Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 62—50

РЕГУЛЯРНАЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ИГРА

Н. Н. Красовский

(Свердловск)

Обсуждается взаимосвязь между различными методами построения разрешающих стратегий в дифференциальных играх сближения — уклонения в рамках той формализации этих игр, которая составляет материал обзорных статей [1, 2].

1. Рассмотрим динамическую систему, описываемую дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = f(t, x, u, v), \quad u \in P, \quad v \in Q \tag{1.1}$$

Здесь x — фазовый фактор системы, u и v — векторы управляющих воздействий первого и второго игроков, P и Q — ограниченные и замкнутые множества. Функция $f(t, x, u, v)$ непрерывна, непрерывно дифференцируема по x и удовлетворяет условию ($\|x\|$ — евклидова норма вектора x)

$$\|f\| \leqslant \lambda(1 + \|x\|), \quad \lambda = \text{const} \tag{1.2}$$

По условиям игры в некотором вспомогательном пространстве $\{t, m\}$, где m — параметр, задано замкнутое множество M, сечения которого гиперплоскостями $t = \text{const}$ будем обозначать через $M(t)$. Будем предполагать множества $M(t)$ ограниченными. Пусть $T(t_0)$ — множество тех значений $t \geqslant t_0$, для которых сечения $M(t)$ непусты. Задана функция $\rho(t, x, m)$, определенная и непрерывная при всех возможных значениях, x и $m \in M(t)$ $(t \in T(t_0))$ и непрерывно дифференцируемая по x при

$$\alpha < \rho(t, x, m) < \beta \tag{1.3}$$

Пусть

$$\omega(t, x) = \min_{m \in M(t)} \rho(t, x, m) \tag{1.4}$$

Исход игры определяется функционалом

$$\varphi(x[\cdot]) = \inf_{t \in T(t_0)} \omega(t, x[t]) \tag{1.5}$$

который минимизируется первым игроком и максимизируется вторым. (Точка на месте аргумента той или иной функции означает, что речь идет не о значении функции при том или ином значении аргумента, а об этой функции как целом, как элементе функционального пространства).

В частности, если пространство $\{m\}$ совпадает с пространством $\{x\}$, причем

$$\rho(t, x, m) = \|x - m\| \tag{1.6}$$

и, стало быть, в (1.3) имеем $\alpha = 0$, то получаем стандартную игру сближения — уклонения [1] с множеством M в пространстве $\{t, x\}$. В этом случае от условия ограниченности множеств $M(t)$ можно отказаться.

Чтобы не выходить за рамки чистых стратегий [1] $U \div u(t, x)$ и $V \div \div v(t, x)$, будем предполагать, что во всех интересующих нас позициях $\{t, x\}$ при всяком выборе вектора s выполняется условие седловой точки маленькой игры [1]

$$\min_{u\in P} \max_{v\in Q} s'f(t, x, u, v) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'f(t, x, u, v) \tag{1.7}$$

(Если нет оговорки, рассматриваемые векторы трактуются как вектор-столбцы; штрих означает транспонирование.)

В противном случае надлежит трансформировать используемые ниже конструкции в соответствии с рецептами из [1, 2] для аналогичных игр, рассматриваемых в классах пар: смешанная стратегия — смешанная стратегия или стратегия — контрстратегия.

Итак, формализуя движения $x[t, t_0, x_0, U]$ и $x[t, t_0, x_0, V]$ как пределы ломаных Эйлера [1] $x_\Delta[t, t_0, x_*, U, v[\cdot]]$ и $x_\Delta[t, t_0, x_*, V, u[\cdot]]$, являющихся решениями уравнений

$$x_\Delta^{\bullet} = f(t, x_\Delta, u(\tau_i, x_\Delta[\tau_i]), v[t]) \quad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1})$$
$$x_\Delta^{\bullet} = f(t, x_\Delta, u[t], (x_\Delta^{\bullet}, x_\Delta[\tau_i^*])) \quad (\tau_i^* \leqslant t < \tau_{i+1}^*)$$

получим следующие две задачи для первого и второго игроков соответственно.

Задача 1. Дана позиция $\{t_0, x_0\}$. Найти оптимальную минимаксную стратегию $U^\circ \div u^\circ(t, x)$, которая удовлетворяет условию

$$\sup_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot, t_0, x_0, U^\circ]) = \min_U \sup_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot, t_0, x_0, U])$$

Задача 2. Дана позиция $\{t_0, x_0\}$. Найти оптимальную максиминную стратегию $V^\circ \div v^\circ(t, x)$, которая удовлетворяет условию

$$\inf_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot, t_0, x_0, V^\circ]) = \max_V \inf_{x[\cdot]} \varphi(x[\cdot, t_0, x_0, V])$$

2. Рассматриваемая игра характеризуется следующей теоремой об альтернативе, в которую трансформируется альтернатива, сформулированная в [1] для стандартной игры сближения — уклонения. Пусть $T(t_0, \vartheta)$ — совокупность всех значений t из отрезка $[t_0, \vartheta]$, для которых сечения $M(t)$ непусты. Обозначим

$$\varphi_\vartheta(x[\cdot]) = \min_{t\in T(t_0, \vartheta)} \omega(t, x[t]) \tag{2.1}$$

Тогда при условии (1.7) справедливо утверждение.

Теорема 2.1. Какова бы ни была позиция $\{t_0, x_0\}$ и числа $\vartheta > t_0$ и c, либо существует стратегия $U_c \div u_c(t, x)$, которая гарантирует неравенство

$$\varphi_\vartheta(x[\cdot, t_0, x_0, U_c]) \leqslant c \tag{2.2}$$

либо существует стратегия $V \div v\ (t,\ x)$, которая гарантирует неравенство

$$(2.3) \qquad \varphi_\vartheta\ (x\ [\cdot,\ t_0,\ x_0,\ V]) > c$$

Иначе: либо существует стратегия $V_c \div v_c\ (t,\ x)$, которая гарантирует неравенство

$$(2.4) \qquad \varphi_\vartheta^-\ (x\ [\cdot,\ t_0,\ x_0,\ V_c]) \geqslant c$$

либо существует стратегия $U \div u\ (t,\ x)$, которая гарантирует неравенство

$$(2.5) \qquad \varphi_\vartheta\ (x\ [\cdot,\ t_0,\ x_0,\ U]) < c$$

Из этой теоремы вытекает существование седловой точки для дифференциальной игры, складывающейся из задач 1 и 2 при выборе в них $\varphi = \varphi_\vartheta$.

