Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ l-УКЛОНЕНИИ ОТ ВСТРЕЧИ В ЛИНЕЙНОЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ ИГРЕ

П. Б. Гусятников

(Москва)

Приводятся достаточные условия l-уклонения от встречи в линейной дифференциальной игре. Работа примыкает к исследованиям [1–5].

1. Рассмотрим задачу об уклонении от встречи [1,2] в линейной дифференциальной игре [3], заданной уравнением

$$\dot{z} = Cz + f(u, v), \qquad u \in P, \qquad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь z — вектор n-мерного евклидова пространства R^n, C — постоянная квадратная матрица порядка n, u — параметр преследования, v — параметр убегания, P и Q — заданные компактные подмножества из R^n, $f(u, v)$ — непрерывная на $P \times Q$ по совокупности переменных функция.

Терминальное множество M игры (1.1) будем предполагать линейным подпространством пространства R^n.

Скажем, что в игре (1.1) возможно уклонение от встречи (или возможно убегание), если при любом начальном значении $z_0 \in R^n \setminus M$ вектора z и при произвольном измеримом изменении управляющего параметра $u = u(t)$ можно подобрать такое измеримое изменение управляющего параметра $v = v(t)$, что точка $z(t)$, являющаяся решением векторного дифференциального уравнения

$$\dot{z} = Cz + f(u(t), v(t)), \qquad z_0 = z(0) \tag{1.2}$$

не попадет на множество M ни при каком значении времени $t \in (0, +\infty)$. При этом для нахождения значения параметра $v(t)$ в каждый момент времени t разрешается использовать лишь значения $u(s)$ и $z(s)$ при $s \leqslant t$ и не разрешается использовать эти значения при $s > t$ (см. [1]).

Скажем, что в игре (1.1) возможно l-уклонение от встречи (l-убегание), если существует пара таких зависящих только от игры чисел $\theta \geqslant 0$ и $l > 0$, что управление $v = v(t)$ можно так построить на базе указанной информации, что для точки $z(t)$ имеет место следующая оценка:

$$\begin{aligned} &\xi(t) = |\pi z(t)| > 0, && 0 < t \leqslant \theta \\ &\xi(t) = |\pi z(t)| \geqslant l, && \theta \leqslant t < +\infty \end{aligned} \tag{1.3}$$

где π — оператор ортогонального проектирования из R^n на подпространство L, являющееся ортогональным дополнением к M в R^n.

2. Обозначим через $\Phi(t)$ матрицу e^{tC} и через S единичный шар в L. Предположим, что для игры (1.1) выполнено следующее условие.

Условие 1. Существует $\delta > 0$ такое, что для любого $r \in (0, 2\delta]$ и для любого $u \in P$ множество

$$\pi\Phi(r)f(u, Q) = w(u, r)$$

выпукло, а множество

$$w(r) = \bigcap_{u \in P} w(u, r)$$

имеет нулевой вектор внутренней точкой, т. е. существует $\gamma(r) > 0$ такое, что

$$\gamma(r)S \subset w(r), \quad 0 < r \leqslant 2\delta \tag{2.1}$$

(Определение операций над выпуклыми множествами см. [3, 4])

В дальнейшем под $\gamma(r)$ будем понимать наибольшее из чисел, удовлетворяющих (2.1).

Утверждение 1. Функция $\gamma(r)$ непрерывна и ограничена на интервале $(0, 2\delta]$.

Доказательство. В работе [3] доказана непрерывность выпукло множественной функции $w(r)$, $r > 0$. Поэтому для любого $r_0 \in (0,2\delta]$ и для любого $\varepsilon > 0$ существует $\eta > 0$ такое, что для любого $r \in (r_0 - \eta, r_0 + \eta) \cap (0,2\delta]$ выполнены включения

$$w(r) \subset w(r_0) + \varepsilon S, \quad w(r_0) \subset w(r) + \varepsilon S \tag{2.2}$$

Второе из этих включений дает вместе с (2.1) включение

$$\gamma(r_0) S \subset w(r) + \varepsilon S$$

Отсюда (см. утверждение 2 в [4]) $\gamma(r_0)S \overset{*}{-} \varepsilon S \subset w(r)$, и следовательно, для любого $\varepsilon \leqslant \gamma(r_0)$ имеем $(\gamma(r_0) - \varepsilon) S \subset w(r)$, что в соответствии с определением $\gamma(r)$ дает

$$\gamma(r) \geqslant \gamma(r_0) - \varepsilon \tag{2.3}$$

Если же $\varepsilon > \gamma(r_0)$, то в силу условия 1 неравенство (2.3) очевидно.

