Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

ОБ ИГРОВОЙ ЗАДАЧЕ СБЛИЖЕНИЯ В СМЕШАННЫХ УПРАВЛЕНИЯХ

В. Ф. Россохин

(Свердловск)

Рассматривается нелинейная дифференциальная игра сближения конфликтно управляемой фазовой точки с заданным множеством. Доказываются достаточные условия для успешного завершения игры в классе смешанных стратегий. Эти условия базируются на экстремальной конструкции, введенной в работе [1] и модифицированной здесь применительно к обсуждаемому вопросу.

1. Постановка задачи. Пусть движение управляемой системы описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v) \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый n-мерный вектор системы; u и v — r-мерные векторные управляющие воздействия, подчиненные первому и второму игрокам соответственно и стесненные условиями $u \in P$, $v \in Q$, где P и Q — ограниченные замкнутые множества. Вектор-функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна по совокупности аргументов, в каждой ограниченной области липшицева по x и удовлетворяет условию продолжимости решений (1.1)

$$\| f(t, x, u, v) \| \leqslant \lambda (1 + \| x \|)$$

(λ — постоянная, $\| p \|$ — евклидова норма вектора p). В пространстве $\{x\}$ задано замкнутое множество M. Начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ зафиксирована.

Смешанные стратегии U первого игрока, тривиальную стратегию V_τ второго игрока и порождаемые ими из позиции $\{t_0, x_0\}$ движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U, V_\tau]$ системы (1.1) определим в соответствии с работой [2].

Рассматриваемая игровая задача сближения формулируется следующим образом.

Задача 1.1. Для позиции $\{t_0, x_0\}$ найти стратегию U°, обеспечивающую в некоторый момент времени $\vartheta \geqslant t_0$ выполнение условия $x[\vartheta] \in M$ для всякого движения $x[t] = x[t, t_0, x_0, U^\circ, V_\tau]$.

2. Программная задача. Пусть $\{\eta(du, dv)\}$ — множество всех регулярных борелевых мер $\eta(du, dv)$, нормированных на $P \times Q$, а $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}$ — множество всех функций $\eta_t(du, dv)$, определенных на некотором отрезке времени $[t_*, \vartheta]$ со значениями в $\{\eta(du, dv)\}$ и удовлетворяющих условию $\int\limits_P \int\limits_Q g(u, v)\, \eta_t(du, dv)$, есть измеримая функция на $[t_*, \vartheta]$ для любой $g(u, v) \in C(P \times Q)$, где $C(P \times Q)$ — пространство непрерывных вещественных функций, определенных на $P \times Q$ и имеющих норму $\| g \| = \sup \{| g(u, v) |, (u, v) \in P \times Q\}$.

Обозначим символом $L_1([t_*, \vartheta], C(P\times Q))$ лебегово пространство [3] функций $h(t, u, v)$, определенных и интегрируемых на $[t_*, \vartheta]$ со значениями в $C(P\times Q)$ и имеющих норму

$$\|h\| = \int\limits_{t_*}^{\vartheta} \sup_{(u,\, v)\in P\times Q} |h(t, u, v)|\, dt$$

а символом $L_1^*([t^*, \vartheta], C(P\times Q))$ — пространство, сопряженное с $L_1([t_*, \vartheta], C(P\times Q))$. Функции $\eta_t(du, dv)$ условимся рассматривать [3] как элементы $\langle\eta, h\rangle$ пространства $L_1^*([t_*, \vartheta], C(P\times Q))$ вида

$$\langle\eta, h\rangle = \iiint\limits_{t_*PQ}^{\vartheta} h(t, u, v)\,\eta_t(du, dv)\, dt$$

Согласно [3], множество $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}$ компактно в $*$-слабой топологии пространства $L_1^*([t_*, \vartheta], C(P\times Q))$. Кроме того, $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}$ выпукло.

