Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

СТОХАСТИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С НЕВЫПУКЛЫМИ ОГРАНИЧЕНИЯМИ

Ф. Х. Абашев, И. Я. Кац
(Свердловск)

Рассматриваются задачи об оптимальном управлении линейной системой, подверженной случайным воздействиям. Предполагается, что фазовые координаты системы связаны невыпуклыми ограничениями, которые по необходимости также стохастические. Обсуждаются детерминированные задачи, эквивалентные указанным стохастическим.

В основу единого подхода к поставленным задачам положен метод решения линейных управляемых систем, развитый в [1] и модифицированный для систем с ограничениями в [2−4].

1. Пусть имеется управляемая система

$$dx / dt = A(t)\, x(t) + B(t)\, u(t) + \xi(t) \tag{1.1}$$

где $x(t)$ — n-мерный вектор фазовых координат, u — r-мерный вектор управления, $A(t)$, $B(t)$ — известные непрерывные матрицы соответствующей размерности, $\xi(t)$ — n-мерный векторный случайный процесс с заданными вероятностными характеристиками.

Детерминированные управления $u(t)$ (элементы $u(\cdot)$) выбираются из фиксированного слабо компактного выпуклого множества U функций $u(t)$ r-векторного пространства $L_2[t_\alpha, t_\beta]$. Выбором $u(\cdot) \in U$ осуществляется управление детерминированной составляющей

$$QX[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} + Q \int_{t_\alpha}^{t} H[t, \tau]\, u(\tau)\, d\tau = y(t) \tag{1.2}$$

вектора состояния $x(t)$ системы (1.1).

Задача 1.1. Заданы начальное состояние $x(t_\alpha) = x^{(\alpha)}$, точка $x^{(\beta)}$, число $\varepsilon > 0$, непрерывная функция $\nu(t) > 0$ и n-векторная функция $x^\circ(t)$.

Среди управлений $u(\cdot) \in U$ требуется найти $u^\circ(t)$, удовлетворяющее условию $t_\beta{}^\circ - t_\alpha = \min$ при ограничениях

$$M\rho_1[P(x(t_\beta) - x^{(\beta)})] \leqslant \varepsilon \tag{1.3}$$

$$M\rho_2[Q(x(t) - x^\circ(t))] \geqslant \nu(t), \quad [t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta \tag{1.4}$$

Здесь P, Q — известные матрицы размерности $p \times n$, $q \times n$ соответственно, $\rho_1[z_1]$, $\rho_2[z_2]$ — неотрицательные выпуклые функции в пространствах $R^{(p)}$, $R^{(q)}$ $(p, q \leqslant n)$, для которых найдутся числа $\alpha > 0$, $k \geqslant 1$ такие, что выполнены условия

$$\rho_i[z_i] \leqslant \alpha[1 + \|z_i\|^k], \quad t = 1, 2 \tag{1.5}$$

($\| z \|$ — евклидова норма, M — символ математического ожидания).

Можно сформулировать также задачу, взаимную к задаче 1.1.

Задача 1.2. На заданном промежутке $[t_\alpha, t_\beta]$ найти управление $u^0(t) \in U$, доставляющее условие $\varepsilon^0 = \min\{\varepsilon\}$ при ограничениях $x(t_\alpha) = x^{(\alpha)}$, (1.3), (1.4).

Сформулированные задачи содержат невыпуклые вероятностные ограничения (1.4) на фазовые координаты и выпуклые вероятностные ограничения (1.3) на конечные состояния системы. В частности, задача 1.1 состоит фактически в том, чтобы за кратчайшее время перевести систему из положения $x^{(\alpha)} \in R^{(n)}$ в вероятностную окрестность точки $z^{(\beta)} = Px^{(\beta)} \in R^{(p)}$ так, чтобы в каждый момент времени выполнялось фазовое ограничение (1.4).

2. Опишем решение задачи 1.1, полагая $x^\circ(t) \equiv 0$. Рассмотрение общего случая не вносит новых существенных моментов в рассуждения.

