Кривые *3* и *4* определяют в зависимости от p значения параметров ψ и ω, которые являются характеристиками докритического состояния оболочки. (В частности, с помощью ψ вычисляется наибольшее значение кольцевого напряжения; $\sup|\sigma_2| \simeq \simeq E\mu p\psi / 2$, а с помощью ω — наибольшее значение угла поворота; $\sup|\vartheta| \simeq \omega$. Оба эти значения достигаются на крае оболочки. Любопытно, что значения ω, определяемые кривой *4* при $p > 3$, близки к $\pi / 2$, тогда как решение линейной задачи осесимметричного изгиба приводит к значениям ω в виде прямой *5*. По наибольшему значению кольцевого напряжения может быть определена область упругого деформирования оболочки.

Кривой *2* изображена зависимость от $\sqrt{\mu}$ критического значения параметра нагрузки $k = Q^* / Q^\circ$ ($Q^\circ \simeq 16.35\, Eh\mu^3$ — критическое значение внешнего усилия при определении докритического состояния по линейной теории). Для сравнения приведена в виде кривой *1* (жирная линия) соответствующая зависимость из [1]. Пунктирный участок кривой *2* выходит за пределы области определения тонких оболочек неравенством $h / R \leqslant 1 / 20$. Его следует трактовать как формальное продолжение по параметру μ решения рассматриваемой задачи на собственные значения.

Существенное расхождение между кривой *1*, отвечающей решению нелинейной задачи в первом приближении [1], и кривой *2*, соответствующей уточненному решению нелинейной задачи, начинается со значения $\sqrt{\mu} \simeq 0.13$. Однако основной вывод статьи [1] остается верен: линеаризация докритического состояния допустима лишь при весьма малых значениях отношения h / R. В частности, при $h / R \leqslant 1.74 \cdot 10^{-4} \cdot \sqrt{3(1-\nu^2)}$ погрешность в величине критической нагрузки из-за линеаризации не превышает 5%. За пределами этой области погрешность быстро растет с ростом отношения h / R.

С помощью представленных здесь результатов могут быть уточнены также графические зависимости, приведенные в [2].

Поступила 7 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Куршин Л. М., Шкутин Л. И.* К задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
2. *Куршин Л. М., Шкутин Л. И.* К поставновке задач о локальной устойчивости оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 4.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

Строится решение осесимметричной задачи для трансверсально изотропных тел, выраженное через обобщенные аналитические функции. Получены формулы перемещений и напряжений, аналогичные соответствующим формулам плоской задачи. Указаны представления обобщенных аналитических функций через аналитические. Приведен аналог интеграла типа Коши, что дает возможность приведения граничных задач к интегральным уравнениям. В качестве примера рассмотрено действие сил, распределенных по окружности внутри трансверсально изотропного пространства.

Плоские задачи теории упругости для трансверсально изотропных тел эффективно решаются при помощи аналитических функций комплексного переменного [1].

В работах [2,3] было рассмотрено решение осесимметричных и неосесимметричных задач для тел вращения при помощи аналитических функций и контурных интегралов. В случае изотропной упругой среды было предложено решение осесимметричных задач при помощи одного класса обобщенных аналитических функций [4].

1. Пусть $U_k(z, r)$ и $V_k(z, r)$ — комплексные функции, удовлетворяющие системе уравнений

$$\gamma_k \frac{\partial U_k}{\partial z} = \left(\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r}\right) V_k, \qquad \frac{\partial U_k}{\partial r} = -\gamma_k \frac{\partial V_k}{\partial z} \qquad (k = 1; 2) \tag{1.1}$$

где параметр γ_k — некоторое число, вообще говоря, комплексное. Эти функции, очевидно, удовлетворяют дифференциальным уравнениям

$$\Delta_k U_k = 0, \qquad \left(\Delta_k - \frac{1}{r^2}\right) V_k = 0 \tag{1.2}$$

$$\left(\Delta_k = \gamma_k^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

