УДК 539.3

НЕКОТОРЫЕ КОНТАКТНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРОСТРАНСТВЕННОГО КЛИНА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ОБЛАСТЕЙ КОНТАКТА

В. Н. Беркович

(Ростов-на-Дону)

Рассматриваются смешанные задачи для пространственного клина, ребро которого неограниченно в обе стороны. Исследуется случай нескольких участков контакта клина со штампами. Устанавливаются теоремы разрешимости интегральных уравнений в ряде случаев и изучаются свойства их решений. Получены приближенные формулы для решений при малых углах раствора клина.

В случае одного участка контакта задача рассматривалась в работе [1], в которой применен метод, изложенный в [2]. В работе [3] изучалось интегральное уравнение свертки, заданное на системе отрезков.

Ниже рассматривается уравнение работы [1] на системе отрезков по схеме, изложенной в [3].

1. На основании решения Я. С. Уфлянда [4] исследуется антисимметричная смешанная задача (задача 1) для упругого пространственного клина с $2N$ параллельными ребру клина линиями раздела граничных условий. Ребро клина совпадает с направлением оси пространственной координаты z. Каждая пара линий с номерами $2n-1$ и $2n$ удалена от ребра на расстояния a_{2n-1} и a_{2n} ($n = 1, 2, \ldots, N$) соответственно. В каждой области, образованной такой парой линий, предполагаются заданными нормальное давление $p(r, \pm\alpha, z)$ и перемещения, параллельные граням клина, равные нулю. Единственным неизвестным в области контакта является нормальное перемещение. Вне указанных областей грани клина жестко закреплены.

Эта задача, в некоторой мере искусственная, порождает новый класс систем интегральных уравнений, ранее не исследованных. К этим же системам сводится и механически естественная задача об апериодическом сдвиге пространственного клина системой штампов.

Случай гармонических колебаний (задача 2), вызванных этой же системой штампов, отнесён ко второй группе задач в связи с качественным различием ядер соответствующих интегральных уравнений.

В задачах об апериодическом сдвиге и о гармонических колебаниях предполагается, что одна из граней клина жестко закреплена, а другая загружена системой штампов, перемещающихся параллельно пространственной оси (совпадающей, как и в задаче 1, с ребром клина). В гармоническом и апериодическом случаях перемещения штампов описываются функциями

$$\operatorname{Re} f_n(r^*)\, e^{-i\omega t}, \qquad f_n(r^*)\, e^{-\varepsilon t}, \qquad a_{2n-1} \leqslant r^* \leqslant a_{2n} \qquad (\varepsilon > 0,\ \omega > 0)$$

соответственно. Относительно линий смены граничных условий сохраняются все предположения задачи 1.

В гармоническом случае материал клина считается вязко-упругим с постоянным во времени модулем Юнга E, коэффициентом Пуассона ν и зависящем от разности аргументов ядром ползучести $\theta(t-\tau)$. В апериодическом случае клин предполагается упругим.

При указанных условиях требуется определить контактные напряжения под штампами.

Описанные выше задачи с использованием преобразования Конторовича — Лебедева [4] приводятся к решению интегрального уравнения следующего вида:

$$Kq = \sum_{n=1}^{N} \int_{a_{2n-1}}^{a_{2n}} k(r, \rho)\, q(\rho)\, d\rho = Af_m(r) \tag{1.1}$$

$$k(r, \rho) = \frac{1}{\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} I_{-iu}(\varkappa r) K_{-iu}(\varkappa\rho) K(u) u\, du$$

$$\alpha_{2m-1} \leqslant r \leqslant \alpha_{2m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, N$$

Здесь $I_\lambda(\varkappa r)$, $K_\lambda(\varkappa r)$ — модифицированные функции Бесселя.

