

ДОПОЛНЕНИЕ «К ЗАДАЧЕ ОБ УПРУГОЙ УСТОЙЧИВОСТИ
ЛОКАЛЬНО НАГРУЖЕННОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ»

Л. М. Куршин, Л. И. Шкутин

(Новосибирск)

В работе [1] при исследовании устойчивости равновесия полубесконечной круговой цилиндрической оболочки, нагруженной по шарнирно опертому краю равномерным радиальным усилием, было использовано приближенное аналитическое представление решения нелинейного уравнения, описывающего докритический осесимметричный изгиб оболочки. По существу это представление соответствует двум первым членам разложения искомого нелинейного решения в степенной ряд по параметру

$$p = \mu q = 2Q / (Eh\mu^2) (\mu^2 = h / [R \sqrt{3(1-\nu^2)}])$$

Здесь Q — интенсивность внешнего радиального усилия, h и R — толщина и радиус оболочки, E и ν — модуль Юнга и коэффициент Пуассона материала оболочки. Построение более высоких приближений не было выполнено из-за чрезмерной их трудоемкости.

Однако желание более точно решить сформулированную в [1] задачу устойчивости заставило авторов вернуться к вопросу об уточнении решения нелинейной краевой задачи докритического изгиба оболочки. Для решения этой задачи использована процедура дифференцирования по параметру в сочетании с методом конечных разностей.

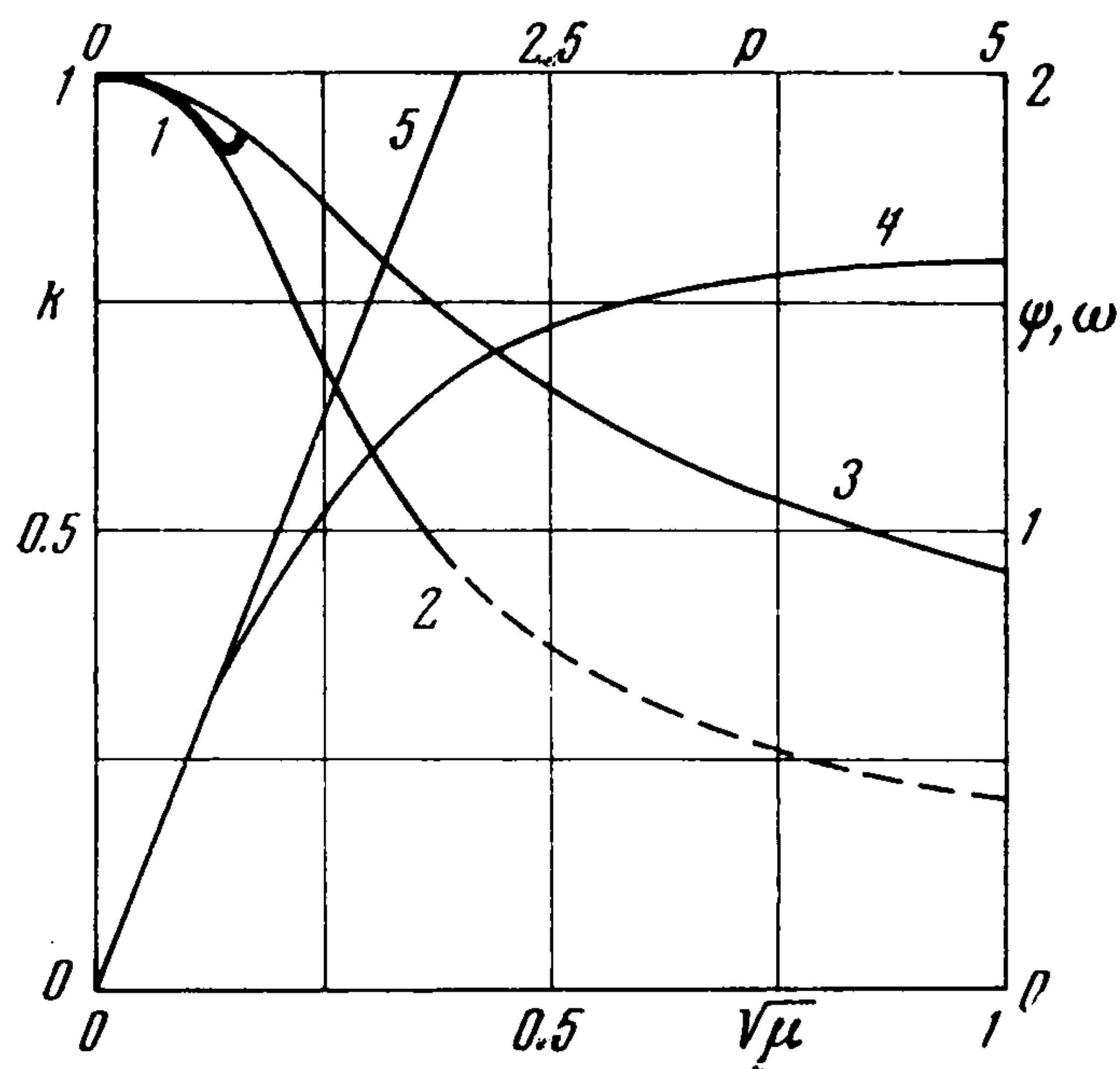
Дифференцирование уравнений (1.1) [1] по параметру p и последующий переход к конечным разностям дает следующий процесс последовательных приближений к искомому нелинейному решению (смысл обозначений раскрыт в [1]): если функции $\eta_i(x)$ и $\vartheta_i(x)$ являются решением нелинейной задачи при $p = p_i$, то ее приближенным решением при $p = p_{i+1} = p_i + \Delta p$ являются функции

$$\eta_{i+1}(x) = \eta_i(x) + \Delta p \eta_i'(x), \quad \vartheta_{i+1}(x) = \vartheta_i(x) + \Delta p \vartheta_i'(x)$$