3. Пусть при каком-то выборе $\vartheta > t_0$ и c существует стратегия U_c, гарантирующая выполнение условия (2.2). Тогда, согласно [1], существует u-стабильный мост $W_u^{\vartheta,c}$, который образует замкнутое множество в пространстве $\{t,\ x\}$, проходит через позицию $\{t_0,\ x_0\}$ и в момент ϑ обрывается на множестве $L_c^*\ (\vartheta)$, где

$$L_c^*\ (t) = [\{t,\ x\} : \omega\ (t,\ x) \leqslant c]$$

т. е. сечение $W_u^{\vartheta,c}\ (\vartheta)$ лежит в $L_c^*\ (\vartheta)$. (Без ограничения общности предполагаем, что множество $L_c^*(\vartheta)$ непусто, ибо иначе, ничего не меняя по существу дела, можно заменить ϑ на наибольшее из чисел $\vartheta^* < \vartheta$, которые удовлетворяют этому условию). Стратегия $U_c \div u_c\ (t,\ x)$, экстремальная [1] к мосту $W_u^{\vartheta,c}$, удерживает всякое движение $x\ [t,\ t_0,\ x_0,\ U_c]$ на $W_u^{\vartheta,c}$ вплоть до встречи этого движения с $L_c^*\ (\tau)$ при $\tau \leqslant \vartheta$, чем и достигается гарантированное выполнение условия (2.2).

Пусть, напротив, при каком-то выборе $\vartheta > t_0$ и c существует стратегия V_c, гарантирующая выполнение условия (2.4). Тогда существует v-стабильный мост $W_v^{\vartheta,c}$, который образует замкнутое множество в полосе $t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta$ пространства $\{t,\ x\}$, проходит через позицию $\{t_0,\ x_0\}$ и не пересекается с множеством

$$L_c = [\{t,\ x\} : t \in T\ (t_0,\ \vartheta),\ \omega\ (t,\ x) < c]$$

Стратегия $V_c \div v_c\ (t,\ x)$, экстремальная к мосту $W_v^{\vartheta,c}$, удерживает всякое движение $x\ [t,\ t_0,\ x_0,\ V_c]$ на $W_v^{\vartheta,c}$ вплоть до момента ϑ, чем и достигается гарантированное выполнение условия (2.4).

Утверждение о существовании нужного моста $W_u^{\vartheta,c}$ или $W_v^{\vartheta,c}$ носит характер чистой теоремы существования. Однако можно искать мост $W_u^{\vartheta,c}$ или $W_v^{\vartheta,c}$ на базе одного из известных более или менее эффективных подходов. В частности, мост $W_u^{\vartheta,c}$ или $W_v^{\vartheta,c}$, можно искать методом экстремального прицеливания [2], либо в форме априори стабильного моста [2]. Сравнение этих двух подходов в их приложении к рассматриваемой здесь игре сближения — уклонения и составляет предмет данной статьи. Вообще говоря, упомянутые способы построения мостов $W_u^{\vartheta,c}$ и $W_v^{\vartheta,c}$ приводят к различным результатам. Однако здесь будут рассмотрены регулярные для каждого из этих методов случаи, когда оба метода приводят к одинаковым результатам и доставляют каждый способы построения оптимальных стратегий U° и V°.

4. В статье [2] описано построение мостов $W_u^{\vartheta,c}$ и $W_v^{\vartheta,c}$ на основе вспомогательных программных конструкций экстремального прицеливания, отвечающих позиционной игре сближения — уклонения, рассматриваемой в рамках смешанных стратегий. Опишем вариант этих конструкций [3], отвечающий рассматриваемой позиционной игре сближения — уклонения в рамках чистых стратегий U и V.

Пусть выбрана слабоизмеримая по t функция $\nu_t\ (dv)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, значения которой $\nu\ (dv)$ — вероятностные меры на Q. Программа $\{\eta_t \mid \nu_t\}_\Pi$ определяется как множество всех возможных слабоизмеримых по t функций $\eta_t\ (du,\ dv)$ $(t_* \leqslant t \leqslant \vartheta)$, значения которых $\eta\,(du,\ dv)$ — вероятностные меры на $P\times Q$, удовлетворяющие условиям

$$(4.1)\qquad \int\limits_P \eta_t\,(du,\ dv)=\nu_t\,(dv)$$

при почти всех t. Программные движения $x\,(t,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.)$ определяются как решения дифференциального уравнения

$$(4.2)\qquad x^{\boldsymbol\cdot}=\int\limits_P\int\limits_Q f\,(t,\ x,\ u,\ v)\,\eta_t\,(du,\ dv),\quad x\,(t_*)=x_*$$

Вспомогательная программная задача формулируется следующим образом.

Задача 4.1. Дана начальная позиция $\{t_*,\ x_*\}$ и выбрано число $\vartheta>t_*$. Требуется найти τ_0, максимизирующую программу $\{\eta_t\mid\nu_t^\circ\}_\Pi$, и оптимальное управление $\eta_t^\circ\in\{\eta_t\mid\nu_t^\circ\}_\Pi$, удовлетворяющие условию

$$(4.3)\qquad \min_{t\in T\,(t_*,\ \vartheta)}\ \max_{\{\eta_t\,|\nu_t|\}_\pi}\ \min_{\eta_t}\omega\,(t,\ x\,(t,\ t_*,x_*,\ \eta_.))=\omega\,(\tau_0,x\,(\tau_0,t_*,x_*,\ \eta_.^\circ))=$$
$$=\varepsilon_0\,(t_*,\ x_*)$$

Будем предполагать выполненным следующее условие.

Условие 4.1. При выбранном значении ϑ для всякой начальной позиции $\{t_*,\ x_*\}$ из области $\varepsilon_0\,(t_*,\ x_*)\in(\alpha,\ \beta)$, $t_*\leqslant\vartheta$ найдется, по крайней мере, один минимизирующий момент τ_0 из (4.3), такой, что во всякой максимизирующей программе из (4.3), отвечающей этому значению τ_0, будет содержаться лишь единственное, по существу, оптимальное управление $\eta_t^{\boldsymbol\cdot}$, и соответствующее минимизирующее значение m_0 из (1.4), удовлетворяющее, стало быть, условию

$$\omega\,(\tau_0,\ x\,(\tau_0,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.^\circ))=\rho\,(\tau_0,x\,(\tau_0,x\,(\tau_0,\ t_*,\ x_*,\ \ \eta_.^\circ),\ m_0))=$$
$$=\min_{m\in M\,(\tau_0)}\ \rho\,(\tau_0,\ x\,(\tau_0,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.^\circ),\ m)$$

также единственно.