Введем комплексные переменные $t_k = z_k + ir$ и $t_k^* = z_k - ir$ $(z_k = z / \gamma_k)$ и функции

$$\Phi_k(t_k, t_k^*) = U_k(z, r) + iV_k(z, r) \tag{1.3}$$

$$\Phi_k^*(t_k, t_k^*) = U_k(z, r) - iV_k(z, r)$$

Тогда систему (1.1) можно переписать в виде

$$2\frac{\partial \Phi_k}{\partial t_k^*} - \frac{\Phi_k - \Phi_k^*}{t_k - t_k^*} = 0 \qquad \left(2\frac{\partial}{\partial t_k^*} = \frac{\partial}{\partial z_k} + i\frac{\partial}{\partial r}\right) \tag{1.4}$$

$$2\frac{\partial \Phi_k^*}{\partial t_k} - \frac{\Phi_k - \Phi_k^*}{t_k - t_k^*} = 0 \qquad \left(2\frac{\partial}{\partial t_k} = \frac{\partial}{\partial z_k} - i\frac{\partial}{\partial r}\right)$$

На введенные здесь функции будем налагать условия четности, считая U_k четной функцией относительно r, а V_k — нечетной функцией. Тогда

$$U_k(z, r) = U_k(z, -r), \qquad V_k(z, r) = -V_k(z, -r) \tag{1.5}$$

$$\Phi_k(t_k, t_k^*) = \Phi_k^*(t_k^*, t_k)$$

В дальнейшем придется рассматривать два случая значений параметра γ_k $(k = 1, 2)$: случай а), когда γ_1 и γ_2 — комплексно-сопряженные числа ($\gamma_k = \bar{\gamma}_j$; $k + j = 3$), и случай б), когда γ_1 и γ_2 — вещественные неравные числа ($\gamma_k = \bar{\gamma}_k$, $\gamma_k \neq \gamma_j$).

В случае а) $t_k^* = \bar{t}_j$, и можно, не нарушая предыдущих равенств, ввести соотношения

$$U_k = \bar{U}_j, \qquad V_k = \bar{V}_j, \qquad \Phi_k^*(t_k, t_k^*) = \overline{\Phi_j(t_j, t_j^*)} \tag{1.6}$$

В случае б) $t_k^* = \bar{t}_k$, и можно считать функции U_k и V_k вещественными. Тогда

$$U_k = \bar{U}_k, \qquad V_k = \bar{V}_k, \qquad \Phi_k^*(t_k, t_k^*) = \overline{\Phi_k(t_k, t_k^*)} \tag{1.7}$$

Подставляя (1.6) и (1.7) в (1.4), можно убедиться, что в случае б) $\Phi_k(t_k, \bar{t}_k)$ — обобщенные аналитические функции в смысле И. Н. Векуа [5]. В случае а) они принадлежат несколько более широкому классу, однако основные свойства обобщенных аналитических функций сохраняются и для них.

2. Рассмотрим осесимметричную задачу теории упругости для трансверсально изотропной среды. Дифференциальные уравнения равновесия в цилиндрических координатах z, r (z — ось упругой симметрии) имеют вид

$$(2.1)\qquad \left[A_{11}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)+A_{44}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]u+(A_{13}+A_{44})\frac{\partial^2 w}{\partial z\partial r}=0$$

$$(A_{13}+A_{44})\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial u}{\partial z}+\left[A_{44}\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)\frac{\partial}{\partial r}+A_{33}\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]w=0$$

Здесь w и u — аксиальное и радиальное перемещения, A_{11}, A_{13}, A_{33}, A_{44} — модули упругости [1].

Обозначим

$$(2.2)\qquad \begin{aligned} A_k &= (A_{33}-A_{44}\gamma_k^2)\,/\,(A_{11}A_{44})\\ B_k &= (A_{11}\gamma_k^2-A_{44})\,/\,(A_{11}A_{44})\\ D &= (A_{13}+A_{44})\,/\,(A_{11}A_{44}), \qquad (D^2\gamma_k^2=A_kB_k)\end{aligned}$$

Здесь под γ_k ($k = 1; 2$) понимаются корни характеристического уравнения (приведенного в скобках в (2.2)), удовлетворяющие условию $\operatorname{Re}\gamma_k > 0$. Эти корни обратны по величине параметрам s_k, введенным в [1] для случая осесимметричной деформации, и могут быть либо комплексно-сопряженными, либо вещественными, причем случай равных корней здесь рассматривать не будем.