Пусть U_1 — множество управлений $u(\cdot) \in L_2[t_\alpha, t_\beta]$, переводящих систему (1.1) из точки $x(t_\alpha) = x^{(\alpha)}$ на многообразие $\{z\} \subset R^{(p)}$ так, что $M\rho_1[P\eta(t_\beta) - z] \leqslant \varepsilon$. Здесь случайная величина $\eta(t_\beta)$ и детерминированный вектор z связаны соотношениями

$$\eta(t_\beta) = \int_{t_\alpha}^{t_\beta} X[t_\beta, \tau]\,\xi(\tau)\,d\tau \tag{2.1}$$

$$z^{(\beta)} - z + P\eta(t_\beta) = Px(t_\beta) \tag{2.2}$$

Можно показать, что множество U_1 — выпуклое и слабо замкнутое. Тогда множество $U^* = U \cap U_1$ будет выпуклым и слабо компактным.

Обозначим опорный функционал множества $C \subset L_2$ через $\rho(h(\cdot) \mid C)$. Опираясь на обобщенную теорему Хана — Банаха [5], получим выражение для опорного функционала $\rho(h(\cdot) \mid U^*)$ множества U^*

$$\begin{gathered}\rho(h(\cdot) \mid U^*) = \inf\{\rho(h(\cdot) + p'PH[t_\beta, \cdot] \mid U) - (p \cdot z^{(\beta)}) + \\ + \rho(p \mid N) + p'PX[t_\beta, t_\alpha]x^{(\alpha)}\} \text{ по всем } p \in R^{(p)} \\ H[t_\beta, t] = X[t_\beta, t]B(t), \qquad N = \{z \mid M\rho_1[P\eta(t_\beta) - z] \leqslant \varepsilon\}\end{gathered} \tag{2.3}$$

Здесь $X[t, t_\alpha]$ — нормированная фундаментальная матрица системы (1.1), $(a \cdot b)$ — скалярное произведение векторов a, b.

Рассмотрим множество Р детерминированных вектор-функций $y(t)$, соответствующих управлениям $u(\cdot) \in U^*$, таких, что

$$\rho_3[y(t)] = M\rho_2[y(t) + Q\eta(t)] \geqslant \nu(t), \qquad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta \tag{2.4}$$

Здесь $\eta(t)$, $y(t)$ определены равенствами (1.2), (2.1). Можно проверить, что $\rho_3[y]$ — выпуклая неотрицательная замкнутая функция [6] в $R^{(q)}$. Будем предполагать, что случайный процесс $\xi(t)$ имеет непрерывные моменты k-го порядка. Тогда $\rho_3[y(t)]$ будет всюду конечной функцией при каждом $t \in [t_\alpha, t_\beta]$.

Из свойств выпуклых функций следует, что $\rho_3[y(t)]$ можно представить в форме

$$\rho_3[y(t)] = \max_{(l,\mu^*) \in F^*}\{(l \cdot y(t)) - \mu^*\} = (l(t) \cdot y(t)) - \rho_3^*[l(t)], \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t^\beta \tag{2.5}$$

где F^* — надграфик функции $\rho_3^*[l]$, сопряженной к $\rho_3[y]$. Максимум в формуле (2.5) действительно достигается, поскольку функция $(l\cdot y(t)) - \mu^*$ и множество $F^* = \mathrm{epi}\,\rho_3^*[l]$ не имеют общих направлений рецессии (см. [6], стр. 282).

Обозначим через W множество вектор-функций $l(t)$, доставляющих максимум в (2.5) при реализациях $y(\cdot) \in P$. В дальнейшем будем предполагать, что надграфик функции $\rho_3[y]$ гладкое множество. Тогда вектор-функции $l(\cdot) \in W$ непрерывны. Предположим, кроме того, что множество W образует компакт в пространстве $C^{(q)}$.

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу.