Множество значений τ_0, удовлетворяющих этому условию, обозначим $T^\circ\,(t_*,\ \ \vartheta)$.

При выполнении условия 4.1 оптимальное управление для задачи 4.1 при $\varepsilon_0\,(t_*,\ x_*)\in(\alpha,\ \beta)$ и $\tau_0\in T^\circ\,(t_*,\ \vartheta)$ удовлетворяет следующему условию максимина, которое отвечает в данном максиминном случае задачи 4.1 принципу максимума [4] для обыкновенных программных задач оптимального управления.

При почти всех $t\in[t_*,\ \vartheta]$ справедливо равенство

$$s'\,(t)\int\limits_P\int\limits_Q f\,(t,\ x\,(t,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.^\circ),\ u,\ v)\,\eta_t^\circ\,(du,\ dv)=$$
$$=\max_{v\in Q}\ \min_{u\in P}s'\,(t)\,f\,(t,\ x\,(t,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.^\circ),\ u,v)$$

Здесь $s\,(t)$ — решение задачи

$$(4.4)\qquad s^{\boldsymbol\cdot}=-\left[\int\limits_P\int\limits_Q\left\{\frac{\partial f}{\partial x}\right\}'\eta_t^\circ\,(du,\ \ dv)\right]s$$

$$s\,(\tau_0)=\left[\frac{\partial\omega}{\partial x}\right]_{(\tau_0)}=\left[\frac{\partial\rho}{\partial x}\right]_{\{\tau_0,\ x\,(\tau_0,\ t_*,\ x_*,\ \eta_.^\circ),\ m_0\}}$$

причем $\{\partial f / \partial x\}$ — матрица Якоби, вычисленная на оптимальном минимизирующем движении $x(t, t_*, x_*, \eta_\cdot^\circ)$.

В случае собственно линейного уравнения движения (1.1), когда

$$\dot{x} = A(t)\,x + f(t, u, v) \tag{4.5}$$

требования условия 4.1 можно ослабить, потребовав только, чтобы для всякого оптимального движения $x(t, t_*, x_*, \eta_\cdot^\circ)$ из одной и той же программы значения $s(t)$ (4.4) оказывались всякий раз одними и теми же. Если в случае уравнения (4.5) имеем еще множества $M(t)$ выпуклые, то такое ослабленное условие 4.1 обязательно выполняется автоматически.

Предполагая условие 4.1 выполненным, будем называть исходную позиционную игру сближения — уклонения, складывающуюся из задач 1 и 2 при $\varphi = \varphi_\vartheta$, регулярной (I), если будет выполнено еще следующее условие.

Введем следующие обозначения. Символом $S(t_*, x_*; \tau_0)$ обозначим множество всех векторов $s = s(t_*)$ (4.4), отвечающих всем возможным оптимальным решениям η_t° задачи 4.1 для данной позиции $\{t_*, x_*\}$ из области $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (\alpha, \beta)$ и при отмеченном минимизирующем значении τ_0. Пусть далее, $\{t_*, x_*\}$ — опять какая-нибудь позиция из области $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (\alpha, \beta)$ и $\{t^*, x^*\}$ $(t^* > t_*)$ — некоторая близкая к ней позиция. Пусть τ_0^* — какой-нибудь минимизирующий момент из задачи 4.1, отвечающие позиции $\{t^*, x^*\}$; $\{\eta_t \mid \nu_t^*; \tau_0^*\}_\Pi$ — пусть максимизирующая программа из условия вида (4.3), отвечающая позиции $\{t_*, x_*\}$, но для момента τ_0^*, а $\eta_t^* \in \{\eta_t \mid \nu_t^*; \tau_0^*\}_\Pi$ — минимизирующее управление из условия вида (4.3) для момента τ_0^*, но для позиции $\{t^*, x^*\}$; наконец, пусть m^*—минимизирующее значение в условии $\omega(\tau_0^*, x(\tau_0^*, t^*, x^*, \eta_\cdot^*)) = \rho(\tau_0^*, x(\tau_0^*, t^*, x^*, \eta_\cdot^*), m^*) = \rho(\tau_0^*, x(\tau_0^*, t^*, x^*, \eta_\cdot^*), m)$ при $\min m \in M(\tau_0^*)$. Обозначим символом $s(t^*)$ вектор вида (4.4), где следует только заменить τ_0 на τ_0^*, $x(\tau_0, t_*, x_*, \eta_\cdot^\circ)$ на $x(\tau_0^*, t^*, x^*, \eta_\cdot^*)$ и m° на m^*. Символом $S^*(t_*, x_*)$ обозначим множество всех векторов s, которые являются пределами для векторов вида $s(t^*)$ при всевозможных выборах позиций $\{t^*, x^*\} \to \{t_*, x_*\}$ и отвечающих этим позициям минимизирующих моментов τ_0^*. В частности, если множества $M(t)$ непрерывны по $t \in [t_0, \vartheta]$ в хаусдорфовой метрике, то в качестве множества $S^*(t_*, x_*)$ следует выбрать просто множество всех векторов $s = s(t_*)$ (4.4), отвечающих всем возможным оптимальным решениям η_t° задачи 4.1 для данной позиции.

Условие 4.2. Какова бы ни была позиция $\{t_*, x_*\}$ $(t_* \leqslant \vartheta)$ из области $\varepsilon_0(t_*, x_*) \in (\alpha, \beta)$, должны быть выполнены два требования.

1°. При всяком выборе $v^* \in Q$ найдутся $\tau_0 \in T^\circ(t_*, \vartheta)$ и вектор f^*

$$f^* \in \mathrm{co}\,\{f(t_*, x_*, u, v^*),\ u \in P\}$$

удовлетворяющие неравенствам

$$s'f^* \leqslant \max_{v\in Q}\ \min_{u\in P} s'f(t_*, x_*, u, v) \tag{4.6}$$

при всех значениях $s \in S(t_*, x_*; \tau^\circ)$.

2°. При всяком выборе $u^* \in P$ найдется вектор

$$f^* \in \mathrm{co}\,\{f(t_*, x_*, u^*, v),\ v \in Q\}$$

удовлетворяющий неравенствам

$$s'f^* \geqslant \max_{v\in Q}\ \min_{u\in P} s'f(t_*, x_*, u, v) \tag{4.7}$$

при всех значениях $s \in S^*(t_*, x_*)$.