В случае задачи 1 приняты следующие обозначения:

$$A^{-1} = 4G(1-\nu), \qquad \alpha_k = \frac{a_k}{a}, \ a = \sum_{n=1}^{N}(a_{2n} - a_{2n-1}) \tag{1.2}$$

$$a_{2n} > a_{2n-1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2N$$

$$f_m(r) = C_1(m) I_\mu(\varkappa r) + C_2(m) K_\mu(\varkappa r) + \varphi(r)$$

$$K(u) = u(\operatorname{ch} 2\alpha u - \cos 2\alpha)\,[(3-4\nu)\operatorname{sh} 2\alpha u + u \sin 2\alpha]^{-1} (u^2 + \mu^2)^{-1}$$

Здесь $C_1(m)$, $C_2(m)$ — подлежащие определению постоянные, $\mu > 0$ произвольно, $\varphi(r)$ — частное решение уравнения

$$B(\mu)\varphi = r\frac{d}{dr}\left(r\frac{d\varphi}{dr}\right) - (\varkappa^2 r^2 + \mu^2)\varphi = \Phi(r)$$

$q(r), \Phi(r)$ — преобразования Фурье по координате z от нормальных перемещений и напряжений соответственно, $\varkappa = |\zeta| > 0$, ζ — параметр преобразования Фурье по координате z, 2α — угол раствора клина. Связь безразмерных параметров r, ρ с размерными r^*, ρ^* имеет вид

$$r = r^* / a, \qquad \rho = \rho^* / a$$

Следует отметить, что выражение (1.2) получено из соотношения

$$B(\mu) \sum_{n=1}^{N} \int_{\alpha_{2n-1}}^{\alpha_{2n}} k(r, \rho) q(\rho)\, d\rho = A\Phi(r) \tag{1.3}$$

представляющего первоначальное интегральное уравнение задачи 1. В результате применения оператора $B^{-1}(\mu)$ к обеим частям выражения (1.3) получается уравнение (1.1) с правой частью вида (1.2). Описанный прием был ранее изложен в работе [2] и затем применен в [1].

В случае задачи 2 приняты следующие обозначения:

$$\varkappa^2 = -D\sigma^2 a^2 G^{-1}, \ K(u) = u^{-1} \operatorname{th} \alpha u, \ A = G / a$$

$$\sigma^2 = \omega^2\theta^*, \qquad \theta^* = 1 + \int_0^\infty \theta(\tau) e^{i\omega\tau} d\tau, \qquad G^\circ = G\theta^*$$

α — угол раствора клина, D — плотность материала, $f(r)$ — амплитуда смещений штампа в области $\alpha_{2m-1} \leqslant r \leqslant \alpha_{2m}$, G°, ν — соответственно модуль сдвига и коэффициент Пуассона. Связь безразмерных параметров с размерными такая же, как и в статической задаче.

В апериодическом случае в последних формулах следует заменить $i\omega$ на ε и положить $\theta(\tau) \equiv 0$.

Свойства функций $K(u)$ и $K_\pm(u)$ описаны в работе [1].

2. Применив асимптотические оценки поведения функций $I_\lambda(\varkappa r)$, $K_\lambda(\varkappa r)$ в комплексной плоскости λ [1], в случае $\varkappa > 0$ получим оценку

$$k(r, \rho) = c \ln t\,[1 + o(1)], \quad t = |\ln(r/\rho)| \to 0 \tag{2.1}$$

Введем пространства $H_{0.5}(\Omega)$, $L_p(\Omega)$, $T(\Omega)$, $C(0.5)$ соответственно с метрикой

$$\| q \|_{H_{0.5}(\Omega)} = \left(\int_0^\infty | Q(u) |^2 K(u) u \operatorname{sh} \pi u \, du \right)^{1/2}$$

$$Q(u) = \int_\Omega q(r) K_{iu}(\varkappa r) \, dr, \qquad \Omega = \bigcup_{n=1}^N (\alpha_{2n-1}, \alpha_{2n})$$

$$\| q \|_{L_p(\Omega)} = \left(\int_\Omega | q(r) |^p dr \right)^{1/p}, \qquad p > 1$$

$$\| q \|_{C(0,5)} = \sup_n \sup_r | q(r) (r - \alpha_{2n-1})^{1/2} (\alpha_{2n} - r)^{1/2} |$$

$$\| q \|_{T(\Omega)} = \sup_n \sup_r | q(r) |, \qquad r \in \Omega, \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. Оператор K действует из $L_p(\Omega)$, $p > 1$ в $T(\Omega)$ непрерывно.

Доказательство основано на (2.1).