Функции $\eta_t(du, dv)$ назовем программными управлениями. Программные движения $x(t) = x(t, t_*, x_*, \eta_t)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, порожденные программными управлениями $\eta_t(du, dv)$ из позиции $\{t_*, x_*\}$, определим как решения уравнения

$$(2.1)\qquad \dot{x}(t) = \iint\limits_{PQ} f(t, x(t), u, v)\,\eta_t(du, dv),\quad x(t_*) = x_*$$

Далее, пусть $\{\mu(du)\}$ и $\{\nu(dv)\}$ — множества всех регулярных борелевых мер $\mu(du)$ и $\nu(dv)$, нормированных на P и Q соответственно, а $\{\mu_t(du), [t_*, \vartheta]\}$ и $\{\nu_t(dv), [t_*, \vartheta]\}$ — множества функций $\mu_t(du)$ и $\nu_t(dv)$, определенных на $[t_*, \vartheta]$ со значениями в $\{\mu(du)\}$ и $\{\nu(dv)\}$ и таких, что функции

$$\int\limits_P g'(u)\,\mu_t(du),\qquad \int\limits_Q g''(v)\,\nu_t(dv)$$

измеримы на $[t_*, \vartheta]$ для любых $g'(u) \in C(P)$ и $g''(v) \in C(Q)$.

Образуем всевозможные функции $\mu_t(du)\,\nu_t(dv)$ при $\mu_t(du) \in \{\mu_t(du), [t_*, \vartheta]\}$ и $\nu_t(dv) \in \{\nu_t(dv), [t_*, \vartheta]\}$. Функции $\mu_t(du)\,\nu_t(dv)$ являются также программными управлениями, так как они определены на $[t_*, \vartheta]$ со значениями в $\{\eta(du, dv)\}$ и, согласно [4], функция $\int\limits_P\int\limits_Q g(u, v)\,\mu_t(du)\,\nu_t(dv)$ измерима на $[t_*, \vartheta]$ для $g(u, v) \in C(P\times Q)$).

Программой $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}_\pi$ назовем всякое $*$-слабо замкнутое множество программных управлений $\eta_t(du, dv)$, удовлетворяющее условиям: 1) программа $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}_\pi$ содержит хотя бы одно программное управление $\mu_t^*(du)\,\nu_t^*(dv)$; 2) если программа $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}_\pi$ содержит управление $\mu_t^*(du)\,\nu_t^*(dv)$, то она содержит и все управления $\mu_t(du)\,\nu_t^*(dv)$ при $\mu_t(du) \in \{\mu_t(du), [t_*, \vartheta]\}$. В силу $*$-слабой компактности множества $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}$ программа $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}_\pi$ является также множеством $*$-слабо компактным.

Сформулируем следующую программную задачу.

Задача 2.1. Заданы позиция $\{t_*, x_*\}$ и число $\vartheta > t_*$. Найти оптимальное программное управление $\eta_t^0(du, dv)$, удовлетворяющее условию ($\rho(x, M)$ — евклидово расстояние от точки x до множества M)

$$\rho(x^\circ(\vartheta, t_*, x_*, \eta_t^\circ), M) = \max_{\{\eta_t\}_\pi} \min_{\eta_t \in \{\eta_t\}_\pi} \rho(x(\vartheta, t_*, x_*, \eta_t), M) \tag{2.2}$$

Существование решения задачи 2.1 следует из свойств программных движений [3], $*$-слабой компактности программ и результатов работы [1]. Движение $x^\circ(t) = x^\circ(t, t_*, x_*, \eta_t^\circ)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, порожденное оптимальным программным управлением $\eta_t^\circ(du, dv)$, будем называть оптимальным программным движением. Программу $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta]\}_\pi$, доставляющую максимум в (2.2) и содержащую, очевидно, управление $\eta_t^\circ(du, dv)$, обозначим через $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta], x_*\}_\pi^\circ$ и назовем оптимальной программой, а $*$-слабо замкнутое объединение всех оптимальных программ $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta], x_*\}_\pi^\circ$ обозначим через $\{\eta_t(du, dv), [t_*, \vartheta], x_*\}_\pi^{\circ\circ}$ и назовем максимальной оптимальной программой.