Задача 2.1. Найти управление $u(\cdot) \in U^*$, $t \in [t_\alpha, t_\beta]$, обеспечивающее выполнение условия (2.4).

Ясно, что вспомогательная задача имеет решение тогда и только тогда, когда существует $l(\cdot) \in W$, удовлетворяющее неравенству

$$(2.6)\qquad (l(t)\cdot y(t)) - \rho_3^*[l(t)] \geqslant \nu(t), \qquad t \in [t_\alpha, t_\beta]$$

при каком-нибудь управлении $u(\cdot) \in U^*$. Тогда условие разрешимости системы неравенств (2.6) при некотором $l(\cdot) \in W$ эквивалентно условию разрешимости обобщенной проблемы моментов

$$(2.7)\qquad \int_{t_\alpha}^{t} l'(t)\, QH[t, \tau]\, u(\tau)\, d\tau \geqslant l'(t)\, QX[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} + \rho_3^*[l(t)] + \nu(t)$$

$$(2.8)\qquad \int_{t_\alpha}^{t_\beta} h'(t)\, u(t)\, dt \leqslant \rho(h(\cdot)\,|\,U) \quad \text{для всех } h(\cdot) \in L_2$$

Применяя процедуру, описанную в работах [2-4], и переходя к интегралам Стильтеса, необходимое и достаточное условие разрешимости задачи (2.7), (2.8) запишем в виде

$$(2.9)\qquad \min_{\Lambda(t)} \Big\{\rho\Big(\int_{\tau}^{t_\beta} l'(t)\, QH[t, \tau]\, d\Lambda(t)\,\Big|\,U^*\Big) + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QX[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)}\, d\Lambda(t) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \nu(t)\, d\Lambda(t) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \rho_3^*[l(t)]\, d\Lambda(t)\Big\} \geqslant 0$$

Здесь минимум берется по всем неубывающим функциям единичной вариации. Тогда, воспользовавшись формулой (2.3), получаем, что требуемым необходимым и достаточным условием разрешимости вспомогательной задачи 2.1 является выполнение неравенства

$$(2.10)\qquad \max_{l(t)} \min_{\Lambda(t)} \min_{p} \Big\{\rho\Big(\int_{\tau}^{t_\beta} l'(t)\, QH[t, \tau]\, d\Lambda(t) + p'PH[t_\beta \tau]\,\Big|\,U\Big) + \rho(p\,|\,N) - (p\cdot z^{(\beta)}) + p'PX[t_\beta, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QX[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} d\Lambda(t) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \nu(t)\, d\Lambda(t) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \rho_3^*[l(t)]\, d\Lambda(t)\Big\} \geqslant 0$$

по всем $l(\cdot) \in W$, $\|p\| + \mathrm{Var}\,\Lambda(t) = 1$.

Отметим, что $\rho_3^*[l]$ непрерывна на множестве W, поэтому последний интеграл в (2.9), (2.10) имеет смысл.

Переходя к сопряженной системе, условие (2.10) можно переписать в виде

$$(2.11)\qquad \max_{l(t)}\min_{\Lambda(t)}\min_p \Big\{\rho(s(\cdot)B(\cdot)\,|\,U)+\rho(p\,|\,N)-(p\cdot z^{(\beta)})+ \\ +(s(t_\beta)\cdot x^{(\alpha)})-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\nu(t)\,d\Lambda(t)-\int_{t_\alpha}^{t_\beta}\rho_3^*[l(t)]\,d\Lambda(t)\Big\}\geqslant 0$$

по всем $l(\cdot)\in W$, $\|p\|+\operatorname{Var}\Lambda(t)=1$, где $s(\tau)$ — решение сопряженной системы в распределениях

$$(2.12)\qquad \frac{ds(\tau)}{d\tau}=-s(\tau)A(\tau)-l'(\tau)\,Q\,\frac{d\Lambda(\tau)}{d\tau}$$

с краевым условием $s(t_\beta)=p'P$ ($d\Lambda(t)\,/\,dt$ — обобщенная производная функции $\Lambda(t)$).