Теорема 2. Любое $L_p(\Omega)$, $p > 1$ вложено в пространство $H_{0.5}(\Omega)$.

Доказательство основано на использовании интегрального представления функции $K_{iu}(\varkappa r)$ [5] и обобщенного неравенства Хаусдорфа — Юнга [6].

Теорема 3. В случае $\varkappa > 0$ уравнение (1.1) в пространстве $L_p(\Omega)$, $1 < p \leqslant 2$ не может иметь более одного решения.

Действительно, для $q(r) \in L_p(\Omega)$, $1 < p \leqslant 2$ соотношение

$$\| q \|^2_{H_{0.5}(\Omega)} = \operatorname{Re} \int_\Omega f(r) \overline{q(r)} \, dr$$

корректно в силу оценки (2.1) и теорем 1 и 2. Тогда из условия $f(r) \equiv 0$ вытекает $q(r) \equiv 0$ для всех $r \in \Omega$. Последний результат означает, что если решение задачи 1 существует, то оно единственно в $L_p(\Omega)$, $1 < p \leqslant 2$, если $f(r) \in T(\Omega)$.

Аналогичную теорему единственности в случае комплексных $\varkappa$ здесь доказать не удается.

3. Представив правую часть уравнения (1.1) интегралом Конторовича — Лебедева, ограничимся случаем $f_n(r) = I_\eta(\varkappa r) I_\eta^{-1}(\varkappa\alpha_{2n})$ и будем отыскивать решение (1.1) в форме ряда ($x_k(n)$, $y_k(n)$ — подлежащие определению постоянные)

$$\frac{\rho}{A} q_n(\rho) = x_0 \frac{I_\eta(\varkappa\rho)}{I_\eta(\varkappa\alpha_{2n})} + \sum_{k=1}^\infty \left[x_k(n) \frac{I_{-iz_k}(\varkappa\rho)}{I_{-iz_k}(\varkappa\alpha_{2n})} + y_k(n) \frac{K_{-iz_k}(\varkappa\rho)}{K_{-iz_k}(\varkappa\alpha_{2n-1})} \right] \tag{3.1}$$

$$\alpha_{2n-1} \leqslant \rho \leqslant \alpha_{2n}, \qquad n = 1, 2, \ldots, N$$

Внесем выражение (3.1) в левую часть уравнения (1.1) и, представив ядро $k(r, \rho)$ в форме [1], произведем интегрирование под знаком ряда. В результате приходим к бесконечной системе линейных алгебраических уравнений для определения постоянных, одно из которых приведено ниже (другое может быть легко получено и имеет аналогичный вид)

$$A_{11}(m) X(m) + A_{12}(m) Y(m) + \sum_{n=m+1}^N [G_{11}(n) X(n) + G_{12}(n) Y(n)] = B_1(m) \tag{3.2}$$

$$A_{12}(m) = \{a_{rl}(1, 2)\} = \frac{iW[K_{-iz_l}(\lambda_{2m}), K_{-i\zeta_r}(\lambda_{2m})]}{(\zeta_r^2 - z_l^2) K_{-iz_l}(\lambda_{2m}) K_{-i\zeta_r}(\lambda_{2m})}$$

$$A_{11}(m) = \{a_{rl}(1, 1)\} = \frac{iW[I_{-iz_l}(\lambda_{2m}), K_{-i\zeta_r}(\lambda_{2m})]}{(\zeta_r^2 - z_l^2) I_{-iz_l}(\lambda_{2m}) K_{-i\zeta_r}(\lambda_{2m})}$$

Здесь приняты обозначения работы [1]. Элементы матриц $G_{11}(n)$, $G_{12}(n)$ ввиду громоздкости получающихся выражений не приводятся.

Эквивалентность бесконечной системы (3.2) интегральному уравнению (1.1) и обратно в соответствующих классах функций и последовательностей устанавливается благодаря свойству минимальности системы функций $\{I_{\lambda_k}(z), K_{\lambda_k}(z)\}$ [1].

В тех случаях, когда имеет место единственность для интегрального уравнения, сразу же следует единственность и для бесконечной системы. Если же оказывается, что бесконечная система эквивалентна уравнению с вполне непрерывным оператором, то немедленно следует разрешимость системы.