3. Условия регулярности. Выберем позицию $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$ и число τ, $t_* < \tau < \vartheta$. Образуем множество $\{\mu\nu^*\}$ мер $\mu\nu^*$, где ν^* — некоторая мера из $\{\nu\}$, а меры μ пробегают все множество $\{\mu\}$. Рассмотрим вспомогательные движения $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*, \mu\nu^*)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau)$, описываемые уравнением

$$x^{*\cdot}(t) = \iint\limits_{PQ} f(t_*, x_*, u, v)\, \mu(du)\, \nu^*(dv), \quad x^*(t_*) = x_* \tag{3.1}$$

Конечные значения $x^*(\tau)$ движений (3.1) составят множество $X(\tau, \{t_*, x_*\}, \{\mu\nu^*\})$ которое, по свойствам множества $\{\mu\nu^*\}$, является органиченным замкнутым и выпуклым.

Обозначим символом $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta)$ правую часть (2.2). Пусть позиция $\{t_*, x_*\}$ такова, что $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) > 0$. Выберем какую-нибудь точку $x^* \in X$. Для этой точки построим [1] множество $Y(x^*)$ всех точек $x \in X$, для каждой из которых найдется по крайней мере одно программное управление η_t из $\{\eta_t, [\tau, \vartheta], x^*\}_\pi^{\circ\circ}$ — максимальной программы для позиции $\{\tau, x^*\}$ такое, что соответствующее программное движение $x(t) = x(t, \tau, x, \eta_t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.1) будет удовлетворять условию

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) + \varphi(\tau - t_*) \cdot (\tau - t_*)$$

$$\lim \varphi(\tau - t_*) = 0 \quad \text{при } \tau \to t_*$$

Обозначим символом $Y^*(x^*)$ выпуклую замкнутую оболочку множества $Y(x^*)$.

Сформулируем следующее условие регулярности игры.

Условие 3.1. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна, если для некоторого достаточно малого числа $\beta > 0$, для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) \in (0, \beta)$, всякого множества $\{\mu\nu^*\}$ и всякой точки $x^* \in X(\tau, \{t_*, x_*\}, \{\mu\nu^*\})$, $t_* < \tau < \vartheta$, для каждой точки $x^{**} \in Y^*(x^*)$ найдется управление $\eta_t \in \{\eta_t, [\tau, \vartheta], x^*\}_\pi^{\circ\circ}$

такое, что для соответствующего программного движения $x(t) = x(t, \tau, x^{**}, \eta_t)$ $(\tau \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.1) выполняется условие

$$\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) + \varphi^*(\tau - t_*) \cdot (\tau - t_*)$$
$$\lim \varphi^*(\tau - t_*) = 0 \quad \text{при } \tau \to t_*$$

равномерно по $x^* \in X(\tau, \{t_*, x_*\}, \{\mu\nu^*\})$.

Обозначим символом $Y_{\min}(x^*)$ множество точек $x^\circ \in X$, для которых выполнено соотношение

$$\min_{\eta_t \in \{\eta_t\}_\pi^\infty} \rho(x(\vartheta, \tau, x^\circ, \eta_t), M) = \min_{x \in X} \min_{\eta_t \in \{\eta_t\}_\pi^\infty} \rho(x(\vartheta, \tau, x, \eta_t), M)$$

где минимум берется по всем управлениям $\eta_t \in \{\eta_t, [\tau, \vartheta], x^*\}_\pi^\infty$. Пусть $Y_{\min}^*(x^*)$ — выпуклая замкнутая оболочка множества $Y_{\min}(x^*)$.

Сформулируем другое условие регулярности игры.

Условие 3.2. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна, если для некоторого достаточно малого числа $\beta > 0$, для всякой позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) \in (0, \beta)$, всякого множества $\{\mu\nu^*\}$ и всякой точки $x^* \in X(\tau, \{t_*, x_*\}, \{\mu\nu^*\})$, $t_* < \tau < \vartheta$ выполняется условие

$$\gamma(Y_{\min}^*(x^*), Y_{\min}(x^*)) \leqslant \varphi_*(\tau - t_*) \cdot (\tau - t_*)$$
$$\lim \varphi_*(\tau - t_*) = 0 \text{ при } \tau \to t_*$$

равномерно по $x^* \in X(\tau, \{t_*, x_*\}, \{\mu\nu^*\})$, и если программы $\{\eta_t, [\tau, \vartheta], x^*\}_\pi^\infty$ $*$-слабо непрерывны по x^* при $\varepsilon_0(\tau, x^*, \vartheta) \in (0, \beta)$. (Здесь $\gamma(Y_{\min}^* \cdot (x^*), Y_{\min}(x^*))$ — хаусдорфово расстояние между $Y_{\min}^*(x^*)$ и $Y_{\min}(x^*)$.