Если игра регулярна, то множества

$$W_u^{\vartheta,c} = [\{t,\ x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \ \varepsilon_0(t,\ x) \leqslant c]$$

при $c \in [\alpha,\ \beta)$ являются u-стабильными мостами, а множества

$$W_v^{\vartheta,c} = [\{t,\ x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \ \varepsilon_0(t,\ x) \geqslant c]$$

при $c \in (\alpha,\ \beta]$ являются v-стабильными мостами. Стало быть, стратегии U_c и V_c, экстремальные к этим мостам $W_u^{\vartheta,c}$ и $W_v^{\vartheta,c}$, обеспечивают соответственно неравенства (2.2) при $c \in [\alpha,\ \beta)$ и неравенства (2.4) при $c \in (\alpha,\ \beta]$; при $c \in (\alpha,\ \beta)$ они образуют, стало быть, седловую точку $\{U_c,\ V_c\}$ рассматриваемой игры для начальной позиции $\{t_0,\ x_0\}$, для которой $\varepsilon_0(t_0,\ x_0) \in (\alpha,\ \beta)$.

5. Другим путем построения мостов $W_u^{\vartheta,c}$ и $W_v^{\vartheta,c}$ является поиск их в форме априори стабильных мостов [2] на базе подходящих интегральных многообразий. Начнем с той конструкции, которая отвечает понятию верхней программы из работы [5]. Пусть $\mu\ (du \mid t,\ x,\ v)$ $(v \in Q)$ — какая-либо функция, значения которой $\mu\ (du)$ — вероятностные меры на P. Построим ломаные Эйлера $x_\Delta^*\ [t,\ t_0,\ x_*,\ \mu(\cdot)]$ как решения дифференциального уравнения

$$x_\Delta^{\cdot *} = \int\limits_P f(t,\ x_\Delta^*,\ u,\ v\ [\tau_i])\ \mu\ (du \mid \tau_i,\ x_\Delta^*\ [\tau_i],\ v\ [\tau_i]) \qquad (\tau_i \leqslant t < \tau_{i+1}) \tag{5.1}$$

и составим затем интегральное многообразие X_u^* из всех возможных пределов $x^*\ (t,\ t_0,\ x_0,\ \mu\ (\cdot))$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ для сходящихся последовательностей таких ломаных Эйлера (при условиях $\lim \sup_i (\tau_{i+1} - \tau_i) = 0$. Можно проверить, что множество

$$W_u^\vartheta = [\{t,\ x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \ x = x^*\ (t,\ t_0,\ x_0,\ \mu\ (\cdot)) \in X_u^*] \tag{5.2}$$

образует u-стабильный мост. Аналогичным образом, выбирая функцию $\nu\ (dv \mid t,\ x,\ u)$ $(u \in P)$, значения которой $\nu\ (dv)$ — вероятностные меры на Q, построим интегральное многообразие X_v^* из всех возможных пределов $x^*\ (t,\ t_0, x_0, \nu\ (\cdot))\ (t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ для ломаных Эйлера $x_\Delta^*\ [t, t_0,\ x_*,\ \nu\ (\cdot)]$, являющихся решениями дифференциального уравнения

$$x_\Delta^{\cdot *} = \int\limits_Q f(t,\ x_\Delta^*,\ u\ [\tau_i],\ v)\ \nu\ (dv)\ \tau_i,\ x_\Delta^*\ [\tau_i],\ u\ [\tau_i]) \tag{5.3}$$

Множество

$$W_v^\vartheta = [\{t,\ x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta,\ \ x = x^*\ (t,\ t_0,\ x_0,\ \nu\ (\cdot)) \in X_v^*] \tag{5.4}$$

образует v-стабильный мост.

Вспомогательные задачи, связанные с мостами W_u^ϑ (5.2) и W_v^ϑ (5.4), формулируются следующим образом.

Задача 5.1. Дана начальная позиция $\{t_0,\ x_0\}$ и выбрано число $\vartheta > t_0$. Требуется найти функцию $\mu^0\ (du \mid t,\ x,\ v)$ и значение τ_0, удовлетворяющие условию

$$\begin{aligned} &\min_{\mu(\cdot)}\ \min_{t \in (t_0,\ \vartheta)}\ \max_{x(\cdot)} \omega(t,\ x\ (t,\ t_0,\ x_0,\ \mu\ (\cdot))) = \\ &= \omega\ (\tau_0,\ x\ (\tau_0,\ t_0,\ x_0,\ \mu^\circ\ (\cdot))) = \varepsilon^*\ (t_0,\ x_0) \end{aligned} \tag{5.5}$$

Задача 5.2. Дана начальная позиция $\{t_0, x_0\}$ и выбрано число $\vartheta > t_0$. Требуется найти функцию $\nu^0(dv \mid t, x, u)$, удовлетворяющую условию

$$(5.6)\qquad \max_{\nu(\cdot)} \min_{x(\cdot)} \min_{t \in T(t_0, \vartheta)} \omega(t, x(t, t_0, x_0, \nu(\cdot))) = \\ = \omega(\tau_0, x(\tau_0, t_0, x_0, \nu^\circ(\cdot))) = \varepsilon_*(t_0, x_0)$$

Существование оптимальной функции $\nu^0(dv \mid t, x, u)$, разрешающей задачу 5.2, вытекает из теоремы 2.1. В самом деле, в качестве такой функции $\nu^0(dv \mid t, x, u)$ достаточно выбрать функцию-меру $\nu^\circ(dv \mid t, x)$, сосредоточенную в точках $v = v^\circ(t, x)$, где $v^\circ(t, x)$ — функция, отвечающая оптимальной стратегии V°, разрешающей задачу 2 при $\varphi = \varphi_\vartheta$. Вопрос о существовании функции $\mu^\circ(du \mid t, x, v)$, разрешающей задачу 5.1, так просто не решается. Этот вопрос формально снова можно решить на основании теоремы 2.1, если несколько видоизменить условие задачи 5.1. Именно, каждое движение $x(t, t_*, x_*, u(\cdot))$ можно оборвать в тот момент $\tau_{x(\cdot)} \in [t_0, \vartheta]$, когда на этом движении впервые достигает минимума величина $\omega(t, x(t, t_0, x_0, u(\cdot))$, и затем вместо (5.5) искать функцию $\mu^\circ(\cdot)$ из условия минимума величины

$$(5.7)\qquad \min_{\mu(\cdot)} \max_{x(\cdot)} \omega(\tau_{x(\cdot)}, x(\tau_{x(\cdot)}, t_0, x_0, \mu(\cdot))) = \varepsilon^{**}(t_0, x_0)$$

