

Обозначим через $\Gamma (*)$ границу множества «*». На координатной плоскости x_1ox_3 построим множества

$$B(\varepsilon_0) = \{(x_1, x_3) : \max(|x_1 - d_1|; |x_3 - d_3|) \leq \varepsilon_0; (d_1, d_3) \in \Gamma(\text{Pr}_{x_1ox_3}[E])\}$$

$$K(\varepsilon_0) = B(\varepsilon_0) \cap \text{Pr}_{x_1ox_3}[E], \quad U(\varepsilon_0) = \text{Pr}_{x_1ox_3}[E] \setminus K(\varepsilon_0)$$

С учетом определения нормы $\|x\| = \max_1, \dots, 4 |x_i|$ из предыдущих построений следует, что в качестве G можно взять любое открытое ограниченное связное множество в R_x^4 такое, что

$$\text{Pr}_{x_1ox_3}[G] = U(\varepsilon_0)$$

Понятно, что G непусто, так как ε_0 удовлетворяет условиям (3.4). Таким образом, все условия теоремы 1 оказываются выполненными.

Следовательно, какое бы малое положительное число ε_0 и какие непрерывно дифференцируемые функции $u_1(t), u_2(t)$ ни были бы выбраны, не существует ни одного устойчивого по Ляпунову движения системы (3.1), принадлежащего при всех $t \geq 0$ построенному множеству G .

Автор благодарит В. В. Румянцеву за ценные указания.

Поступила 15 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5.
2. Четаев Н. Г. Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1931, т. 91, кн. 4, № 1.
3. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
4. Костюковский Ю. М.-Л. Об одной идее Н. Г. Четаева. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
5. Bendixon I. Sur les courbes defines par des equations differentielles. Acta Math., 1901, Bd. 24, S. 1—88.
6. Dulac H. Recherche des cycles limites. Compt. rend., Acad. Sci., 1937, t. 204, № 23, p. 1703—1706.
7. Blaquiere A. Nonlinear system analysis. New York — London, Acad. Press, 1966. (Рус. перев.: Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.)

УДК 533.6.011.8

К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

В. Я. Рудяк

(Новосибирск)

В работах В. С. Галкина [1,2] получен класс точных решений системы кинетических моментов одноатомного максвелловского газа. Простейшие течения, описываемые этими решениями, — сдвиговое и разлет — использовались для анализа области применимости метода Чепмена — Энскога [1,3,4]. В данной работе исследуются некоторые другие течения этого класса. На примере полученных решений изучается область применимости приближений Навье — Стокса и Барнетта метода Чепмена — Энскога.

1. Рассмотрим одномерное течение, для которого компоненты макроскопической скорости u_x, u_y, u_z зависят от координат x, y, z и времени t следующим образом

(c — постоянная):

$$(1.1) \quad u_x = x/(t+c) + y/(t+c), \quad u_y = u_z = 0$$

Решение уравнения неразрывности для этого течения приводит к следующему выражению для плотности ρ :

$$(1.2) \quad \rho = \rho(0) / \tau, \quad \tau = 1 + t/c$$

где $\rho(0)$ — начальное значение плотности.

С учетом (1.2) уравнение энергии и напряжений p_{ij} ($i, j = x, y, z$) принимает вид

$$(1.3) \quad \begin{aligned} \frac{dp}{dt} + \frac{5}{3} \frac{p}{(t+c)} + \frac{2}{3} \frac{p_{xx}}{(t+c)} + \frac{2}{3} \frac{p_{xy}}{(t+c)} &= 0 \\ \frac{dp_{xx}}{dt} + \left[\frac{7}{3} + \alpha_0 c \right] \frac{p_{xx}}{(t+c)} + \frac{4}{3} \frac{p_{xy}}{(t+c)} + \frac{4}{3} \frac{p}{(t+c)} &= 0 \\ \frac{dp_{yy}}{dt} + [1 + \alpha_0 c] \frac{p_{yy}}{(t+c)} - \frac{2}{3} \frac{p_{xx}}{(t+c)} - \frac{2}{3} \frac{p_{xy}}{(t+c)} - \frac{2}{3} \frac{p}{(t+c)} &= 0 \\ \frac{dp_{xy}}{dt} + [2 + \alpha_0 c] \frac{p_{xy}}{(t+c)} + \frac{p_{yy}}{(t+c)} + \frac{p}{(t+c)} &= 0 \end{aligned}$$

$$(\alpha_0 = R\rho(0) / \mu_0, \quad R = p / \rho T, \quad \mu_0 = \mu / T)$$

Здесь p — давление, T — температура, μ — коэффициент вязкости.

