \varepsilon) = -\left.\frac{\partial g}{\partial a}\right|_T, \qquad q(T, \varepsilon) = -\left.\frac{\partial g}{\partial \psi}\right|_T$$

Для общности можно полагать, что начальные условия для a, ψ также зависят от ε

$$(2.3)\qquad a(t_0) = a_0 = a_0(\varepsilon), \qquad \psi(t_0) = \psi_0 = \psi_0(\varepsilon)$$

Пусть решение краевой задачи принципа максимума (2.1) — (2.3) построено и единственно. Тогда известно решение исходной оптимальной задачи. Оптимальное управление $u = u^*(\tau, a, \psi, p, q, \varepsilon)$ может быть определено как программное управление подстановкой известного решения краевой задачи; как «частичный синтез»: $u = u^*(\tau, a, \psi, p(t), q(t), \varepsilon)$ или в виде «полного синтеза», если разрешить выражение $\psi = \psi(t)$ относительно $t = t(\psi)$, что возможно и единственно, и подставить в сопряженный вектор. Оптимальная траектория также известна, а минимальное значение функционала вычисляется квадратурой.

К системе (2.1) применим метод усреднения по быстрой фазе.

Как известно [1, 7], метод усреднения связан с заменой переменных, определяемой некоторыми дифференциальными соотношениями в частных производных, интегрирование которых приводит к произвольным функциям медленных переменных. В [9, 10] показано, что в случае задачи Коши для малого периодического по t гамильтониана вида $\varepsilon h(x, p, t)$ (x — координата, p — импульс) этим произволом можно распорядиться так, чтобы усредненная система также имела канонический вид.

Ниже в работе развивается аналогичный метод канонического усреднения по быстрой фазе ψ, который позволяет существенно упростить построение решения краевой задачи (2.1) — (2.3). Порядок усредненной системы уменьшается на два. Во-первых, медленные переменные интегрируются независимо от фазы и, во-вторых, среднее значение q постоянно, так как усредненный гамильтониан не зависит от фазы. Если он не зависит от τ, то сохраняется интеграл «энергии».

Переходим к построению более простой для интегрирования усредненной краевой задачи, на основании решения которой строится приближенное решение исходной задачи (2.1) — (2.3). Далее широко используется тот факт, что частные производные функции Гамильтона, взятые при $u = u^*$, совпадают с полными частными производными, т. е. с производными от H^* [5]

$$\left.\frac{\partial H}{\partial p}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial p}, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial q}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial q}, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial a}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial a}, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial \psi}\right|_{u^*} = \frac{\partial H^*}{\partial \psi}$$

так как имеют место тождества

$$\left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u^*}\frac{\partial u^*}{\partial p} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u^*}\frac{\partial u^*}{\partial q} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u^*}\frac{\partial u^*}{\partial a} \equiv 0, \quad \left.\frac{\partial H}{\partial u}\right|_{u^*}\frac{\partial u^*}{\partial \psi} \equiv 0$$

Будем строить такую унивалентную каноническую замену переменных (a, ψ, p, q) к новым (усредненным) переменным $(\xi, \varphi, \eta, \beta)$, характеризуемую производящей функцией $S(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon)$ [11]

$$p = \frac{\partial S}{\partial a}, \quad q = \frac{\partial S}{\partial \psi}, \quad \xi = \frac{\partial S}{\partial \eta}, \quad \varphi = \frac{\partial S}{\partial \beta} \tag{2.4}$$

чтобы новый (усредненный) гамильтониан не зависел от φ. Причем в нулевом приближении (при $\varepsilon = 0$) старые и новые переменные должны совпадать. Производящая функция S и новый гамильтониан K связаны следующим дифференциальным соотношением:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H^*\left(\tau, a, \psi, \frac{\partial S}{\partial a}, \frac{\partial S}{\partial \psi}, \varepsilon\right) = K(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon)$$