4. Множество программного поглощения W_0. Рассмотрим множество $W(\varepsilon)$, $\varepsilon \geqslant 0$ позиций $\{t, x\}$, удовлетворяющих условию $\varepsilon_0(t, x, \vartheta) \leqslant \varepsilon$, $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$. В силу непрерывности функции $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ по позиции $\{t, x\}$ (см. [1]) множество $W(\varepsilon)$ замкнутое. Кроме того, при условиях 3.1 или 3.2 и $\varepsilon \in [0, \beta)$ множество $W(\varepsilon)$ обладает свойством сильной $\tilde{u}$-стабильности [2,5].

Это свойство формулируется следующим образом. Некоторое множество W в области $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ пространства $\{t, x\}$ называется сильно $\tilde{u}$-стабильным, если каковы бы ни были позиция $\{t_*, x_*\} \in W$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$ и число $t^* \in (t_*, \vartheta]$, для любой меры $\nu \in \{\nu\}$ найдется движение $x[t] = x[t, t_*, x_*, \nu]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, для которого выполнится включение $\{t^*, x[t^*]\} \in W$.

Здесь $x[t] = x[t, t_*, x_*, \nu]$ — абсолютно непрерывная функция, удовлетворяющая начальному условию $x[t_*] = x_*$ и при почти всех $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ уравнению в контингенциях [6]

$$\dot{x}[t] \in F(t, x[t]; \nu) \tag{4.1}$$

где $F(t, x; \nu)$ — выпуклая оболочка всех векторов f_u вида

$$f_u = \int_Q f(t, x, u, v)\, \nu(dv), \quad u \in P.$$

Свойство сильной $\tilde{u}$-стабильности множества $W(\varepsilon)$ при $\varepsilon \in (0, \beta)$ вытекает из следующих лемм.

Лемма 4.1. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условия 3.1. Тогда, каковы бы ни были значение $\varepsilon \in (0, \beta)$, позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, и множество $\{\mu\nu^*\}$, для всякого числа $\alpha > 0$ найдется число $\delta > 0$, $t_* + \delta \leqslant \vartheta$ такое, что для любого $\tau_* \in (t_*, t_* + \delta]$ имеется хотя бы одна мера $\mu^*\nu^* \in \{\mu\nu^*\}$, которая порождает движение $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*, \mu^*\nu^*)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau_*)$ (3.1), удовлетворяющее условию

$$\{\tau_*, x^*(\tau_*)\} \in W(\varepsilon + {}^1/_2\alpha(\tau_* - t_*)) \tag{4.2}$$

Доказательство. Допустим, что лемма неверна. Тогда существуют число $\varepsilon \in (0, \beta)$, позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, и множество $\{\mu\nu^*\}$ такие, что найдется число $\alpha > 0$, для которого при всяком числе $\delta > 0$, $t_* + \delta \leqslant \vartheta$ существует $\tau_* \in (t_*, t_* + \delta]$ такое, что все движения $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*, \mu\nu^*)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau_*)$ (3.1) будут удовлетворять условию

$$\{\tau_*, x^*(\tau_*)\} \notin W(\varepsilon + {}^1/_2\alpha(\tau_* - t_*)) \tag{4.3}$$

Рассмотрим отображение $x^* \to Y^*(x^*)$. При предположении (4.3) никакой элемент $x^* \in X$ не может содержаться в своем образе $Y^*(x^*)$ при данном $\tau_* \in (t_*, t_* + \delta]$.