Введем функции F и f соотношениями

$$(2.3)\qquad A_k\frac{\partial w}{\partial z}+D\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)u=F,\qquad B_k\frac{\partial u}{\partial z}-D\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{f}{A_{44}}$$

Тогда уравнения (2.1) можно представить в форме

$$(2.4)\qquad A_{33}D\frac{\partial F}{\partial z}=A_k\left(\frac{\partial}{\partial r}+\frac{1}{r}\right)f,\qquad A_{11}B_k\frac{\partial F}{\partial r}=-D\frac{\partial f}{\partial z}$$

Сопоставим (2.4) с (1.1). Учитывая равенство $A_{33}\,/\,A_{11}=\gamma_k^2\gamma_j^2$ ($k+j=3$), можно убедиться, что функции $A_{11}F$ и αf, где $\alpha = D\,/\,(B_k\gamma_j)$, удовлетворяют системе (1.1) с параметром γ_j; их комбинация типа (1.3) составляет обобщенную аналитическую функцию.

Будем рассматривать равенства (2.3) как систему дифференциальных уравнений относительно w и u. Общее решение этой системы имеет вид

$$(2.5)\qquad \begin{aligned} &w=p_kU_k+p_jU_j, \qquad u=-q_kV_k-q_jV_j\\ &(q_k=p_k\gamma_kD\,/\,B_k)\end{aligned}$$

Здесь первые слагаемые представляют собой общее решение системы (2.3) с нулевой правой частью; функции U_k и V_k удовлетворяют уранениям (1.1) с параметром γ_k. Вторые слагаемые — одно из частных решений полной системы (2.3). Будем полагать, что U_j и V_j связаны с правыми частями этой системы равенствами

$$p_j\frac{\partial U_j}{\partial z}=\frac{A_{11}F}{\gamma_j^2-\gamma_k^2},\qquad p_j\frac{\partial V_j}{\partial z}=\frac{\alpha f}{\gamma_j^2-\gamma_k^2}$$

и удовлетворяют уравнениям (1.1) с параметром γ_j (что возможно в силу (2.4)). Множители p_k и p_j произвольны, но являются либо комплексно-сопряженными, либо вещественными числами. Их значения будут приняты из соображений удобства записи формул напряжений.

Перейдем к обобщенным аналитическим функциям при помощи (1.3). Учитывая (1.6), (1.7), убедимся, что для случаев а) и б) формулы (2.5) можно записать в виде

$$(2.6)\qquad w=\operatorname{Re}(p_1\Phi_1+p_2\Phi_2),\qquad u=\operatorname{Re}(iq_1\Phi_1+iq_2\Phi_2)$$

Если z, r истолковать как прямоугольные координаты в плоскости меридионального сечения тела, то w будет четной функцией относительно r, а u — нечетной. Это согласуется с условиями (1.5).

3. При определении напряжений удобно перейти к техническим упругим постоянным. Характеристическое уравнение и коэффициенты формул (2.5), (2.6) будут иметь вид

$$\left(1-\nu_z^2\frac{E_r}{E_z}\right)\gamma_k^4-\left[\frac{E_z}{G_z}-2\nu_z(1+\nu_r)\right]\gamma_k^2+(1-\nu_r^2)\frac{E_z}{E_r}=0$$

$$p_k=-\frac{\gamma_k}{E_z}\left[\left(1-\nu_z^2\frac{E_r}{E_z}\right)\gamma_k^2+\nu_z(1+\nu_r)\right]$$

$$q_k=-\frac{1}{E_z}\left[(1-\nu_r^2)\frac{E_z}{E_r}+\nu_z(1+\nu_r)\gamma_k^2\right]$$

Используя известные зависимости, связывающие перемещения и напряжения трансверсально-изотропного упругого тела, найдем выражения напряжений через обобщенные аналитические функции

$$\sigma_z=-\operatorname{Re}(\gamma_1^2\Phi_1'+\gamma_2^2\Phi_2')\qquad\left(\Phi_k'=\gamma_k\frac{\partial}{\partial z}\Phi_k\right)\tag{3.1}$$

$$\tau_{zr}=-\operatorname{Re}(i\gamma_1\Phi_1'+i\gamma_2\Phi_2')$$

$$\sigma_r=\operatorname{Re}(\Phi_1'+\Phi_2')-2G_r\frac{u}{r}$$

$$\sigma_\theta=\nu_r\sigma_r+\nu_z\frac{E_r}{E_z}\sigma_z+E_r\frac{u}{r}\qquad(r\neq0)$$

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\frac{1+\nu_r}{2}\operatorname{Re}(\Phi_1'+\Phi_2')+\frac{\nu_z}{2}\frac{E_r}{E_z}\sigma_z\qquad(r=0)$$

Формулы (2.6) и (3.1) аналогичны соответствующим формулам, выражающим компоненты плоской деформации через аналитические функции [1].