которое с учетом представлений

$$\begin{aligned} &S = (a, \eta) + \psi\beta + \varepsilon\sigma(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon) \\ &K = \nu(\tau)\beta + \varepsilon k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) \\ &p = \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \quad q = \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}, \quad \xi = a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \quad \varphi = \psi + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \beta} \end{aligned} \tag{2.5}$$

приводится к виду

$$\begin{aligned} &\nu\frac{\partial \sigma}{\partial \psi} + h\left(\tau, a, \psi, \eta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial a}, \beta + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \psi}, \varepsilon\right) + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} = \\ &= k\left(a + \varepsilon\frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \eta, \beta, \varepsilon\right) \end{aligned} \tag{2.6}$$

Если функция h кусочно-непрерывна и равномерно почти периодична по ψ, непрерывна по τ, а по остальным аргументам достаточное число раз непрерывно дифференцируема, то при помощи этих соотношений искомые функции σ и k могут быть вычислены с любой степенью точности по малому параметру ε в виде

$$\begin{aligned} &\sigma(\tau, a, \psi, \eta, \beta, \varepsilon) = \sigma_0 + \varepsilon\sigma_1 + \varepsilon^2\sigma_2 + \ldots \\ &k(\tau, \xi, \eta, \beta, \varepsilon) = k_0 + \varepsilon k_1 + \varepsilon^2 k_2 + \ldots \end{aligned} \tag{2.7}$$

Подставим ряды (2.7) в уравнение (2.6) с учетом (2.5) и приравняем коэффициенты при одинаковых степенях ε. Получим зацепляющуюся последовательность уравнений и, в частности, соотношение

$$\nu(\tau)\frac{\partial \sigma_0}{\partial \psi} + h(\tau, a, \psi, \eta, \beta, 0) = k_0(\tau, a, \eta, \beta)$$

решение которого равно

$$\begin{aligned} &k_0(\tau, a, \eta, \beta) = \langle h_0 \rangle \equiv \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\int_{\psi_0}^{N} h(\tau, a, \psi, \eta, \beta, 0)\,d\psi \\ &\sigma_0(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = -\frac{1}{\nu}\int (h_0 - \langle h_0 \rangle)\,d\psi \end{aligned} \tag{2.8}$$

Для последующих неизвестных коэффициентов k_i, σ_i $(i \geqslant 1)$ имеют место аналогичные выражения

$$k_i = \langle h_i \rangle, \qquad \sigma_i = -\frac{1}{\nu}\int (h_i - \langle h_i \rangle)\,d\psi \tag{2.9}$$

в которых функции h_i вычисляются на основе известных величин. Например, для $i = 1,\ 2$

$$h_1(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \frac{\partial\sigma_0}{\partial\tau} + \frac{\partial h_0}{\partial\eta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a} + \frac{\partial h_0}{\partial\beta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} + \left(\frac{\partial h}{\partial\varepsilon}\right)_0 - \frac{\partial k_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta} \tag{2.10}$$

$$h_2(\tau, a, \psi, \eta, \beta) = \frac{\partial\sigma_1}{\partial\tau} + \frac{\partial h_0}{\partial\eta}\frac{\partial\sigma_1}{\partial a} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\right)^2 + \frac{\partial h_0}{\partial\beta}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\psi} +$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial^2 h_0}{\partial\beta^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi}\right)^2 + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta\partial\beta}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\eta\partial\varepsilon}\frac{\partial\sigma_0}{\partial a} + \frac{\partial^2 h_0}{\partial\beta\partial\varepsilon}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\psi} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h}{\partial\varepsilon^2}\right)_0 -$$
$$- \frac{\partial k_0}{\partial a}\frac{\partial\sigma_1}{\partial\eta} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 k_0}{\partial a^2}\left(\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}\right)^2 - \frac{\partial k_1}{\partial \rho}\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}$$