Тогда в качестве функции $\mu^\circ(du \mid t, x, v)$, разрешающей такую видоизмененную задачу 5.1, опять достаточно выбрать функцию-меру $\mu^\circ(du \mid t, x)$, сосредоточенную в точках $u = u^\circ(t, x)$, где $u^\circ(t, x)$ — функция, отвечающая оптимальной стратегии U°, разрешающей задачу 1 при $\varphi = \varphi_\vartheta$. Из того факта, что стратегии $U^\circ \div u^\circ(t, x)$ и $V^\circ \div v^\circ(t, x)$ образуют седловую точку игры, складывающейся из задач 1 и 2, вытекает равенство $\varepsilon_*(t_0, x_0) = \varepsilon^{**}(t_0, x_0)$. В то же время мосты W_u^ϑ и W_v^ϑ, построенные на многообразиях $X_{u^\circ}^*$ и $X_{v^\circ}^*$, где в $X_{u^\circ}^*$ движения $x(t, t_0, x_0, \mu^\circ(\cdot))$ обрываются каждое в свой момент $t = \tau_{x(\cdot)}$, являются стабильными. Стало быть, решения задач (5.6) и (5.7) доставляют оптимальные стабильные мосты W_u^ϑ и W_v^ϑ для задач 2 и 1 соответственно. Однако таким путем, разумеется, не получается нового эффективного метода решения задачи, ибо при условии (1.7) задачи (5.6) и (5.7) являются, по сути дела, просто переформулировкой задач 2 и 1. Тем не менее в условиях (5.6) и (5.7) содержится уже в явном виде одно облегчающее решение обстоятельство, ибо вследствие теоремы 2.1 для решения задач 1 и 2 в классе функции $u(t, x)$ и $v(t, x)$ оказывается достаточным найти решение аналогичных задач (5.7) и (5.6) в более широком классе функций $\mu(du \mid t, x, v)$ и $\nu(dv \mid t, x, u)$. Для поиска же оптимальных функций $\mu^\circ(du \mid t, x, v)$ и $\nu^\circ(dv \mid t, x, u)$ и порождаемых ими мостов W_u^ϑ и W_v^ϑ, построенных на соответствующих интегральных многообразиях $X_{u^\circ}^*$ и $X_{v^\circ}^*$, можно уже использовать те или иные искусственные приемы. Один такой известный прием и будет привлечен в п. 6, причем в рассматриваемом там регулярном случае можно будет воспользоваться огрубленной задачей 5.1, не заменяя условие (5.5) более сложным условием (5.7).

Итак, во всяком случае при условии (1.7), множества W_u^ϑ (5.2) и W_v^ϑ (5.4) являются стабильными. Поэтому стратегия $U^* \div u^* (t, x)$, экстремальная к мосту W_u^ϑ (5.2) при $\mu(\cdot) = \mu^\circ(\cdot)$ в (5.2), гарантирует в позиционной игровой задаче 1 о сближении значение функционала

$$\varphi_\vartheta (x[\cdot]) \leqslant \varepsilon^* (t_0, x_0) \tag{5.8}$$

а стратегия $V^* \div v^* (t, x)$, экстремальная к мосту W_v^ϑ (5.4) при $\nu(\cdot) = \nu^\circ(\cdot)$ в (5.4), гарантирует в позиционной игровой задаче 2 об уклонении значения функционала

$$\varphi_\vartheta (x[\cdot]) \geqslant \varepsilon_* (t_0, x_0) \tag{5.9}$$

6. Обсудим построение априори стабильных мостов W_u^ϑ (5.2) и W_v^ϑ (5.4), построенных на интегральных многообразиях X_u^* и X_v^* из п. 5, путем погружения этих интегральных многообразий в некоторые подходящие интегральные многообразия X_u и X_v, порождаемые некоторыми дифференциальными уравнениями в контингенциях (см. [2]). В обсуждаемой здесь форме конструкция таких уравнений в контингенциях была изучена в работах [6,7]. В случае линейного уравнения движения такие конструкции восходят к прямому методу из работ [8, 9].

Пусть множества

$$H(t, x) = \bigcap_{v \in Q} \operatorname{co} \{f(t, x, u, v),\ u \in P\} \tag{6.1}$$

непусты в некоторой области G пространства $\{t, x\}$. Вектор h содержится в $H(t, x)$ тогда и только тогда, когда при всяком выборе вектора s выполнено неравенство

$$s'h \geqslant \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t, x, u, v) \tag{6.2}$$

Рассмотрим функцию

$$\varkappa(s, t, x) = \max_{v \in Q} \min_{u \in P} s'f(t, x, u, v) \tag{6.3}$$

свойства которой определяют регулярность игры.

Составим интегральное многообразие X, складывающееся из всех решений $x(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ дифференциального уравнения в контингенциях

$$\dot{x} \in H(t, x) \tag{6.4}$$

полагая, что все это интегральное многообразие помещается в области G, где множества $H(t, x)$ непусты.

Пусть

$$\begin{aligned} \varepsilon^\circ(t_0, x_0) &= \min_{x(\cdot)} \min_{t \in T(t_0, \vartheta)} \omega(t, x(t, t_0, x_0)) = \\ &= \omega(\tau^\circ, x^\circ(\tau^\circ, t_0, x_0)),\ x(\cdot) \in X \end{aligned} \tag{6.5}$$

Выберем решение $x^0(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ из условия (6.5). Это решение образует u-стабильный мост

$$W_u^{\tau^\circ} = [\{t, x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ,\ x = x^\circ(t, t_0, x_0)] \tag{6.6}$$

Будем говорить, что игра, складывающаяся из задач 1 и 2, регулярна (II), если, выполнено условие (1.7) и для всякой позиции $\{t, x\}$, которая может встретиться на движениях $x(t, t_0, x_0)$ с начальными данными $\{t_0, x_0\}$ из области $\varepsilon^\circ(t_0, x_0) \in [\alpha, \beta]$, $t_0 \leqslant \vartheta$, функция $\varkappa(s, t, x)$ (6.3) вогнута по s. (При этом предполагается, что для всякой позиции $\{t_0, x_0\}$ из выбранной области величина $\varepsilon^\circ(t_0, x_0)$ (6.5) имеет смысл, т. е. соответствующие движения $x(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ остаются в области G, где множества $H(t, x)$ непусты). Если игра регулярна (II), то множество

(6.7) $$W_v^\vartheta = [\{t, x\} : t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta, \ x = x(t, t_0, x_0) \in X]$$

образует v-стабильный мост.