Первое из включений (2.2) дает вместе с (2.1) включение

$$\gamma(r) S \subset w(r_0) + \varepsilon S \tag{2.4}$$

Далее, из (2.3) следует, что если $\varepsilon < {}^1/_2\gamma(r_0)$, то $\gamma(r) > {}^1/_2\gamma(r_0) > \varepsilon$, так что из (2.4) получаем $(\gamma(r) - \varepsilon) S \subset w(r_0)$, и следовательно, $\gamma(r) \leqslant \gamma(r_0) + \varepsilon$ для любого $r \in (r_0 - \eta, r_0 + \eta) \cap (0,2\delta]$. Ограниченность $\gamma(r)$ следует из ограниченности $w(u, r)$ для любого $u \in P$ (компактность Q).

3. Обозначим через K единичную сферу в L (границу шара S). Будем предполагать, что для игры (1.1) выполнены следующие условия.

Условие 2. Для любого $\psi \in K$ существует вектор $v(\psi) \in Q$ такой, что для любого $r \in [0, 2\delta]$ и для любого $u \in P$, $v \in Q$

$$(\psi \cdot \Phi(r)f(u, v)) \leqslant (\psi \cdot \Phi(r)f(u, v(\psi))) \tag{3.1}$$

Условие 3. Для любого $z \in R^n$ существует линейное подпространство $L(z)$ пространства L такое, что

$$\pi\Phi(t)z \in L(z), \quad 0 \leqslant t \leqslant 2\delta$$

Заметим, что поскольку $\gamma(r) S \subset w(u, r)$, то из условия 2 немедленно вытекает, что для любого $r \in [0, 2\delta]$ и $u \in P$.

$$\gamma(r) \leqslant (\psi \cdot \Phi(r)f(u, v(\psi))) \tag{3.2}$$

Пусть $z \in R^n$ и пусть $\psi(z) \in K$ — произвольный ортогональный к $L(z)$ вектор (существующий в силу условия 3). Зафиксируем $\psi(z)$ и положим $v(z) = v(\psi(z))$.

Подставляя в (3.2) вместо $v(\psi)$ вектор $v(z)$ и вместо u — произвольное управление $u(t-r)$, получаем, интегрируя (см. утверждение 1) по r от нуля до t

$$(3.3) \qquad \left(\psi(z)\cdot\int_0^t \pi\Phi(r) f(u(t-r),\ v(z))\,dr\right) \geqslant \int_0^t \gamma(r)\,dr = \mu(t), \quad t\in[0,\ 2\delta]$$

4. В работах [1,2] доказано, что условие 1 является достаточным (при $f(u, v) = v - u$) для того, чтобы в игре (1.1) было возможно убегание. Ответ на вопрос о возможности l-убегания дает следующая теорема.

Теорема. Пусть для игры (1.1) выполнены условия 1—3. Тогда в этой игре возможно l-убегание, причем $\theta \equiv \delta$, а

$$(4.1) \qquad l = \min_{s\in[0,\ \delta]} \sqrt{\mu^2(s)+\alpha^2(s)} > 0$$

$$(4.2) \qquad \alpha(s) = \max\{0;\ \mu(s+\delta) - \mu(s) - Ns\}$$

$$N = \max|\pi\Phi(r) f(u,\ v)|, \qquad r\in[0,\ \delta], \quad u\in P, \quad v\in Q$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что $\mu(s)$ и $\alpha(s)$ — непрерывные функции параметра s, так что неравенства $\mu(s) > 0$ при $s > 0$ и $\alpha(0) = \mu(\delta) > 0$ гарантируют положительность l.

Пусть теперь $z_0 = z(0)$ — произвольный вектор из R^n.