Решая систему уравнений (1.3), можно определить значения компонент тензора напряжений и давления. В частности, для p и p_{xx} получим

$$(1.4) \quad \frac{p}{p(0)} = A\tau^{\lambda/3} + \{B_+q_+ + B_-q_-\}$$

$$(1.5) \quad \frac{p_{xx}}{p(0)} = \frac{2(\lambda+3)}{\lambda+3+3/F} A\tau^{\lambda/3} + \{D\tau^{-1-1/F} + C_+q_+ + C_-q_-\}$$

$$q_{\pm} = \tau^{-\lambda/6-3-1/F} \exp \left[\pm \frac{i}{2\sqrt{3}} (u-v) \ln \tau \right]$$

$$\lambda = u + v - 6 - 2/F$$

$$u, v = [F^{-3} + 3/2F^{-2} + 27/2F^{-1} \pm (69/4F^{-4} + 43/2F^{-3} + 585/4F^{-2} - 27F^{-1} - 27)^{1/2}]^{1/3}$$

Здесь A, B_{\pm}, C_{\pm} — постоянные, зависящие от начальных данных задачи, $p(0)$ — начальное значение давления, $F = 1 / (c\alpha_0) \sim \text{Кп}$, Кп — число Кнудсена.

Решение данной задачи методом Чепмена — Энскога приводит к следующим результатам:

в приближении Эйлера

$$(1.6) \quad p/p_0 = \tau^{-5/3}, \quad p_{xx} = 0$$

в приближении Навье — Стокса

$$(1.7) \quad p/p_0 = \tau^{-5/3+14/9F}, \quad p_{xx}/p_0 = -4/3F\tau^{-5/3+14/9F}$$

в приближении Барнетта

$$(1.8) \quad \begin{aligned} p/p_0 &= \tau^{-5/3+14/9F-34/27F^2} \\ p_{xx}/p_0 &= (-4/3F + 20/9F^2) \tau^{-5/3+14/9F-34/27F^2} \end{aligned}$$

Здесь p_0 — некоторое начальное значение давления, которое следует задать при решении задачи методом Чепмена — Энскога. В дальнейшем, чтобы решение Чепмена — Энскога сделать замкнутым, необходимо установить связь между p_0 и истинным начальным значением давления $p(0)$.

Сравнение выражений (1.6) — (1.8) с точными решениями указывает на отсутствие в решении Чепмена — Энскога членов, которые в точных решениях заключены в фигурных скобках. Эти члены, однако, быстро убывают, если (τ_0 — время свободного-

пробега молекулы),

$$(1.9) \quad t \gg 1 / \alpha_0 = \tau_0, \quad F < 1$$

В этом случае точные решения принимают форму

$$(1.10) \quad \begin{aligned} p/p_0 &= A\tau^l, \quad p_{xx}/p(0) = A[-4/3F + 20/9F^2 + O(F^3)]\tau^l \\ l &= -5/3 + 14/9F - 34/27F^2 + O(F^3) \\ A &= 1 - 2/3F(\Pi_{xy} + \Pi_{xx}) + O(F^2), \quad \Pi_{ij} = p_{ij}(0)/p(0) \end{aligned}$$

Таким образом, согласно условию (1.9), метод Чепмена — Энскога применим вне начального слоя, размер которого порядка времени свободного пробега молекулы, и при малых числах Кнудсена.

Существенно, что структура точного решения отлична от структуры решения, построенного по методу Чепмена — Энскога. Точное решение через постоянную A зависит в любой момент времени от начальных данных задачи. И только при $A = 1$ точное решение становится нормальным решением в смысле Чепмена — Энскога. Сравнение решения (1.10) с решениями Чепмена — Энскога (1.7), (1.8) для этого частного случая дано на фигуре, где для некоторого фиксированного момента времени t представлена зависимость величины $\xi \equiv \ln(p/p(0))/\ln \tau$ от значения параметра F : 1 — для точного решения, 2 — для приближения Навье — Стокса и 3 — для приближения Барнетта.

Проведенные расчеты показывают, что в отличие от навье-стоксовского барнеттовского приближение хорошо согласуется с точным решением вплоть до чисел Кнудсена порядка единицы.

Выше было указано, что для решения задачи методом Чепмена — Энскога необходимо установить связь между $p(0)$ и p_0 . В рассматриваемом случае это удастся сделать.