Таким образом, если игра регулярна (II), то при $\varepsilon^\circ(t_0, x_0) \in [\alpha, \beta]$ стратегия $U^\circ \div u^0(t, x)$, экстремальная к мосту $W_u^{\tau^\circ}$ (6.6), гарантирует в позиционной игровой задаче 1 о сближении значение функционала

(6.8) $$\varphi_\vartheta(x[\cdot]) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, x_0)$$

а стратегия $V^\circ \div v^\circ(t, x)$, экстремальная к мосту W^ϑ_v (6.7), гарантирует в позиционной игровой задаче 2 об уклонении значение функционала

(6.9) $$\varphi_\vartheta(x[\cdot]) \geqslant \varepsilon^\circ(t_0, x_0)$$

и, стало быть, пара этих стратегий образует опять седловую точку рассматриваемой позиционной игры, складывающейся из задач 1 и 2 при выборе $\varphi = \varphi_\vartheta$.

7. Основные выводы формулируются следующим образом. Пусть зафиксировано значение ϑ. Предположим, что в области

(7.1) $$\varepsilon_0(t, x) \in (\alpha, \beta), \ t \leqslant \vartheta$$

выполнено неравенство

(7.2) $$\varepsilon^\circ(t, x) \leqslant \varepsilon_0(t, x)$$

Выберем позицию $\{t_0, x_0\}$ из области (7.1). Зафиксируем минимизирующее значение τ° из условия (6.5). Пусть $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ — соответствующее минимизирующее движение из (6.5). Тогда это решение $x^\circ(t, t_0, x_0)$ уравнения (6.4), удовлетворяющее, стало быть, условию

(7.3) $$\omega(\tau^\circ, x^\circ(\tau^\circ, t_0, x_0)) = \varepsilon^\circ(t_0, x_0) \quad (\tau^\circ \leqslant \vartheta)$$

является одновременно и оптимальным программным движением $x(t, t_0, x_0, \eta.^\circ)$ для задачи 4.1, отвечающим тому же минимизирующему моменту $\tau_0 = \tau^\circ$.

Это утверждение является следствием того факта, что вследствие u-стабильности моста $W_u^{\tau_0}$ (6.6), построенного на выбранном решении $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$, при любом выборе меры $\nu_t^*(dv)$ найдется мера $\eta_t^*(du, dv)$, связанная с $\nu_t^*(dv)$ условием (4.1) и такая, что порожденное ею программное движение $x(t, t_0, x_0, \eta^* \cdot)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ будет лежать на u-стабильном мосту $W_u^{\tau_0}$. Стало быть, это программное движение $x(t, t_0, x_0, \eta.^*)$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ$ совпадет с $x(t, t_0, x_0)$ и даст величину $\omega(\tau^\circ,$

$x(\tau^\circ, t_0, x_0, \eta_*^\circ)) = \omega(\tau^\circ, x^\circ(\tau^\circ, t_0, x_0)) = \varepsilon^\circ(t_0, x_0)$. Но тогда $\varepsilon_0(t_0, x_0) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, x_0)$. Вместе с противоположным неравенством (7.2) это означает выполнение равенства

$$\varepsilon_0(t, x) = \varepsilon^\circ(t, x) \tag{7.4}$$

Поскольку при предположении (7.2) всякое минимизирующее движение $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ из задачи (6.5) оказывается одновременно и минимизирующим движением $x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^\circ)$ из задачи 4.1, отвечающим тому же значению $\tau_0 = \tau^\circ$, можно подсчитать для этого движения $x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^\circ)$ вектор $s(t_0)$ (4.4), где надлежит заменить $\{t_*, x_*\}$ на $\{t_0, x_0\}$.

Введем в связи с этим обстоятельством следующее условие.

Условие 7.1. Скажем, что выполнено это условие, если для всякой позиции $\{t_0, x_0\}$ из области (7.1), (7.2) найдется, по крайней мере, одно минимизирующее значение τ° для задачи (6.5), такое, что для этого значения $\tau^\circ = \tau_0$ выполнится требование условия 4.1. Более того, при этом τ_0 все те минимизирующие программные движения $x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^\circ)$, которые совпадают с одним и тем же движением $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0)$ должны давать одно и то же значение вектора $s(t_0)$ (4.4).

Предположим теперь, что выполнено условие 7.1. Выберем опять позицию $\{t_0, x_0\}$ из области (7.1), (7.2) и зафиксируем значение $\tau^\circ = \tau_0$, удовлетворяющее требованиям условия 7.1. Тогда этому значению τ^0 будет отвечать лишь единственное решение $x^\circ(t, t_0, x_0)$, минимизирующее (6.5).

В самом деле, предположим противное. Пусть $x^{\circ(1)}(t, t_0, x_0)$ и $x^{\circ(2)}(t, t_0, x_0)$ — два различных минимизирующих движения (6.4), отвечающие выбранному значению τ°. Пусть далее $\{\eta_t \mid \nu_t^\circ\}_\Pi$ — какая-нибудь максимизирующая программа из (4.3), отвечающая тому же значению $\tau_0 = \tau^\circ$. Опять вследствие u-стабильности каждого из мостов $W_u^{\tau^\circ(1)}$ и $W_u^{\tau^\circ(2)}$ вида (6.6), построенных на движениях $x^{\circ(1)}(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ и $x^{\circ(2)}(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ соответственно, заключаем, что в программе $\{\eta_t \mid \nu_t^\circ\}_\Pi$ найдутся меры $\eta_t^{(1)}$ и $\eta_t^{(2)}$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0 = \tau^\circ)$, такие, что выполнятся тождества $x^{\circ(1)}(t, t_0, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^{(1)})$ и $x^{\circ(2)}(t, t_0, x_0) \equiv x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^{(2)})$ при $t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0 = \tau^\circ$. Но это будет означать, что при $\tau_0 \in T^\circ(t_0, \vartheta)$ в максимизирующей программе $\{\eta_t \mid \nu_t^\circ\}_\Pi$ содержится два различных по существу минимизирующих программных управления $\eta_t^{(1)}$ и $\eta_t^{(2)}$. А это противоречит условию 4.1. Полученное противоречие и доказывает единственность минимизирующего решения $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$. Однако тогда все минимизирующие движения $x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^\circ)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau_0 = \tau^\circ)$ задачи 4.1 при выбранном значении τ_0 будут совпадать с одним и тем же движением $x(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$, поэтому из условия 7.1 вытекает, что для того значения $\tau_0 = \tau^\circ$ все минимизирующие движения $x(t, t_0, x_0, \eta_\cdot^\circ)$ дают одно и то же значение вектора $s(t_0)$ (4.4). Но в таком случае при указанном выборе $\{t_0, x_0\}$ и $\tau^\circ = \tau_0$ условие (4.6) будет выполняться уже автоматически.