Предлагаем для убегания, начинающегося из точки z_0, индуктивно строить управление $v = v(t)$ на каждом из отрезков $[n\delta,\ (n+1)\delta)$, $n = 0, 1, \ldots$ по правилу

$$(4.3) \qquad v(s) \equiv v_n \equiv v(z_n), \qquad s\in[n\delta,\ (n+1)\delta)$$

где $z_n = z(n\delta)$ — реализовавшееся в момент $n\delta$ значение вектора $z(t)$.

Тогда в соответствии с формулой Коши имеем для любого $t \in [n\delta,\ (n+1)\delta]$

$$(4.4) \qquad \pi z(t) = \pi\Phi(t-n\delta)\, z_n + \int_0^{t-n\delta} \pi\Phi(r) f(u(t-r),\ v_n)\,dr$$

где $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ — построенное к моменту t управление преследователя.

Обозначим через Π_n оператор ортогонального проектирования из R^n на $L(z_n)$ и через Γ_n оператор ортогонального проектирования на $\psi_n = \psi(z_n)$.

Замечая, что $\Gamma_n x \equiv (\psi_n\cdot x)\psi_n$ для любого $x\in L$, получим из (4.4) в силу (3.3) неравенство

$$(4.5) \qquad |\Gamma_n \pi z(t)| \geqslant \mu(t - n\delta)$$

Поскольку при $n \geqslant 1$

$$\Pi_n \pi z(t) = \pi\Phi(t-n\delta)\left\{\Phi(\delta)\, z_{n-1} + \int_0^{\delta} \Phi(s) f(u(n\delta - s),\ v_{n-1})\,ds\right\} +$$

$$+ \int_0^{t-n\delta} \Pi_n\Phi(r) f(u(t-r),\ v_n)\,dr$$

то в соответствии с определением $\psi(z)$

$$\Gamma_{n-1}\Pi_n\pi z(t) = a_n + b_n \tag{4.6}$$

где

$$a_n = \left(\psi_{n-1} \cdot \int_0^\delta \Phi(t - n\delta + s) f(u(n\delta - s),\ v_{n-1})\, ds\right)\psi_{n-1}$$

$$b_n = \int_0^{t-n\delta} \Gamma_{n-1}\Pi_n\pi\Phi(r) f(u(t-r),\ v_n)\, dr$$

Для первого слагаемого в (4.6), как и в (3.3), имеем оценку (см. (3.2))

$$|a_n| \geqslant \int_0^\delta \gamma(t - n\delta + s)\, ds = \mu(t - n\delta + \delta) - \mu(t - n\delta) \tag{4.7}$$

Для второго же слагаемого в (4.6) оценка очевидна

$$|b_n| \leqslant N\cdot(t - n\delta) \tag{4.8}$$

Из (4.7), (4.8) вытекает, что (см. (4.2))

$$|\Pi_n\pi z(t)| \geqslant |\Gamma_{n-1}\Pi_n\pi z(t)| \geqslant \alpha(t - n\delta)$$

Отсюда окончательно для любого $t \in [n\delta, (n+1)\delta)$, $n \geqslant 1$.

$$\xi^2(t) = |\pi z(t)|^2 = |\Pi_n\pi z(t)|^2 + |\Gamma_n\pi z(t)|^2 \geqslant \mu^2(t - n\delta) + \alpha^2(t - n\delta) \geqslant l^2$$

При $n = 0$ имеем из (4.5)

$$\xi(t) \geqslant |\Gamma_0\pi z(t)| \geqslant \mu(t) > 0, \qquad t \in (0, \delta)$$

Что и требовалось.

5. Рассмотрим задачу убегания «мальчик и крокодил» [1]

$$\dot z^1 = z^2 + v, \quad \dot z^2 = -u, \quad |u| \leqslant 1, \quad |v| \leqslant 1 \tag{5.1}$$

Здесь z^1, z^2, u, v, ν-мерные векторы евклидова пространства R^ν, u и v — управляющие параметры. Терминальное множество M состоит из тех и только тех точек $z = (z^1, z^2)$, для которых $z^1 = 0$. В связи с этим $L = \{z : z^2 = 0\}$ и $\pi z = z^1$ (вторая координата, равная нулю, опущена). Будем предполагать, что $\nu \geqslant 3$.