и так далее. Очевидно, точность проводимых построений ограничивается степенью гладкости исходного гамильтониана. Если u^*, функция G и правые части системы (2.1) лишь кусочно-непрерывны, то можно выписать так называемые уравнения первого приближения

$$\xi^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial\eta} = \varepsilon\langle f_0(\tau, \xi, \eta, \beta)\rangle \tag{2.11}$$
$$\eta^{\cdot} = -\frac{\partial K}{\partial\xi} = \varepsilon\left\langle\left[\frac{\partial G_0}{\partial\xi} - \frac{\partial(f_0, \eta)}{\partial\xi} - \frac{\partial F_0}{\partial\xi}\beta\right]^*\right\rangle$$
$$\beta^{\cdot} = -\frac{\partial K}{\partial\varphi} = 0, \quad \varphi^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial\beta} = \nu(\tau) + \varepsilon\langle F_0(\tau, \xi, \eta, \beta)\rangle$$

Здесь нуль в индексе означает, что ε полагается равным нулю, а угловые скобки — осреднение по фазе. По сравнению с точными уравнениями (2.1) система (2.11) дает погрешность порядка ε на интервале $[t_0,\ T]$, $T \sim \varepsilon^{-1}$. Поэтому начальные и граничные условия должны быть выписаны с такой же точностью

$$\xi_0 = a_0(0), \quad \varphi_0 = \psi_0(0), \quad \eta(T) = -\left.\frac{\partial g_0}{\partial\xi}\right|_T, \quad \beta = -\left.\frac{\partial g_0}{\partial\psi}\right|_T \tag{2.12}$$

Из предпоследнего уравнения (2.11) следует, что $\beta = \mathrm{const}$, т. е. β всюду входит как параметр. Отметим еще, что если $\langle h_0\rangle$ не зависит от τ, то система (2.11) допускает интеграл $k(\xi, \eta, \beta) = \mathrm{const}$, что дает возможность уменьшить порядок системы. В случае системы с одной степенью свободы задача может быть решена в квадратурах. Если медленные переменные вычислены, то значение $\varphi(t)$ также получается квадратурой.

Так называемое улучшенное первое приближение [7], т. е. удовлетворяющее системе (2.1) с погрешностью $\sim \varepsilon^2$, равно

$$p = \eta + \varepsilon\frac{\partial\sigma_0}{\partial\xi}, \quad q = \beta + \varepsilon\frac{\partial\sigma_0}{\partial\varphi} \tag{2.13}$$
$$a = \xi - \varepsilon\frac{\partial\sigma_0}{\partial\eta}, \quad \psi = \varphi - \varepsilon\frac{\partial\sigma_0}{\partial\beta} \quad (\sigma_0 = \sigma_0(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta))$$

Итак, пусть по формулам (2.8) — (2.10) вычислено необходимое количество коэффициентов σ_i, k_i, т. е. производящая функция и усредненный гамильтониан (2.5) вычислены с нужной степенью точности по малому параметру ε. Тогда усредненная каноническая система имеет более простой вид, чем исходная (2.1)

$$\xi^{\cdot} = \frac{\partial K}{\partial \eta} = \varepsilon \frac{\partial k}{\partial \eta}, \qquad \eta^{\cdot} = -\frac{\partial K}{\partial \xi} = -\varepsilon \frac{\partial k}{\partial \xi} \tag{2.14}$$

$$\varphi = \frac{\partial K}{\partial \beta} = \nu(\tau) + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial \beta}, \qquad \beta = \text{const}$$

и определяет усредненное решение с нужной точностью на всем интервале времени $[t_0, T]$ (при $T \sim \varepsilon^{-1}$ эта точность на единицу ниже точности вычисления усредненного гамильтониана).