При заданных напряжениях функции Φ_k определены с точностью до выражения a_k+ib_k/r (обобщенной постоянной), причем

$$q_1b_1+q_2b_2=0\qquad(a_1=\bar a_2,\ b_1=\bar b_2\ \text{или}\ \operatorname{Im}\ a_k=\operatorname{Im}b_k=0)$$

Если заданы перемещения, то следует положить дополнительно $p_1a_1+p_2a_2=0$.

4. Уравнения (1.1) и равенства (1.5) будут удовлетворены, если функции U_k и V_k представить в виде интегралов

$$U_k(z,r)=\frac{r}{\pi i|r|}\int_{t_k^*}^{t_k}\frac{\varphi_k(\zeta_k)\,d\zeta_k}{\sqrt{(\zeta_k-t_k)(\zeta_k-t_k^*)}}\tag{4.1}$$

$$V_k(z,r)=-\frac{1}{\pi i|r|}\int_{t_k^*}^{t_k}\frac{\varphi_k(\zeta_k)(\zeta_k-z_k)\,d\zeta_k}{\sqrt{(\zeta_k-t_k)(\zeta_k-t_k^*)}}$$

Здесь $\varphi_k(\zeta_k)$ — аналитическая функция комплексного переменного $\zeta_k=x_k+$ $+iy$ $(x_k=x/\gamma_k)$. Отсюда вытекает представление обобщенных аналитических функций через аналитические

$$\Phi_k(t_k,t_k^*)=-\frac{2}{|t_k-t_k^*|}\int_{t_k^*}^{t_k}k(\zeta_k)\sqrt{\frac{\zeta_k-t_k^*}{\zeta_k-t_k}}\,d\zeta_k\tag{4.2}$$

$$\Phi_k' = \frac{\partial}{\partial z_k}\Phi_k = -\frac{2}{|t_k - t_k^*|}\int\limits_{t_k^*}^{t_k}\frac{d\varphi_k}{d\zeta_k}\sqrt{\frac{\zeta_k - t_k^*}{\zeta_k - t_k}}\,d\zeta_k \tag{4.3}$$

Условия (1.6) или (1.7) удовлетворяются, если соответственно полагать

$$\varphi_k(\zeta_k) = \overline{\varphi_j(\bar{\zeta}_j)}, \qquad \varphi_k(\zeta_k) = \overline{\varphi_k(\bar{\zeta}_k)} \tag{4.4}$$

Выражения (4.1) — (4.3) представляют собой естественное обобщение результатов, полученных в [4]. Они пригодны, когда плоская область, занимаемая меридиональным сечением тела, пересекается осью z. При этом для точек оси z равенства (4.1), (4.2) переходят в следующие:

$$\Phi_k(z_k, z_k) = U_k(z, 0) = \varphi_k(z_k), \qquad V_k(z, 0) = 0 \tag{4.5}$$

Отметим, что в формулах (4.1)—(4.3) можно перейти к интегрированию по контуру области (вводя множитель $^1/_2$) и заменить граничные значения аналитической функции произвольной функцией, определенной на контуре (плотностью интеграла) [4]. Все эти представления можно использовать для выражения при помощи (3.1) и (2.6) компонентов напряжения и перемещения через аналитические функции или контурные интегралы. Аналогичные выражения (для случая б)) были получены иным методом в [2] (см. также [3]).

5. Для обобщенных аналитических функций имеет место аналог интеграла типа Коши

$$\Phi_k(t_k, t_k^*) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L F_k(\tau_k)\,W(t_k, \tau_k)\,d\tau_k \tag{5.1}$$

$$W = \frac{\omega}{\tau_k - t_k}, \qquad \omega = [\mathrm{E}(\mu_k) - (1 - \mu_k^2)\,\mathrm{K}(\mu_k)]\,\frac{|\tau_k - \tau_k^*|}{\rho_k\mu_k^2} \tag{5.2}$$

$$\mu_k = \frac{1}{\rho_k}\sqrt{(\tau_k - \tau_k^*)(t_k^* - t_k)}, \qquad \rho_k = \sqrt{(\tau_k - t_k^*)(\tau_k^* - t_k)}$$

Здесь $W(t_k, \tau_k)$ — обобщенное ядро Коши, K и E — полные эллиптические интегралы, $F_k(\tau_k)$ — плотность интеграла, удовлетворяющая условиям (4.4), L — контур плоской области, занимаемой меридиональным сечением тела, τ_k — аффикс контурной точки. Эти формулы легко получить методом, применявшимся в [4].