В самом деле, выберем $\delta > 0$ из соотношения $\sup\{\varphi^*(t),\ t \in (0, \delta]\} \leqslant {}^1/_2\alpha$, где φ^* —функция, фигурирующая в условии 3.1. Предположим теперь от противного, что некоторый элемент x^* содержится в своем образе $Y^*(x^*)$ для указанного $\tau_* \in (t_*, t_* + \delta_*]$. Тогда по условию 3.1 найдется управление $\eta_t \in \{\eta_t, [\tau_*, \vartheta], x^*\}_\pi^{\circ\circ}$, которое породит движение $x(t) = x(t, \tau_*, x^*, \eta_t)$ $(\tau_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$ (2.1), удовлетворяющее соотношению $\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon + \varphi^*(\tau_* - t_*)\cdot(\tau_* - t_*)$. По выбору δ и τ_* для этого же движения справедливо соотношение $\rho(x(\vartheta), M) \leqslant \varepsilon + {}^1/_2\ \alpha(\tau_* - t_*)$, которое означает выполнение включения (4.2), что противоречит (4.3). Отсюда и следует, что никакой элемент $x^* \in X$ не может содержаться в своем образе $Y^*(x^*)$.

Но отображение $x^* \to Y^*(x^*)$ удовлетворяет (см. [1]) всем условиям теоремы из [7] и, следовательно, имеет, по крайней мере, одну неподвижную точку, т. е. существует элемент $x^* \in X$, удовлетворяющий включению $x^* \in Y^*(x^*)$. Однако это включение, как было показано выше, невозможно. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Аналогичным образом доказывается следующая лемма, опирающаяся на условие 3.2.

Лемма 4.2. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условия 3.2. Тогда, каковы бы ни были значение $\varepsilon \in (0, \beta)$, позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, и множество $\{\mu\nu^*\}$, для всякого числа $\alpha > 0$ найдется число $\delta > 0$, $t_* + \delta \leqslant \vartheta$ такое, что для любого $\tau_* \in (t_*, t_* + \delta]$ имеется хотя бы одна мера $\mu^*\nu^* \in \{\mu\nu^*\}$, которая порождает движение $x^*(t) = x^*(t, t_*, x_*, \mu^*\nu^*)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau_*)$ (3.1), удовлетворяющее условию (4.2).

Зададим движения $x^{(\alpha)}[t] = x^{(\alpha)}[t, t_*, x_*, \nu]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ как абсолютно непрерывные функции, удовлетворяющие начальному условию $x^{(\alpha)}[t_*] = x_*$ и при почти всех $t_* \leqslant t \leqslant t^*$ уравнению в контингенциях

$$\dot{x}^{(\alpha)}[t] \in F^{(\alpha)}(t, x^{(\alpha)}[t];\ \nu) \tag{4.4}$$

где $F^{(\alpha)}(t, x; \nu)$ — евклидова α-окрестность $(\alpha > 0)$ множества $F(t, x; \nu)$ (4.1).

Лемма 4.3. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условий 3.1 или 3.2. Тогда, каковы бы ни были значение $\varepsilon \in (0, \beta)$, позиция $\{t_*, x_*\}$, для которой $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) = \varepsilon$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, и число $\alpha > 0$, для всякой меры $\nu^* \in \{\nu\}$ и всякого $t^* \in (t_*, \vartheta]$ найдется движение $x^{(\alpha)}[t] = x^{(\alpha)}[t, t_*, x_*, \nu^*]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ (4.4), удовлетворяющее условию

$$\{t^*, x^{(\alpha)}[t^*]\} \in W(\varepsilon + \alpha(t^* - t_*)) \tag{4.5}$$

Доказательство. Обозначим через $\tau_\alpha{}^\circ$ точную нижнюю грань множества значений $\tau_\alpha \in (t_*, \vartheta]$, для каждого из которых для всех движений $x^{(\alpha)}[t] = x^{(\alpha)}[t, t_*, x_*, \nu^*]$ $(t_* \leqslant t \leqslant \tau_\alpha)$ выполнится условие

$$\{\tau_\alpha, x^{(\alpha)}[\tau_\alpha]\} \notin W(\varepsilon + \alpha(\tau_\alpha - t_*))$$