Найдем теперь начальные и краевые условия для усредненных переменных. Пусть построено общее решение системы (2.14) в виде

$$\xi = \xi(\tau, \varepsilon t, \xi_0, \eta_T, \beta, \varepsilon), \qquad \xi \mid_{t_0} = \xi_0 \tag{2.15}$$

$$\eta = \eta(\tau, \varepsilon t, \xi_0, \eta_T, \beta, \varepsilon), \qquad \eta \mid_T = \eta_T$$

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{t_0}^{t} \left[\nu(\tau_1) + \varepsilon \frac{\partial k}{\partial \beta}\right] dt_1, \qquad \tau_1 = \varepsilon(t_1 - t_0) + \tau_0, \qquad \beta = \text{const}$$

Здесь неизвестные пока параметры ξ_0, η_T, β и φ_0 подлежат определению. Выведем необходимые для этого соотношения. Для этой цели последние два уравнения (2.5)

$$\xi = \alpha + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \eta}, \qquad \varphi = \psi + \varepsilon \frac{\partial \sigma}{\partial \beta}$$

разрешаются относительно a и ψ

$$a = \xi + \varepsilon A(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \psi = \varphi + \varepsilon \Psi(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.16}$$

Полученный результат подставляется в выражения для сопряженных переменных p и q

$$p = \eta + \varepsilon P(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon), \qquad q = \beta + \varepsilon Q(\tau, \xi, \varphi, \eta, \beta, \varepsilon) \tag{2.17}$$

где P и Q суть функции $\partial\sigma / \partial a$ и $\partial\sigma / \partial\psi$, в которые подставлены найденные выражения (2.16). Воспользуемся теперь начальными и граничными условиями (2.3), (2.2)

$$a_0 = \xi_0 + \varepsilon A(\tau_0, \xi_0, \varphi_0, \eta(\varepsilon t_0), \beta, \varepsilon) \tag{2.18}$$

$$\psi_0 = \varphi_0 + \varepsilon \Psi(\tau_0, \xi_0, \varphi_0, \eta(\varepsilon t_0), \beta, \varepsilon)$$

$$-\frac{\partial g}{\partial a}\bigg|_T = \eta_T + \varepsilon P(\tau_T, \xi(\varepsilon T), \varphi(T), \eta_T, \beta, \varepsilon)$$

$$-\frac{\partial g}{\partial \psi}\bigg|_T = \beta + \varepsilon Q(\tau_T, \xi(\varepsilon T), \varphi(T), \eta_T, \beta, \varepsilon)$$

Полученная система уравнений разрешается относительно неизвестных параметров ξ_0, φ_0, η_T, β. Очевидно, все эти вычисления должны проводиться с необходимой точностью.

Отметим, что приближенное построение выражений (2.16), а также вычисление искомых параметров можно проводить разложением в ряды или последовательными приближениями по степеням малого параметра ε. Например, схема последовательных приближений для определения выражений (2.16) имеет вид

$$a^{(i+1)} = \xi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \eta} \sigma(\tau, a^{(i)}, \psi^{(i)}, \eta, \beta, \varepsilon), \quad a^{(0)} = \xi$$

$$\psi^{(i+1)} = \varphi - \varepsilon \frac{\partial}{\partial \beta} \sigma(\tau, a^{(i)}, \psi^{(i)}, \eta, \beta, \varepsilon), \quad \psi^{(0)} = \varphi, \quad i = 1, 2, \ldots$$

Аналогичным способом определяются неизвестные параметры

$$\xi_0^{(l+1)} = a_0 - \varepsilon A(\tau_0, \xi_0^{(l)}, \varphi_0^{(l)}, \eta^{(l)}(\varepsilon t_0), \beta^{(l)}, \varepsilon)$$

$$\varphi_0^{(l+1)} = \psi_0 - \varepsilon \Psi(\tau_0, \xi_0^{(l)}, \varphi_0^{(l)}, \eta^{(l)}(\varepsilon t_0), \beta^{(l)}, \varepsilon)$$

$$\eta_T^{(l+1)} = -\frac{\partial g_{l+1}}{\partial a}\bigg|_T - \varepsilon P(\tau_T, \xi^{(l)}(\varepsilon T), \varphi^{(l)}(T), \eta_T^{(l)}, \beta^{(l)}, \varepsilon)$$

$$\beta^{(l+1)} = -\frac{\partial g_{l+1}}{\partial \psi}\bigg|_T - \varepsilon Q(\tau_T, \xi^{(l)}(\varepsilon T), \varphi^{(l)}(T), \eta_T^{(l)}, \beta^{(l)}, \varepsilon)$$

В качестве нулевого приближения искомых параметров можно взять значения, определяемые уравнениями (2.12). Для достаточно малых значений ε и гладких правых частей последовательные приближения будут равномерно сходящимися, т. е. могут быть вычислены с нужной степенью точности.