причем $\eta_i'(x)$ и $\vartheta_i'(x)$ определяются в результате решения линейной краевой задачи

$$\begin{aligned} \eta_i'' + 2\vartheta_i' \cos \vartheta_i &= 0, & \vartheta_i'' + 2\vartheta_i' \eta_i \sin \vartheta_i - 2\eta_i' \cos \vartheta_i &= 0 \quad (0 \leq x \leq \infty) \\ \eta_i' &= 1, & \vartheta_i' &= 0 \quad (x=0), & \eta_i &= \vartheta_i = 0 \quad (x=\infty) \end{aligned}$$

Так как при $p = p_0 = 0$ имеется точное решение $\eta_0 \equiv \vartheta_0 \equiv 0$, то, отправляясь от него и выбирая достаточно малый шаг Δp изменения параметра p , можно получить



приближенное решение нелинейной задачи для ряда значений этого параметра.

Описанный процесс был реализован на ЭВМ, причем линейная краевая задача, определяющая приращение решения при переходе от предыдущего шага к последующему, решалась в конечных разностях методом прогонки. Задача устойчивости осесимметричного состояния равновесия, отвечающего полученному нелинейному решению, была сформулирована и решена, как в [1].

Вычисления проведены в диапазоне $0 \leq p \leq 7$. Для проверки точности варьировались величины шагов по параметру p и по координате. Окончательные результаты представлены на фигуре.

Кривые 3 и 4 определяют в зависимости от p значения параметров ψ и ω , которые являются характеристиками докритического состояния оболочки. [В частности, с помощью ψ вычисляется наибольшее значение кольцевого напряжения; $\sup |\sigma_2| \simeq E \mu r \psi / 2$, а с помощью ω — наибольшее значение угла поворота; $\sup |\vartheta| \simeq \omega$. Оба эти значения достигаются на крае оболочки. Любопытно, что значения ω , определяемые кривой 4 при $p > 3$, близки к $\pi / 2$, тогда как решение линейной задачи осесимметричного изгиба приводит к значениям ω в виде прямой 5. По наибольшему значению кольцевого напряжения может быть определена область упругого деформирования оболочки.

Кривой 2 изображена зависимость от $\sqrt{\mu}$ критического значения параметра нагрузки $k = Q^* / Q^0$ ($Q^0 \simeq 16.35 E h \mu^3$ — критическое значение внешнего усилия при определении докритического состояния по линейной теории). Для сравнения приведена в виде кривой 1 (жирная линия) соответствующая зависимость из [1]. Пунктирный участок кривой 2 выходит за пределы области определения тонких оболочек неравенством $h / R \leq 1 / 20$. Его следует трактовать как формальное продолжение по параметру μ решения рассматриваемой задачи на собственные значения.

Существенное расхождение между кривой 1, отвечающей решению нелинейной задачи в первом приближении [1], и кривой 2, соответствующей уточненному решению нелинейной задачи, начинается со значения $\sqrt{\mu} \simeq 0.13$. Однако основной вывод статьи [1] остается верен: линеаризация докритического состояния допустима лишь при весьма малых значениях отношения h / R . В частности, при $h / R \leq 1.74 \cdot 10^{-4}$. $\sqrt{3} (1 - \nu^2)$ погрешность в величине критической нагрузки из-за линеаризации не превышает 5%. За пределами этой области погрешность быстро растет с ростом отношения h / R .

С помощью представленных здесь результатов могут быть уточнены также графические зависимости, приведенные в [2].

Поступила 7 V 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К задаче об упругой устойчивости локально нагруженной цилиндрической оболочки. ПММ, 1972, т. 36, вып. 6.
2. Куршин Л. М., Шкутин Л. И. К постановке задач о локальной устойчивости оболочек вращения. Докл. АН СССР, 1972, т. 206, № 4.

УДК 539.3

РЕШЕНИЕ ОСЕСИММЕТРИЧНОЙ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ ТРАНСВЕРСАЛЬНО ИЗОТРОПНЫХ ТЕЛ ПРИ ПОМОЩИ ОБОБЩЕННЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Ю. И. Соловьев

(Новосибирск)

Строится решение осесимметричной задачи для трансверсально изотропных тел, выраженное через обобщенные аналитические функции. Получены формулы перемещений и напряжений, аналогичные соответствующим формулам плоской задачи. Указаны представления обобщенных аналитических функций через аналитические. Приведен аналог интеграла типа Коши, что дает возможность приведения граничных задач к интегральным уравнениям. В качестве примера рассмотрено действие сил, распределенных по окружности внутри трансверсально изотропного пространства.

Плоские задачи теории упругости для трансверсально [изотропных тел эффективно решаются при помощи аналитических функций комплексного переменного [1].