Пусть t_β° — наименьший момент времени, при котором выполняется неравенство (2.11), а $l_0(t)$, $\Lambda^\circ(t)$, p_0 — экстремальные элементы (2.11), т. е.

$$(2.13)\qquad \rho(s^\circ(\cdot)B(\cdot)\,|\,U)+\rho(p_0\,|\,N)-(p_0\cdot z^{(\beta)})+(s^\circ(t_\beta)x^{(\alpha)})- \\ -\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}\nu(t)\,d\Lambda^\circ(t)-\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}\rho_3^*[l_0(t)]\,d\Lambda^\circ(t)=0$$

Тогда $t_\beta^\circ-t_\alpha$ будет оптимальным временем для задачи 1.1. При этом оптимальное управление $u^\circ(t)$ удовлетворяет принципу максимума

$$(2.14)\qquad \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}s^\circ(\tau)B(\tau)u^\circ(\tau)\,d\tau=\max_{u(\cdot)\in U}\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}s^\circ(\tau)B(\tau)u(\tau)\,d\tau$$

а детерминированная составляющая $y^\circ(t)$ оптимальной траектории — условию минимума

$$(2.15)\qquad 0=\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}(l_0'(t)\,y^\circ(t)-\rho_3^*[l_0(t)]-\nu(t))\,d\Lambda^\circ(t))= \\ =\min_{\rho_3[y(t)]\geqslant\nu(t)}\int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ}(\rho_3[y(t)]-\nu(t))\,d\Lambda^\circ(t)$$

Оптимальная точка прицеливания z° удовлетворяет условию максимума

$$(2.16)\qquad (p_0\cdot z^\circ)=\max_{z\in N}(p_0\cdot z)$$

Высказанные выше утверждения можно объединить в виде следующей теоремы.

Теорема. Необходимым и достаточным условием разрешимости задачи 1.1 является выполнение условия (2.10) или (2.11). Оптимальное управление $u^\circ(t)$ удовлетворяет принципу максимума (2.14). Детерминированная составляющая $y^\circ(t)$ оптимальной траектории — условию минимума (2.15), точка прицеливания z° — условию (2.16).

Примечания. 1°. Если epi $\rho_3[y]$ — негладкое множество, то $l(t)$ в (2.5) может оказаться разрывным. Тогда интегралы вида

$$\int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QH[t_\beta, t]\, d\Lambda(t)$$

надо понимать как интегралы Радона [7].

2°. При условии

$$\rho_2[y(t), + Q\eta(t)] = \| y(t) + Q\eta(t) \|^2$$

функция $\rho_3[y(t)]$ при каждом $t \in [t_\alpha, t_\beta]$ принимает вид

$$\rho_3[y(t)] = M\rho_2[y(t) + Q\eta(t)] = \| y(t) + QM\eta(t) \|^2 + M\| Q\eta(t) \|^2$$

а сопряженная функция

$$\rho_3^*[l(t)] = {}^1/_4 \| l(t) \|^2 - l'(t)\cdot QM\eta(t) - M\| Q\eta(t) \|^2.$$

В частности, если $MQ\eta(t) \equiv 0$, то

$$\rho_3[y(t)] = \| y(t) \|^2 + M\| Q\eta(t) \|^2$$

$$\rho_3^*[l(t)] = {}^1/_4 \| l(t) \|^2 - M\| Q\eta(t) \|^2$$

3°. Применяя рассуждения, аналогичные изложенным в [4], можно показать, что если $\rho_3[y^\circ(t)] > \nu(t)$ при $t \in [t_1, t_2] \subset [t_\alpha, t_\beta]$, то для экстремального элемента $\Lambda^\circ(t)$ выполнено условие $\Lambda^\circ(t) \equiv \text{const}$ при $t \in [t_1, t_2]$.