Итак, если решение усредненной системы (2.14) построено численно или аналитически, то по формулам (2.16), (2.17) находится с такой же точностью решение исходной двухточечной задачи (2.1) — (2.3), а вместе с последним и приближенное решение оптимальной задачи (1.3), (1.4).

3. *Пример*. На практике часто ограничиваются построением решения первого приближения, которое дает качественную картину процесса управления и обеспечивает ошибку порядка ε на большом интервале времени порядка ε^{-1}.

Рассмотрим слабоуправляемую квазилинейную колебательную систему с одной степенью свободы

$$x^{\cdot\cdot} + \nu^2(\tau) x = \varepsilon f(\tau, x, x^{\cdot}, u), \quad x(t_0) = x_0, \quad x^{\cdot}(t_0) = x_0^{\cdot} \tag{3.1}$$

где τ — медленное время, $\nu(\tau)$ — частота колебаний, постоянная при $\varepsilon = 0$, u — скалярное управление. Заменой

$$x = a \sin \psi, \quad x^{\cdot} = a\nu \cos \psi$$

уравнение (3.1) сводится к системе (штрих означает производную по τ).

$$a^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\nu(\tau)} [f(\tau, a \sin \psi, a\nu(\tau) \cos \psi, u) - a\nu'(\tau) \cos \psi] \cos \psi$$

$$\psi^{\cdot} = \nu(\tau) + \frac{\varepsilon}{\nu(\tau) a} [a\nu'(\tau) \cos \psi - f(\tau, a \sin \psi, a\nu(\tau) \cos \psi, u)] \sin \psi$$

Пусть $u(t) \in U$, где U — некоторое выпуклое множество; поставим задачу найти допустимое u такое, чтобы

$$J = g(a(T), \psi(T)) + \varepsilon \int_{t_0}^{T} G(\tau, a, \psi, u)\, dt = \min_{u \in U}$$

Для частного случая правой части вида

$$f(\tau, x, x^{\cdot}, u) = f_0(\tau, x, x^{\cdot}) + d(\tau) u, \quad |d(\tau)| < \infty$$

будем рассматривать следующие подслучаи:

$$а)\ |u|<\infty,\quad J=k\frac{a^2(T)}{2}+\varepsilon\int_{t_0}^{T}G_0(\tau)u^2dt,\quad G_0(\tau)>0,\quad k\neq 0$$

$$б)\ |u|\leqslant u_0,\quad J=\pm\frac{a^2(T)}{2}$$

Рассмотрим кратко первый подслучай. Функция Гамильтона системы

$$H=\nu q+\frac{\varepsilon}{\nu}(v+du)w-\varepsilon G_0u^2$$

$$v(\tau,a,\psi)=f_0-a\nu'\cos\psi,\quad w(a,\psi,p,q)=p\cos\psi-\frac{q}{a}\sin\psi$$

максимальна при $u^*=dw/2\nu G_0$ и равна

$$H^*=\nu q+\frac{\varepsilon}{\nu}vw+\frac{\varepsilon}{4}\frac{d^2}{\nu^2G_0}w^2$$