Очевидно, $\tau_\alpha{}^\circ > t_*$. Примем вопреки лемме, что $\tau_\alpha{}^\circ < t^*$. Вследствие непрерывности функции $\varepsilon_0(t, x, \vartheta)$ и компактности пучка движений $x^{(\alpha)}[t] = x^{(\alpha)}[t, t_*, x_*, \nu^*]$ при $t_* \leqslant t \leqslant \tau_\alpha{}^\circ$ найдется, по крайней мере, одно движение $x_0^{(\alpha)}[t] = x_0^{(\alpha)}[t, t_*, x_*, \nu^*]$ из этого пучка, для которого будет выполнено включение

$$\{\tau_\alpha{}^\circ, x_0^{(\alpha)}[\tau_\alpha{}^\circ]\} \in W(\varepsilon + \alpha(\tau_\alpha{}^\circ - t_*))$$

Но, согласно лемме 4.1 (лемме 4.2), для позиции $\{\tau_\alpha{}^\circ, x_0^{(\alpha)}[\tau_\alpha{}^\circ]\}$, где $\varepsilon_0(\tau_\alpha{}^\circ, x_0^{(\alpha)}[\tau_\alpha{}^\circ], \vartheta) = \varepsilon_* \leqslant \varepsilon + \alpha(\tau_\alpha{}^\circ - t_*]$, можно найти $\delta > 0$, $\tau_\alpha{}^\circ + \delta \leqslant \vartheta$ такое, что при каждом $\tau_* \in (\tau_\alpha{}^\circ, \tau_\alpha{}^\circ + \delta]$ существует движение $x^*(t) = x^*(t, \tau_\alpha{}^\circ, x_0^{(\alpha)}[\tau_\alpha{}^\circ], \mu^*\nu^*)$ $(\tau_\alpha{}^\circ \leqslant t \leqslant \tau_*)$ (3.1), удовлетворяющее включению

$$\{\tau_*, x^*(\tau_*)\} \in W(\varepsilon_* + {}^1/_2\alpha(\tau_* - \tau_\alpha{}^\circ)) \tag{4.6}$$

При этом $\delta > 0$ можно выбрать так, чтобы еще выполнялось и условие

$$\int\limits_P\int\limits_Q f(\tau_\alpha{}^\circ, x_0^{(\alpha)}[\tau_\alpha{}^\circ], u, v)\,\mu^*(du)\,\nu^*(dv) \in F^{(\alpha)}(\tau_*, x^{(\alpha)}[\tau_*]; \nu^*)$$

Тогда из включения (4.6) будет следовать включение

$$\{\tau_*, x^{(\alpha)}[\tau_*]\} \in W(\varepsilon + \alpha(\tau_* - t_*))$$

которое противоречит определению $\tau_\alpha{}^\circ$. Полученное противоречие и доказывает лемму.

Лемма 4.4. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условий 3.1 или 3.2. Тогда для всякого значения $\varepsilon \in (0, \beta)$ множество $W(\varepsilon)$ — сильно $\tilde{u}$-стабильное.

Доказательство. Выберем позицию $\{t_*, x_*\} \in W(\varepsilon)$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, $\varepsilon \in (0, \beta)$, число $t^* \in (t_*, \vartheta]$ и меру $\nu \in \{\nu\}$. Зададим последовательность чисел $\alpha_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots)$, $\lim \alpha_k = 0$ при $k \to \infty$. Согласно лемме 4.3, для каждого числа α_k можно указать движение $x^{(\alpha_k)}[t] = x^{(\alpha_k)}[t, t_*, x_*, \nu]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$ (4.4) $(k = 1,2, \ldots)$, удовлетворяющее условию

$$\{t^*, x^{(\alpha_k)}[t^*]\} \in W(\varepsilon + \alpha_k(t^* - t_*)) \tag{4.7}$$

Из последовательности движений $x^{(\alpha_k)}[t] = x^{(\alpha_k)}[t, t_*, x_*, \nu]$ $(k = 1,2, \ldots)$ выберем подпоследовательность, равномерно сходящуюся к движению $x^*[t] = x^*[t, t_*, x_*, \nu]$ $(t_* \leqslant t \leqslant t^*)$, являющемуся, очевидно, движением (4.1). Но тогда для движения $x^*[t] = x^*[t, t_*, x_*, \nu]$ в силу (4.7) следует $\{t^*, x^*[t^*]\} \in W(\varepsilon)$. Лемма доказана.