4°. Если надграфик функции $\rho_3[y]$ — гладкое множество и $\Lambda^\circ(t)$ при $t = t_1 \in [t_\alpha, t_\beta]$ имеет скачок, то необходимо выполняется условие

$$l_0'(t_1)\, QB\, (u^{\cdot\circ}(t_1 + 0) - u^{\cdot\circ}(t_1 - 0)) \leqslant 0 \tag{2.17}$$

В случае $\rho_3[y] = \| y \|^2$ последнее условие можно переписать в виде

$$\dot y^\circ(t_1)\, (\dot y^{\cdot\circ}(t_1 + 0) - \dot y^{\cdot\circ}(t_1 - 0)) \leqslant 0 \tag{2.18}$$

Условия (2.17), (2.18) позволяют выделить точки, подозрительные на скачок функции $\Lambda^\circ(t)$.

Решение задачи 1.2, как взаимной к задаче 1.1, можно получить из условия разрешимости вспомогательной задачи.

3. Обсудим решение задачи 1.1, полагая, что

$$\rho_1[z_1] = (z_1 \cdot z_1), \tag{3.1}$$

$$\rho_2[z_2(t)] = (z_2(t) \cdot z_2(t)), \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$$

Неравенства (1.3), (1.4) в данном случае перепишутся в виде

$$\| P(x(t_\beta) - x^{(\beta)}) \|^2 + \sigma_1^2 \leqslant \varepsilon \tag{3.2}$$

$$\| Q\bar{x}(t) \|^2 + \sigma_2^2(t) \geqslant \nu(t), \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$$

$$\bar{x}(t) = X[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} + \int_{t_\alpha}^{t} H[t, \tau]\, u(\tau)\, d\tau + \int_{t_\alpha}^{t} X[t, \tau]\, M\xi(\tau)\, d\tau$$

$$\sigma_1^2 = M\| P\eta(t_\beta) - PM\eta(t_\beta) \|^2, \quad \sigma_2^2(t) = M\| Q\eta(t) - MQ\eta(t) \|^2$$

Здесь σ_1^2 — след матрицы ковариаций случайного вектора $P\eta(t_\beta)$, $\sigma_2^2(t)$ — след матрицы ковариаций случайного процесса $Q\eta(t)$ [8].

Введем в рассмотрение детерминированную систему

$$\dot{\vartheta}(t) = A(t)\vartheta(t) + B(t)u(t) + \zeta(t), \qquad \zeta(t) = M\xi(t)$$

и сформулируем для нее следующую задачу.

Задача 3.1. Задано начальное положение $\vartheta(t_\alpha) = x^{(\alpha)}$, точка $x^{(\beta)}$, число ε_1 и непрерывная функция $\nu_1(t) > 0$.

Требуется найти управление $u^\bullet(t) \in U$, доставляющее условие $t_\beta^\circ - t_\alpha = \min$ при ограничениях

$$\| P(\vartheta(t_\beta) - x^{(\beta)}) \|^2 \leqslant \varepsilon_1, \quad \| Q\vartheta(t) \|^2 \geqslant \nu_1(t), \quad t_\alpha \leqslant t \leqslant t_\beta$$

Из (3.2) видно, что при условии (3.1) решение задачи 1.1 может быть получено как решение задачи 3.1, если принять $\varepsilon_1 = \varepsilon - \sigma_1^2$, $\nu_1(t) = \nu(t) - \sigma_2^2(t)$. Таким образом, задача 1.1 сводится к детерминированной задаче 3.1.