Исходная двухточечная задача описывается уравнениями

$$a^{\cdot}=\frac{\varepsilon}{\nu}v\cos\psi+\frac{\varepsilon}{2}\frac{d^2}{\nu^2G_0}w\cos\psi,\quad a(t_0)=a_0$$

$$\psi^{\cdot}=\nu-\frac{\varepsilon}{\nu a}v\sin\psi-\frac{\varepsilon}{2\nu^2}\frac{d^2}{aG_0}w\sin\psi,\quad \psi(t_0)=\psi_0$$

$$p^{\cdot}=-\frac{\varepsilon}{\nu}\left(\frac{\partial v}{\partial a}+\frac{d^2}{2\nu G_0}\frac{q}{a^2}\sin\psi\right)w-\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{q}{a^2}v\sin\psi,\quad p(T)=-ka(T)$$

$$q^{\cdot}=-\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial}{\partial\psi}\left(vw+\frac{d^2}{4\nu G_0}w^2\right),\quad q(T)=0$$

$$(a_0=(x_0^2+x_0^{\cdot 2})^{1/2},\ \psi_0=\operatorname{arc\,tg}(\nu(\tau_0)x_0/x_0^{\cdot}))$$

Соответствующая усредненная двухточечная задача первого приближения существенно проще исходной и описывается уравнениями

$$\xi^{\cdot}=\frac{\varepsilon}{\nu}f_{0c}(\tau,\xi)+\frac{\varepsilon}{4\nu^2}\frac{d^2}{G_0}\eta,\quad \xi(t_0)=a_0$$

$$\eta^{\cdot}=\frac{\varepsilon}{2}\frac{\nu'}{\nu}\eta-\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial f_{0c}(\tau,\xi)}{\partial\xi}\eta,\quad \eta(T)=-k\xi(T)$$

$$\varphi^{\cdot}=\nu-\frac{\varepsilon}{\xi}f_{0s}(\tau,\xi),\quad \varphi(t_0)=\psi_0\quad(\beta=0)$$

Здесь

$$\begin{Bmatrix}f_{0c}(\tau,\xi)\\ f_{0s}(\tau,\xi)\end{Bmatrix}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}f_0(\tau,\xi\sin\omega,\xi\nu(\tau)\cos\psi)\begin{Bmatrix}\cos\\ \sin\end{Bmatrix}\psi\,d\psi$$

Если функция f_0 линейна по x и $x^{\cdot}$ или в системе отсутствует τ, то уравнения первого приближения могут быть проинтегрированы до конца.

Пусть, например

$$\nu=\text{const},\quad d=1,\quad f_0=-2\lambda x^{\cdot}+\mu x^3,\quad G_0=1,\quad \lambda,\ \mu=\text{const}$$

Тогда приближенное решение выписывается явно

$$\xi(\varepsilon t)=\left[a_0-\frac{\eta_T}{8\lambda\nu^2}e^{-\varepsilon\lambda(T-t_0)}\right]e^{-\varepsilon\lambda(t-t_0)}+\frac{\eta_T}{8\lambda\nu^2}e^{\varepsilon\lambda(t-T)}$$

$$\eta(\varepsilon t)=\eta_Te^{\varepsilon\lambda(t-T)}$$

Здесь

$$\eta_T = -ka_0 e^{-\varepsilon\lambda(T-t_0)}\left\{1+\frac{k}{8\lambda\nu^2}\left[1-e^{-2\varepsilon\lambda(T-t_0)}\right]\right\}^{-1}$$

$$\lim_{k\to\infty}\eta_T = -8\lambda\nu^2 a_0 e^{-\varepsilon\lambda(T-t_0)}\left[1-e^{-2\varepsilon\lambda(T-t_0)}\right]^{-1}$$

В конце интервала управления приближенное значение амплитуды колебаний равно $\xi(\varepsilon T) = -\eta_T / k$, причем $\lim\limits_{k\to\infty} \xi(\varepsilon T) = 0$, а возмущенная частота колебаний в первом приближении имеет вид

$$\Omega(\varepsilon t) = \nu - \frac{3}{8\nu}\varepsilon\mu\xi^2(\varepsilon t), \quad \varphi(t) = \psi_0 + \int_{t_0}^{t}\Omega(\varepsilon t_1)\,dt_1$$