Далее, пусть в условии (6.2) функция $\varkappa$ (6.3) вогнута по s. Тогда при всяком выборе вектора $u \in P$ множество

$$F_u(t, x, u) = \mathrm{co}\,\{f(t, x, u, v),\ v \in Q\} \tag{7.5}$$

пересекается с $H(t, x)$. Но это, согласно (6.2), означает выполнения условия (4.7).

В самом деле, тогда при всяком выборе $u \in P$ во множестве (7.5) находится даже вектор $f^* = h \in H(t, x)$, который удовлетворяет условию (4.6) при всяком выборе s, а не только при выборе s из какого-то подмножества в пространстве $\{s\}$.

Суммируя все рассуждения, приходим к следующему выводу.

Пусть для всех позиций $\{t, x\}$ из области (7.1) выполнено неравенство 7.2). Тогда для позиций $\{t_0, x_0\}$ из области (7.1) выполнено равенство 7.4). Если при этом выполняется условие 7.1, то из регулярности (II) игры сближения — уклонения, складывающейся из задач 1 и 2 при $\varphi = \varphi_\theta$, следует регулярность (I) этой игры.

В случае, если уравнение движения (1.1) имеет вид собственно линейного уравнения (4.5) и имеет место (1.7) причем множества $M(t)$ выпуклые, дополнительные предположения (условие 4.1, условие (7.2) и условие 7.1) выполняются автоматически и поэтому оказывается, что всякий раз, как игра сближения — уклонения регулярна (II), она регулярна (I) и справедливо равенство (7.4).

В самом деле, выполнение условия 4.1 (в ослабленной форме, отвечающей уравнению (4.5), условию (1.7) и выпуклым $M(t)$) вытекает прямо из выпуклости $M(t)$ и области достижимости

$$G = [\{\tau_0, x\} : x = x(\tau_0, t_0, x_0, \eta_\cdot, \quad \eta_\cdot \in \{\eta_t \mid \nu_t^\circ\}_\Pi]$$

при всяком выборе программы $\{\eta_t \mid \nu_t^\circ\}_\Pi$. Равенство (7.4) следует прямо из выражений для $\varepsilon_0(t_*, x_*)$ и $\varepsilon^\circ(t_*, x_*)$, которые получаются известным образом (см., например, [10])

$$\begin{aligned}(7.6)\qquad \varepsilon_0(t_*, x_*) = \min_{\tau} \max_{\|l\|=1} \Big(\int_{t_*}^{\tau} \max_{v\in Q} \min_{u\in P} l'X(\tau, t) f(t, u, v)\, dt + \\ + l'X(\tau, t_*) x_* - \rho_{M(\tau)}(l)\Big) \quad \text{при } \varepsilon_0(t_*, x_*) \geqslant 0\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(7.7)\qquad \varepsilon^\circ(t_*, x_*) = \min_{\tau} \max_{\|l\|=1} \Big(\int_{t_*}^{\tau} \min_{h^*\in H} l'X(\tau, t) h^*(t)\, dt + \\ + l'X(\tau, t_*) x_* - \rho_{M(\tau)}(l)\Big) \quad \text{при } \varepsilon^\circ(t_*, x_*) \geqslant 0\end{aligned}$$

Здесь $X(t, t_*)$ — фундаментальная матрица решений однородного уравнения $\dot{x} = A(t)x$, $\rho_{M(\tau)}(l)$ — опорная функция множества — $M(\tau)$, $H^*(t)$ — множество векторов

$$(7.8)\qquad H^*(t) = [h^* : s'h^* \geqslant \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'f(t, u, v) = \varkappa^*(s, t), \ s \in \{s\}]$$

Функция $\varkappa^*(s, t)$ по предположению вогнута. Но тогда при всяком выборе вектора s найдется вектор $h^*(s)$, удовлетворяющий равенству [11]

$$(7.9)\qquad s'h^*(s) = \max_{v\in Q} \min_{u\in P} s'f(t, u, v)$$

из которого и следует совпадение значений $\varepsilon_0(t_*, x_*)$ (7.6) и $\varepsilon^\circ(t_*, x_*)$ (7.7). Наконец, выполнение условия 7.1 в рассматриваемом собственно линейном случае следует из того замечания, что в случае уравнения (4.5) значение вектора $s(t_*)$, (4.4) не зависит от выбора управления η_t°, если все рассматриваемые управления η_t° порождают одно и то же минимизирующее движение $x^\circ(t, t_0, x_0) = x(t, t_0, x_0, \eta.^\circ)$, задающее, стало быть, одно и то же краевое условие (4.4) для вектор-функции $s(t)$.

В общем нелинейном случае не удается указать условия, гарантирующие выполнение дополнительных предложений (условия 4.1 и 7.1 и неравенство (7.2)). Однако можно указать условия частного вида. Одно из этих условий таково. При выполнении условия 4.1 при всяком выборе позиции $\{t, x\}$ и ненулевого вектора s найдется лишь единственная мера $\eta_t^*(du, dv)$, удовлетворяющая условию

$$(7.10)\qquad \int_P\int_Q s'f(t, x, u, v)\,\eta_t^*(du, dv) = \min_{u\in P}\int_Q s'f(t, x, u, v)\,\nu_t^*(dv) = \max_{v\in Q}\min_{u\in P} s'f(t, x, u, v)$$

причем меры η_t^* и ν_t^* связаны условием (4.1). Или можно отказаться от априорного требования условия 4.1, но зато оговорить существование, по крайней мере, одного минимизирующего момента τ° из (6.5), которому отвечает лишь единственное минимизирующее движение $x^\circ(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \tau^\circ)$ и притом значение m_0 из условия (1.4) при $t = \tau^\circ$ и $x = x^\circ(\tau^\circ, t_0, x_0)$ также должно быть единственным. К этому условию далее снова достаточно добавить условие единственности меры η_t^* из условия (7.10), условие максимина, и липшицевость получающегося уравнения (4.4) по s.