Обозначим множество $W(\varepsilon)$ при $\varepsilon = 0$ символом W_0 и назовем множеством программного поглощения. Для множества W_0 из леммы 4.4 и [1] получаем следующий результат.

Лемма 4.5. Пусть при выбранном значении $\vartheta > t_0$ игра регулярна в смысле условий 3.1 или 3.2. Тогда множество программного поглощения W_0 — сильно $\tilde{u}$-стабильное.

5. Основные теоремы. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть при некотором значении $\vartheta > t_0$ начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ принадлежит множеству программного поглощения W_0, и игра регулярна в смысле условий 3.1 или 3.2. Тогда стратегия U°, экстремальная к множеству W_0, разрешает задачу 1.1.

Справедливость теоремы 5.1 вытекает непосредственно из леммы 4.5 и работ [2,8], причем стратегия U°, экстремальная к множеству W_0, определяется так же, как и в [2,8].

Сформулируем одно достаточное условие регулярности игры в смысле условия 3.1.

Условие 5.1. Скажем, что при некотором значении $\vartheta > t_0$ игра сильно регулярна, если функция $f(t, x, u, v)$ имеет непрерывные частные производные $\partial f / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и для всякой начальной позиции $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$, удовлетворяющей условию $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) \in (0, \beta)$, задача 2.1 имеет единственное решение $\eta_t^\circ(du, dv)$, и при этом точка $m^\circ \in M$, ближайшая к точке $x^\circ(\vartheta) = x^\circ(\vartheta, t_*, x_*, \eta_t^\circ)$, единственна.

Справедливо утверждение.

Лемма 5.1. Если при некотором значении $\vartheta > t_0$ выполнено условие 5.1, то при этом значении ϑ игра регулярна в смысле условия 3.1.

Лемма 5.1 доказывается рассуждениями, аналогичными примененным в [1].

Следствием леммы 5.1 и теоремы 5.1 является следующая теорема.

Теорема 5.2. Пусть функция $f(t, x, u, v)$ (1.1) имеет непрерывные частные производные $\partial f / \partial x_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ и при некотором значении $\vartheta > t_0$ позиция $\{t_*, x_*\}$, $t_0 \leqslant t_* < \vartheta$ удовлетворяет условию $\varepsilon_0(t_*, x_*, \vartheta) \in (0, \beta)$, а управление $\eta_t^\circ(\partial u, dv)$, разрешающее для этой позиции задачу 2.1, единственно и точка $m^\circ \in M$, ближайшая к точке $x^\circ(\vartheta) = x^\circ(\vartheta, t_*, x_*, \eta_t^\circ)$, единственна. Тогда если начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ принадлежит множеству программного поглощения W_0, то стратегия U°, экстремальная к множеству W_0, разрешает задачу 1.1.

Автор благодарит Н. Н. Красовского за постановку задачи и ценные советы.

Поступила 30 X 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Экстремальное управление в нелинейной дифференциальной игре. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
2. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Альтернатива для игровой задачи сближения. ПММ, 1970, т. 34, вып. 6.
3. *Warga J.* Function of relaxed controls. SIAM J. Control, 1967, vol. 5, № 4.
4. *Elliott R. J., Kalton N. J., Markus L.* Saddle points for linear differential games. Mathematics Institute University of Warwick COVENTRY. April 1971.
5. *Красовский Н. Н.* К теории дифференциальных игр. ПММ, 1970, т. 34, вып. 2.
6. *Филиппов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. Матем. сб., 1960, т. 51 (93), вып. 1.
7. *Kakutani S.* A generalization of Brouwer's fixed point theorem. Duke Math. J., 1941, vol. 8, N 3.
8. *Красовский Н. Н., Субботин А. И.* Экстремальные стратегии в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 196, № 2.