Оптимальное управление и минимальное значение функционала с погрешностью порядка ε равны

$$u^* = \frac{\eta(\varepsilon t)}{2\nu}\cos\psi \approx v(t) = \frac{\eta_T}{2\nu}e^{\varepsilon\lambda(t-T)}\cos\varphi(t)$$

$$J_{\min} = \frac{\eta_T^2}{2}\left[\frac{1}{k}+\frac{1}{8\lambda\nu^2}\left(1-e^{-2\varepsilon\lambda(T-t_0)}\right)\right]$$

Рассмотрим теперь кратко подслучай б). Гамильтониан

$$H = \nu q + \frac{\varepsilon}{\nu}(v+du)\,w$$

максимален при $u^* = u_0 \operatorname{sign} w$, если $w \not\equiv 0$, и равен

$$H^* = \nu q + \frac{\varepsilon}{\nu}vw + \varepsilon\frac{du_0}{\nu}|w|$$

Исходная двухточечная задача описывается уравнениями

$$a^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\nu}v\cos\psi + \frac{\varepsilon}{\nu}du_0\cos\psi\operatorname{sign} w, \qquad a(t_0) = a_0$$

$$\psi^{\cdot} = \nu - \frac{\varepsilon}{\nu a}v\sin\psi - \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{du_0}{a}\sin\psi\operatorname{sign} w, \qquad \psi(t_0) = \psi_0$$

$$p^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial v}{\partial a}w - \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{q}{a^2}\sin\psi\,(v+du^*), \qquad p(T) = \mp a(T)$$

$$q^{\cdot} = -\frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial v}{\partial\psi}w - \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{\partial w}{\partial\psi}(v+du^*), \qquad q(T) = 0$$

Соответствующая усредненная двухточечная задача первого приближения имеет вид

$$\xi^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\nu}\left(f_{0c}(\tau,\xi) - \frac{\nu'}{2}\xi + \frac{2}{\pi}du_0\operatorname{sign}\eta\right), \qquad \xi(t_0) = a_0$$

$$\eta^{\cdot} = \frac{\varepsilon}{\nu}\left(\frac{\nu'}{2} - \frac{\partial f_{0c}(\tau,\xi)}{\partial\xi}\right)\eta, \quad \eta(T) = \mp\xi(T)$$

$$\varphi^{\cdot} = \nu - \frac{\varepsilon}{\nu}\frac{f_{0s}(\tau,\xi)}{\xi}, \qquad \varphi(t_0) = \psi_0$$

Теперь в предположении знакопостоянства η требуется построить решение задачи Коши для первого уравнения.

Автор благодарен Ф. Л. Черноусько за внимание к работе и важные замечания.

Поступила 18 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Волосов В. М.* Усреднение в системах обыкновенных дифференциальных уравнений. Усп. матем. наук, 1962, т. 17, вып. 6.
2. *Черноусько Ф. Л.* Некоторые задачи оптимального управления с малым параметром. ПММ, 1968, т. 32, вып. 1.
3. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. М., «Наука», 1968.
4. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. М., «Наука», 1969.
5. *Евтушенко Ю. Г.* Приближенный расчет задач оптимального управления. ПММ, 1970, т. 34, вып. 1.
6. *Акуленко Л. Д.* К вопросу о стационарных колебаниях и вращениях. Укр. матем. ж., 1966, т. 18, № 5.
7. *Боголюбов Н. Н., Митропольский Ю. А.* Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. М., Физматгиз, 1963.
8. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
9. *Федорченко А. М.* Метод канонического усреднения в теории нелинейных колебаний. Укр. матем. ж., 1957, т. 9, № 2.
10. *Бурштейн Э. Л., Соловьев Л. С.* Гамильтониан усредненного движения. Докл. АН СССР, 1961, т. 139, № 4.
11. *Гантмахер Ф. Р.* Лекции по аналитической механике. М., «Наука», 1966.