Наконец, в общем случае соотношения между регулярностью (I) и регулярностью (II) игры характеризуются несколько иначе с такой стороны. Предположим, что игра регулярна (II) и в то же время выполнено условие 4.1 и условие (4.6). Тогда $\varepsilon_0(t, x) = \varepsilon^\circ(t, x)$ при $\varepsilon_0(t, x) \in [\alpha, \beta)$ и из регулярности (II) вытекает и выполнение условия (4. 7), т. е. снова игра регулярна (I).

Обратимся теперь к конструкциям из п.5. Пусть в общем нелинейном случае игра регулярна (II). Тогда $\varepsilon_*(t, x) = \varepsilon^*(t, x) = \varepsilon^\circ(t, x)$, и задача 5.1 разрешается функцией $\mu^\circ(du) = \mu^\circ(du \mid t, x, v)$, которую можно выбрать из условия

$$(7.11)\qquad \int_P f(t, x, u, v)\,\mu^\circ(du) = x^{\cdot\circ}(t, t_0, x_0)$$

при $\{t, x\} = \{t, x^\circ(t)\}$ и

$$(7.12)\qquad [x - x^\circ(t)]'\int_P f(t, x, u, v)\,\mu^\circ(du) = \min_{\mu(\cdot)}[x - x^\circ(t)]'\int_P f(t, x, u, v)\,\mu(du)$$

при других $\{t, x\}$. Здесь $x^\circ(t) = x^\circ(t, t_0, x_0)$ — какое-нибудь из решений задачи (6.5). Задача 5.2 разрешается функцией $\nu^\circ(dv) = \nu^\circ(dv \mid t, x, u)$, которая выбирается из условия

$$(7.13)\qquad \int_Q f(t, x, u, v)\,\nu^\circ(dv) \in H(t, x)$$

Справедливость высказанного утверждения вытекает из следующих замечаний. Функция $\mu^\circ(du)$, найденная из условий (7.11), (7.12), аналогичных условиям, которые определяют стратегию, экстремальную к мосту $W_u^{\tau^\circ}$ (6.6),как и позиционная экстремальная стратегия, обеспечивает скольжение по u-стабильному мосту $W_u^{\tau^\circ}$ (6.6) вплоть до момента $t = \tau^\circ$ всех движений $x^*(t, t_0, x_0, \mu^\circ(\cdot))$, являющихся пределами ломаных Эйлера $x_\Delta^*(t, t_0, x_*, \mu^\circ(\cdot))$ (5.1). Отсюда следует неравенство

$$\varepsilon^*(t_0, x_0) \leqslant \varepsilon^\circ(t_0, x_0) \tag{7.14}$$

Далее, возможность выбора меры $\nu^\circ(dv)$ нз условия (7.13) при всяком выборе $u \in P$ следует из того факта, что при условии вогнутости функции $\varkappa(s, t, x)$ (6.3) множества $F_v(t, x, u)$ (7.5) и $H(t, x)$ имеют непустое пересечение. Но далее все движения $x^*(t, t_0, x_0, \nu^\circ(\cdot))$, являющиеся пределами ломаных Эйлера $x_\Delta^*(t, t_0, x_0, \nu^\circ(\cdot))$ (5.3) при указанном выборе меры $\nu^\circ(dv \mid t, x, u) = \nu^\circ(dv)$ (7.13), содержатся в семействе всех движений $x(t, t_0, x_0)$ $(t_0 \leqslant t \leqslant \vartheta)$ уравнения (6.4). Стало быть, v-стабильный мост W_v^ϑ (5.4), построенный на движениях $x^*(t, t_0, x_0, \nu^\circ(\cdot))$, будет содержаться в v стабильном мосту W_v^ϑ (6.7). Отсюда следует неравенство

$$\varepsilon_*(t_0, x_0) \geqslant \varepsilon^\circ(t_0, x_0) \tag{7.15}$$

Наконец, теперь из неравенств (7.14), (7.15) и из того факта, что в случае регулярности (II) игры $\varepsilon^\circ(t, x_0)$ есть цена игры, следует оптимальность указанных функций $\mu^\circ(du \mid t, x, v)$ и $\nu^\circ(dv \mid t, x, u)$.

В случае собственно линейного уравнения движения (4.5) функции $\mu^\circ(du \mid t, x, v)$ и $\nu^\circ(dv \mid t, x, v)$ в случае регулярности (II) игры можно выбирать аналогичным образом, но уже независящими от x и тогда эти функции приобретают смысл верхних программ из работы [5]. В самом деле, функцию $\mu^\circ(du \mid t, v)$ можно выбирать тогда из условия

$$\int_P f(t, u, v)\,\mu^\circ(dv) = \dot{x}^\circ(t, t_0, x_0) - Ax^\circ(t, t_0, x_0)$$

а функцию $\nu^\circ(dv \mid t, u)$ — из условия

$$\int_Q f(t, u, v)\,\nu^\circ(dv) = H^*(t)$$

где $H^*(t)$ — множество (7.8).

Поступила 17 XII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. I. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 2.
2. *Красовский Н. Н.* Дифференциальная игра сближения — уклонения. II. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1973, № 3.
3. *Ченцов А. Г.* Об игровых задачах сближения и уклонения. ПММ, 1974, т. 38, вып. 1.
4. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко К. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. М., «Наука», 1969.
5. *Красовский Н. Н.* Программные конструкции для позиционных дифференциальных игр. Докл. АН СССР, 1973, т. 211, № 6.
6. *Тарлинский С. И.* Об одной позиционной задаче наведения. Докл. АН СССР, т. 207, № 1.
7. *Тарлинский С. И.* Об одной линейной дифференциальной игре сближения. Докл. АН СССР, т. 209, № 6.
8. *Понтрягин Л. С.* О линейных дифференциальных играх. 2. Докл. АН СССР, 1967, т. 175, № 4.
9. *Мищенко К. Ф.* Задачи преследования и уклонения от встречи в теории дифференциальных игр. Изв. АН СССР. Техн. кибернетика, 1971, № 5.
10. *Красовский Н. Н.* Программное поглощение в дифференциальных играх. Докл. АН СССР, 1971, т. 201, № 2.
11. *Рокафеллар Р. Т.* Выпуклый анализ. М., «Мир», 1973.