Необходимым и достаточным условием разрешимости этих задач является выполнение неравенства

$$\begin{aligned}(3.3)\qquad & \max_{l(t)} \min_{\Lambda(t)} \min_p \Big\{ \rho\Big(\int_\tau^{t_\beta} l'(t)\, QH[t,\tau]\, d\Lambda(t) + p'PH[t_\beta,\tau] \,\Big|\, U\Big) + \\ & + \rho(p \mid N) - (p \cdot z^{(\beta)}) + p'PX[t_\beta, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} + \\ & + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QX[t, t_\alpha]\, x^{(\alpha)} d\Lambda(t) + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QM\eta(t)\, d\Lambda(t) - \\ & - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \nu_1(t)\, d\Lambda(t) - \frac{1}{4} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, l(t)\, d\Lambda(t) \Big\} \geqslant 0\end{aligned}$$

по всем $l(\cdot) \in W$, $\| p \| + \operatorname{Var} \Lambda(t) = 1$.

Это условие также можно получить из неравенства (2.10) при

$$\rho_3[y(t)] = \| y(t) + QM\eta(t) \|^2 + \sigma_2^2(t)$$

Переходя к сопряженной системе (2.12), условие (3.3) можно переписать в виде

$$\begin{aligned}(3.4)\qquad & \max_{l(t)} \min_{\Lambda(t)} \min_p \Big\{ \rho(s(\cdot)B(\cdot) \mid U) + \rho(p \mid N) - (p \cdot z^{(\beta)}) + \\ & + (s(t_\alpha) \cdot x^{(\alpha)}) - \int_{t_\alpha}^{t_\beta} \nu_1(t)\, d\Lambda(t) - \frac{1}{4} \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, l(t)\, d\Lambda(t) + \\ & + \int_{t_\alpha}^{t_\beta} l'(t)\, QM\eta(t)\, d\Lambda(t) \Big\} \geqslant 0\end{aligned}$$

по всем $l(\cdot) \in W$, $\| p \| + \operatorname{Var} \Lambda(t) = 1$.

Как обычно, оптимальное управление $u^\circ(t)$ находится из принципа максимума (2.14) на решении $s^\circ(t)$ сопряженной системы (2.12), доставляющем экстремум функционалу (3.4). Оптимальная траектория $\vartheta^\circ(t)$ удовлетворяет условию минимума

$$0 = \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} (l_0'(t)\, Q\vartheta^\circ(t) - \frac{1}{4}\, l_0'(t)\, l_0(t) - \nu_1(t))\, d\Lambda^\circ(t) =$$

$$= \min_{\|Q\eta(t)\|^2 \geqslant \nu_1(t)} \int_{t_\alpha}^{t_\beta^\circ} (\|Q\vartheta(t)\|^2 - \nu_1(t))\, d\Lambda^\circ(t)$$

точка прицеливания z° — условию (2.16).

4. *Пример.* Рассмотрим задачу о быстродействии для стохастической системы ($w(t)$ — винеровский процесс, $M\omega(t) \equiv 0$, $M\omega^2(t) = t$)

$$dx_1 = x_2 dt, \ dx_2 = u(t)\, dt + d\omega, |u| \leqslant 1$$

$$x_1(0) = 1, \ x_2(0) = 0, \ x_1^{(\beta)} = -1, \ x_2^{\beta} = 0{,}2$$

при ограничениях на координаты

$$M\, \|P(x(t_\beta) - x^{(\beta)})\|^2 \leqslant (0.1)^2 + {}^1\!/_3 t_\beta^3 + {}^1\!/_4\, t_\beta$$

$$M\, \|Qx(t)\|^2 \geqslant {}^7\!/_{16} + {}^1\!/_3 t^3 + {}^1\!/_4 t$$

$$P = Q = \begin{Vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & {}^1\!/_2 \end{Vmatrix}$$

Эта задача эквивалентна задаче о быстродействии для детерминированной системы

$$\vartheta_1^{\cdot} = \vartheta_2, \ \vartheta_2^{\cdot} = u, \ |u| \leqslant 1 \tag{4.1}$$

$$\vartheta_1(0) = 1, \ \vartheta_2(0) = 0, \ \vartheta_1^{(\beta)} = -1, \ \vartheta_2^{(\beta)} = 0.2$$