Легко проверить, что при $|\zeta_r| \to \infty$, $|z_l| \to \infty$ элементы матриц $A_{kk}(m)$ $(m = 1, 2, \ldots, N)$ стремятся к элементам матрицы $A = \{(\zeta_r - z_l)^{-1}\}$, а элементы матриц $A_{kj}(m)$, $G_{kj}(n)$ экспоненциально убывают.

4. Используя обратную матрицу A^{-1} [7], систему (3.2) можно записать в нормальной форме, причем первое матричное уравнение имеет вид

$$X(m) = A^{-1}B_1(m) + A^{-1}[A - A_{11}(m)]\, X(m) - A^{-1}A_{12}(m)\, Y(m) - \sum_{n=m+1}^{N} A^{-1}[G_{11}(n)\, X(n) + G_{12}(n)\, Y(n)] \tag{4.1}$$

Применяя оценки (1.3), можно установить, что элементы матрицы правой части системы (4.1) порождают вполне непрерывные операторы в пространстве последовательностей $s(\sigma)$, $0 < \sigma \leqslant {}^1/_2$ с нормой

$$\| X \|_{s(\sigma)} = \sup_l | l^\sigma x_l |, \qquad \lim | l^\sigma x_l | = 0 \qquad (l \to \infty)$$

В силу сказанного однозначная разрешимость системы при $\varkappa > 0$ в $s(\sigma)$ вытекает из однозначной разрешимости уравнения (1.1) вследствие положительной определенности оператора левой части в $H_{0,5}(\Omega)$ и минимальности системы функций $I_{\lambda_k}(z)$, $K_{\lambda_k}(z)$.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4. Решение уравнения (1.1), взятое в форме (3.1), принадлежит пространству $C(0.5)$.

Доказательство теоремы следует из справедливости вложения $C(0.5) \subset L_p(\Omega)$ $1 < p < 2$) и принадлежности решения, взятого в форме (3.1), указанному $L_p(\Omega)$, если $X \in s(\sigma)$, $Y \in s(\sigma)$.

Из теоремы следует, что решение (1.1) можно отыскивать в форме (3.1), и это решение в силу теоремы 3 будет единственным в случае $\varkappa > 0$. Для комплексных значений $\varkappa$ однозначную разрешимость (1.1) не удается доказать указанными методами. Однако в общем случае система (4.1) оказывается квазирегулярной и для ее исследования можно применить известные методы [8].

В случае достаточно малых углов раствора клина операторы правой части (4.1) становятся сжимающими, и система может быть решена по методу последовательных приближений.

5. Предполагая малость угла раствора клина, исследуем систему (4.1) в нулевом приближении, выбирая в качестве последнего матрицы $X^{(0)}(m) = A^{-1}B_1(m)$, $Y^{(0)}(m) = A^{-1}B_2(m)$. Вычисляя элементы матриц $X^{(0)}(m)$, $Y^{(0)}(m)$, найдем

$$x_l^{(0)}(m) = x_m(z_l) = \frac{1}{2\eta K_+'(-z_l)} \left[\frac{S^-(\eta, m)}{(z_l + i\eta) K_-(i\eta)} - \frac{S^+(\eta, m)}{(z_l - i\eta) K_+(i\eta)} \right] + O\left(\frac{\pi}{\alpha} d^{-\pi/\alpha}\right) \tag{5.1}$$

$$S^+(\eta, m) = V(\eta, m) + \eta \left[1 - \sum_{k=m+1}^{N} U(\eta, k)\, d_{km}^{1-\eta} \right]$$

$$S^-(\eta, m) = V(\eta, m) - \eta, \qquad V(\eta, m) = I_\eta'(\lambda_{2m})\, I_\eta^{-1}(\lambda_{2m})$$

$$U(\eta, k) = I_\eta(\lambda_{2k-1})\, I_\eta^{-1}(\lambda_{2k})$$

$$d_{km} = \alpha_{2k-1} / \alpha_{2m}, \qquad d = \inf_n \{\alpha_{2n} / \alpha_{2n-1}\}$$