Для величины l в этой задаче может быть получена оценка, несколько лучшая, чем оценка (4.1), даваемая теоремой п. 4. Именно, несмотря на то, что на отрезке [0, 2] условие 1 не выполнено, предлагаем для убегания, начинающегося из точки $z_0 = (z_0^1, z_0^2)$, строить управление $v = v(t)$ индуктивно на каждом из отрезков $I_n = [n, n+1)$, $n = 0,1,2,\ldots$ по правилу $v(s) \equiv v_n$, $s \in I_n$, где v_n — единичный вектор из R^ν, ортогональный к векторам $z^1(n)$ и $z^2(n)$ (здесь $z^1(n)$ и $z^2(n)$ — реализовавшиеся в момент времени n значения векторов $z^1(t)$ и $z^2(t)$).

Тогда в силу формулы Коши

$$\pi z(t) \equiv z^1(t) = z^1(n) + (t-n) z^2(n) + (t-n) v_n - \int_0^{t-n} r u(t-r)\, dr, \quad t \in I_n \tag{5.2}$$

где $u(s)$, $0 \leqslant s \leqslant t$ — построенное к моменту t управление преследователя.

Обозначая, как и ранее, через Π_n оператор ортогонального проектирования из L на подпространство, натянутое на векторы $z^1(n)$ и $z^2(n)$, а через Γ_n — оператор ортогонального проектирования на v_n, имеем

$$(5.3) \qquad |\Gamma_n z^1(t)| \geqslant (t-n) - \int_0^{t-n} r dr = \mu(t-n), \quad t \in I_n$$

$$\mu(s) = s - {}^1/_2 s^2, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 2$$

Поскольку при $n \geqslant 1$

$$\Pi_n z^1(t) = z^1(n-1) + (1+t-n) z^2(n-1) + v_{n-1} -$$
$$- \int_0^{t-n} r\Pi_n u(t-r)\, dr - \int_0^1 ru(n-r)\, dr - \int_0^1 (t-n) u(n-r)\, dr$$

то

$$(5.4) \qquad |\Pi_n z^1(t)| \geqslant |\Gamma_{n-1}\Pi_n z^1(t)| \geqslant 1 - {}^1/_2 (t-n)^2 - {}^1/_2 - (t-n)$$

Из неравенств (5.3) и (5.4) имеем

$$|z^1(t)|^2 \geqslant \mu^2(t-n) + \alpha^2(t-n), \qquad t \in I_n, \qquad n \geqslant 1$$

$$\alpha(s) = \max\{0;\ {}^1/_2 - s - {}^1/_2 s^2\}, \ 0 \leqslant s \leqslant 1$$

Вычисляя минимум функции $\mu^2(s) + \alpha^2(s)$ на отрезке $[0, 1]$, получаем для величины уклонения значение $l_0 = 0.2978$.

Пусть теперь начальная точка $z_0 = (z_0^1, z_0^2)$ такова, что

$$|z_0^1 + tz_0^2|^2 \geqslant (l_0 + {}^1/_2 t^2)^2 - t^2, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad t_0 = 1 - \sqrt{1 - 2l_0}$$

где t_0 — наименьший положительный корень уравнения $l_0 = t - {}^1/_2 t^2$. Тогда указанное поведение убегающего гарантирует l_0-уклонение от встречи, начиная с момента $t = 0$.

В самом деле, в силу (5.2)

$$|\pi z(t)| \geqslant (|z_0^1 + tz_0^2|^2 + t^2)^{1/2} - {}^1/_2 t^2 \geqslant l_0, \quad 0 \leqslant t \leqslant t_0$$

При $t \in [t_0, 1]$ нужная оценка следует из (5.3).

Автор благодарит Е. Ф. Мищенко за постановку задачи и внимание к работе.

Поступила 25 IV 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф.* Задача об уклонении от встречи в линейных дифференциальных играх. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 3.
2. *Мищенко Е. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
3. *Гусятников П. Б.* Об одном классе нелинейных дифференциальных игр. В сб.: Теория оптимальных решений, вып. 1, Киев, 1969.
4. *Гусятников П. Б.* К вопросу об информированности игроков в дифференциальной игре. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Мезенцев А. В.* Об одной дифференциальной игре. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 10.