при ограничениях на координаты

$$\|P(\vartheta(t_\beta) - \vartheta^{(\beta)})\|^2 \leqslant (0.1)^2, \quad \|Q\vartheta(t)\|^2 \geqslant {}^7\!/_{16} \tag{4.2}$$

Условие (3.3) для детерминированной задачи (4.1), (4.2) принимает вид

$$\max_{l(t)} \min_{\Lambda(t)} \min_p \Big\{ \int_0^{t_\beta^\circ} \Big| \int_0^{t_\beta^\circ} l_1(t)(t-\tau)\, d\Lambda(t) + \int_\tau^{t_\beta^\circ} l_2(t) \frac{1}{2}\, d\Lambda(t) + \tag{4.3}$$

$$+ p_1(t_\beta^\circ - \tau) + p_2 \frac{1}{2} \Big| d\tau + 2p_1 - 0.1p_2 + 0.1 \sqrt{p_1^2 + p_2^2} + \int_0^{t_\beta^\circ} l_1(t)\, d\Lambda(t) -$$

$$- \frac{1}{4} \int_0^{t_\beta^\circ} (l_1^2(t) + l_2^2(t))\, d\Lambda(t) - \frac{7}{16} \operatorname{Var} \Lambda(t) \Big\} = 0$$

по всем $l(\cdot) \in W$, $\|p\| + \operatorname{Var} \Lambda(t) = 2$.

Решая задачу (4.3), получим

$$t_\beta{}^\circ = 2\sqrt{2}, \quad l_1{}^\circ\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = \frac{1}{2}, \quad l_2{}^\circ\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$l_1{}^\circ\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{1}{2}, \qquad l_2{}^\circ\left(2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\frac{d\Lambda^\circ(t)}{dt} = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}}\,\delta\left(t - \frac{\sqrt{6}}{2}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\,\delta\left(t - 2\sqrt{2} + \frac{\sqrt{6}}{2}\right)$$

$$p_1{}^\circ = 0, \quad p_2{}^\circ = 1$$

Минимальная функция $h^\circ(t) = s^\circ(t)\,B(t)$ определяется равенствами

$$h^\circ(t) = \frac{1}{2}, \qquad 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant t \leqslant 2\sqrt{2}$$

$$h^\circ(t) = \frac{t - \sqrt{2}}{2\sqrt{2}}, \qquad \frac{\sqrt{6}}{2} \leqslant t < 2\sqrt{2} - \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$h^\circ(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2}\right)t - \frac{1}{2}, \qquad 0 \leqslant t < \frac{\sqrt{6}}{2}$$

Оптимальное управление находится из принципа максимума (2.14) и равно

$$u^\circ(t) = -1, \quad 0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2}$$

$$u^\circ(t) = 1, \quad \sqrt{2} < t \leqslant 2\sqrt{2}$$

Оптимальная траектория касается ограничений при $t_1 = \sqrt{6}/2$, $t_2 = 2\sqrt{2} - \sqrt{6}/2$.

Авторы выражают глубокую благодарность А. Б. Куржанскому и М. И. Гусеву за полезное обсуждение работы.

Поступила 22 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. Линейные системы. М., «Наука», 1968.
2. *Куржанский А. Б., Осипов Ю. С.* К задачам об управлении при стесненных координатах. ПММ, 1969, т. 33, вып. 4.
3. *Кац И. Я., Куржанский А. Б.* О некоторых задачах наблюдения и управления в случайных обстоятельствах. Автоматика и телемеханика, 1970, № 12.
4. *Гусев М. И., Куржанский А. Б.* К оптимизации управляемых систем при наличии ограничений. I. Дифференциальные уравнения, 1971, т. 7, № 9.
5. Линейные неравенства и смежные вопросы. (Сб. статей под ред. Г. У. Куна и и А. У. Таккера.) М., Изд-во иностр. лит., 1959.
6. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.
7. *Иосида К.* Функциональный анализ. М., «Мир», 1967.
8. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения, т. 2. М., «Мир», 1967.