Выражения для $y_l^{(0)}(m)$ имеют аналогичный вид. Заметим, что выражения для $x_m(z_l)$, $y_m(z_l)$ можно записать в виде

$$x_m(z_l) = x(z_l) + \Delta_l(m), \qquad y_m(z_l) = y(z_l) + \delta_l(m)$$

Здесь $x(z_l)$, $y(z_l)$ — решение системы (4.1) в случае действия лишь одного штампа в области $\alpha_{2m-1} \leqslant r \leqslant \alpha_{2m}$ [1], а $\Delta_l(m)$, $\delta_l(m)$ — поправки к решению задачи с одной областью контакта, характеризующие влияние остальных $N-1$ штампов на указанную область контакта.

Внося выражения (5.1) в формулу (3.1) и производя суммирование полученного ряда в контурный интеграл, получим следующие асимптотические формулы для решения уравнения (1.1):

$$\frac{\rho}{A} q_m(\rho) = x_0 \frac{I_\eta(\varkappa\rho)}{I_\eta(\lambda_{2m})} - \frac{1}{2\pi i} \int_\Gamma \left[x_m(-t) \frac{I_{it}(\varkappa\rho)}{I_{it}(\lambda_{2m})} + \right. \tag{5.2}$$

$$\left. + y_m(-t) \frac{K_{it}(\varkappa\rho)}{K_{it}(\lambda_{2m-1})} \right] \frac{K_+'(t)}{K_+(t)} dt$$

$$m = 1, 2, \ldots, N, \qquad \alpha_{2m-1} \leqslant \rho \leqslant \alpha_{2m}$$

Здесь контур Γ расположен в нижней полуплоскости, огибая сверху нули и полюсы функции $K_+(t)$ и снизу точки $t = \pm i\eta$.

Выражение (5.2) при использовании асимптотических оценок поведения бесселевых функций $I_\lambda(\varkappa\rho)$, $K_\lambda(\varkappa\rho)$ для больших значений $|\lambda|$ легко вычислить, применив формулы операционного исчисления [9]. Тогда асимптотическое выражение для контактных напряжений в случае задачи 2 (например при $\rho \to \alpha_{2m-1}$) будет иметь следующий вид:

$$q_m(r) \sim D_1(\eta, m) \left[1 - (\rho / \alpha_{2m-1})^{-\pi/\alpha}\right]^{-1/2} \left[1 + O(\ln \rho / \alpha_{2m-1})\right]$$

$$(\rho \to \alpha_{2m-1})$$

$$D_1(\eta, m) = \left(\frac{A\alpha_{2m-1}}{2\eta \sqrt{\pi C}} \right)^{-1} \left[\frac{S^-(\eta, m)}{K_-(i\eta)} - \frac{S^+(\eta, m)}{K_+(i\eta)} \right]$$

Видно, что для $\rho \in \Omega$ функция $q(\rho)$ принадлежит пространству $C(0.5)$.

В случае задачи 1 решение уравнения (1.1) зависит от двух произвольных постоянных $C_1(m)$, $C_2(m)$, которые находятся из условий ограниченности перемещений в точках

$$\rho = \alpha_{2m-1}, \qquad \rho = \alpha_{2m}, \qquad m = 1, 2, \ldots, N$$

Автор благодарит В. А. Бабешко за внимание к работе и советы.

Поступила 17 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Бабешко В. А., Беркович В. Н.* К теории смешанных задач для пространственного клина. ПММ, 1972, т. 35, вып. 5.
2. *Бабешко В. А.* К теории и приложениям некоторых интегральных уравнений первого рода. Докл. АН СССР, 1972, т. 204, № 2.
3. *Бабешко В. А.* Интегральные уравнения свертки первого рода на системе отрезков, возникающие в теории упругости и математической физике. ПММ, 1971, т. 35, вып. 1.
4. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
6. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды, т. 2. М., «Мир», 1965.
7. *Бабешко В. А.* Об интегральном уравнении некоторых динамических контактных задач теории упругости и математической физики. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
8. *Канторович Л. В., Крылов В. И.* Приближенные методы высшего анализа. Изд. 5, М.— Л., Физматгиз, 1962.
9. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Таблицы интегральных преобразований, т. 1. М., Физматгиз, 1969.