Представления (5.1) можно использовать для приведения граничных задач к интегральным уравнениям, соответствующим уравнениям Д. И. Шермана для соответствующей плоской задачи [6].

6. В качестве примера рассмотрим действие сил, распределенных по окружности ($r = r_0$, $z = z_0$) внутри трансверсально изотропного пространства и направленных вдоль оси z.

Путем рассуждений, аналогичных приведенным в [7], автором совместно с М. И. Куропатовым было найдено следующее представление для обобщенных аналитических функций в этом случае:

$$\Phi_k = Pr_0N_k\left\{\frac{1}{\rho_k}\mathrm{K} + \frac{i}{r}\left[\frac{z_k - z_{0k}}{2\rho_k}(n'\Pi + \mathrm{K}) + \right.\right. \tag{6.1}$$

$$\left.\left. + \frac{\pi}{2}(A - 1)\right]\right\}, \qquad N_k = \frac{p_k\gamma_j^2}{\pi\gamma_k(\gamma_k^2 - \gamma_j^2)}\,\frac{E_r}{1 - \nu_r^2}$$

$$n' = (r - r_0)/(r + r_0), \qquad n^2 = 1 - n'^2, \qquad z_{0k} = z_0/\gamma_k$$

Здесь $\mathrm{K} = \mathrm{K}(\mu_k)$, $\Pi = \Pi(-n^2, \mu_k)$ — полные эллиптические интегралы соответственно первого и третьего рода, A — кусочно-постоянная функция, описанная в [7], P — интенсивность распределенных сил.

Соответствующие формулы для перемещений и напряжений вытекают из (2.6) и (3.1).

Если положить $2\pi r_0 P = P_0 = \mathrm{const}$ и устремить r_0 к нулю, то из (6.1) при $z_0 = 0$ вытекает

$$\Phi_k = \frac{1}{4} P_0 N_k \left(\frac{r + iz_k}{r\sqrt{z_k^2 + r^2}} - \frac{i}{r} \right)$$

$$w = \frac{1}{4} P_0 \sum_{k=1}^{2} \frac{N_k p_k}{\sqrt{z_k^2 + r^2}}$$

$$u = -\frac{1}{4r} P_0 \sum_{k=1}^{2} N_k q_k \left(\frac{z_k}{\sqrt{z_k^2 + r^2}} - 1 \right)$$

Последние формулы, по существу, совпадают с известным решением о действии сосредоточенной силы P_0 внутри трансверсально изотропного пространства (см., например, [8]).

Поступила 26 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лехницкий С. Г.* Теория упругости анизотропного тела. М.— Л., Гостехиздат, 1950.
2. *Александров А. Я.* Представление компонентов пространственного осесимметричного состояния трансверсально изотропного тела при помощи функций комплексного переменного и контурных интегралов. Изв. АН СССР. Механика и машиностроение, 1964, № 2.
3. *Александров А. Я., Вольперт В. С.* Решение пространственных задач теории упругости для трансверсально изотропного тела вращения при помощи аналитических функций. Инж. ж. МТТ, 1967, № 5.
4. *Соловьев Ю. И.* Решение осесимметричной задачи теории упругости для односвязных тел вращения. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 3.
5. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М., Физматгиз, 1959.
6. *Шерман Д. И.* К решению плоской задачи теории упругости для анизотропной среды. ПММ, 1942, т. 6, вып. 6.
7. *Соловьев Ю. И.* Действие сил, осесимметрично распределенных по плоским и цилиндрическим поверхностям внутри упругого пространства и полупространства. Тр. Новосиб. ин-та инж. ж.-д. трансп., 1972, вып. 137.
8. *Свекло В. А.* Сосредоточенная сила в трансверсально изотропном полупространстве и составном пространстве. ПММ, 1969, т. 33, вып. 3.

Технический редактор *Э. Ф. Бунова*

Сдано в набор 25/I-1974 г. Т-05064 Подписано к печати 27/III-1974 г. Тираж 2890 экз.
Зак. 104. Формат бумаги 70×108¹/₁₆ Усл. печ. л. 16,8+1 вкл. Бум. л. 6 Уч.-изд. л. 16,0

2-я типография издательства «Наука». Москва, Шубинский пер., 10