Действительно, при $A = 1$ начальный слой отсутствует и $p_0 = p(0)$. В общем же случае при малых F решение для p в начальном слое можно представить в виде

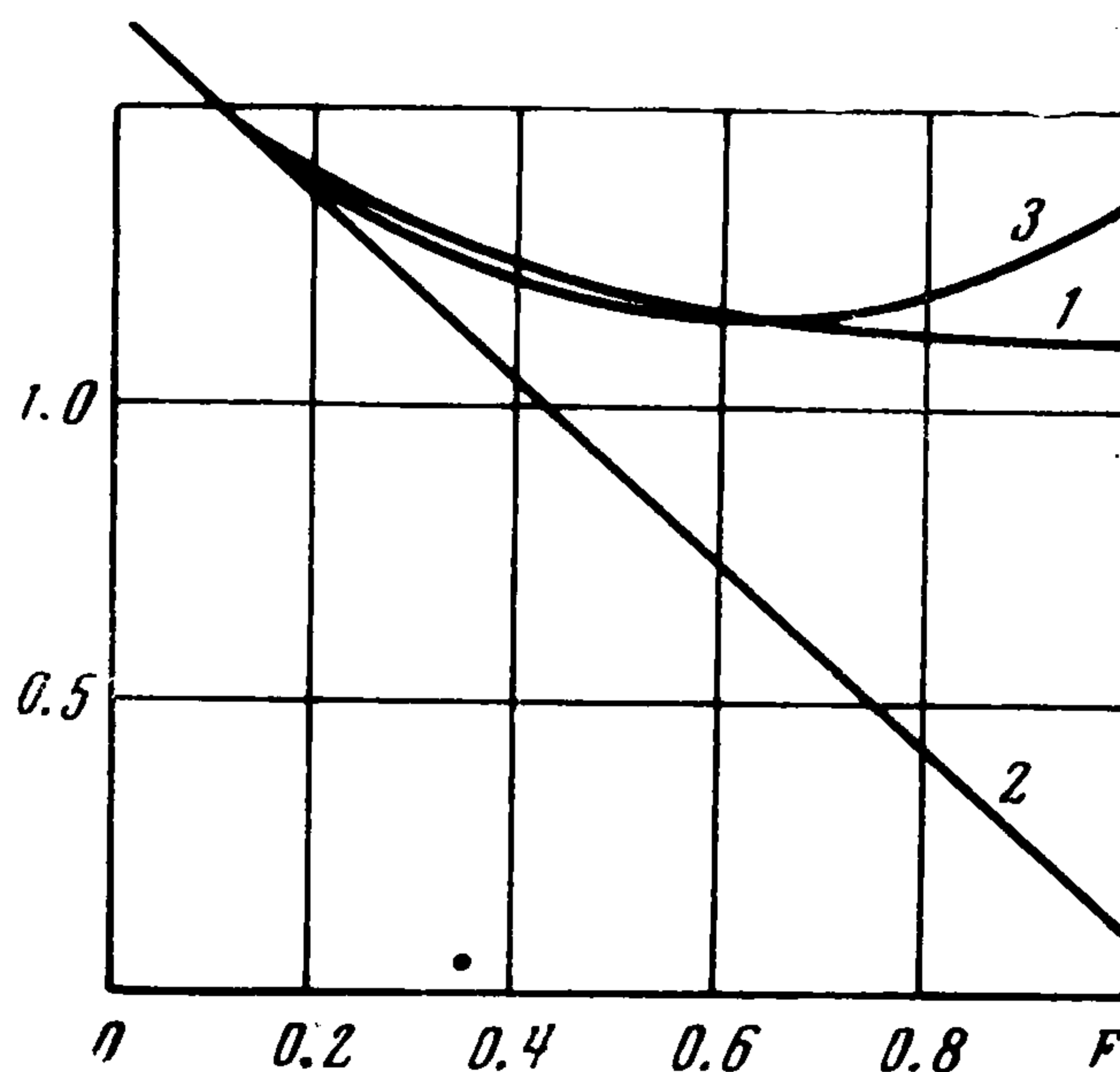
$$(1.11) \quad p/p(0) = A\tau^l + P(p(0), \Pi_{ij}, t, F)\tau^{-l/2-3-1/F}$$

Здесь через P обозначена быстро убывающая часть решения (1.4). Вторая часть решения (1.11) быстро убывает, поэтому асимптотически, в смысле условия (1.9), можно записать, что $p \rightarrow p(0)A\tau^l$, и, следовательно, начальное значение p в методе Чепмена — Энскога следует задать так, чтобы выполнялось соотношение

$$p_0 = p(0)[1 - 2/3(\Pi_{xy} + \Pi_{xx})F + O(F^2)]$$

Для течения одномерного разлета подобное соотношение получено с помощью сращивания внутреннего и внешнего разложений точного решения по малому параметру F В. С. Галкиным [5].

При произвольных начальных данных и малых, но конечных F полученные при помощи метода Чепмена — Энскога решения так же, как и в случае сдвигового течения [4] и течения одномерного разлета [3], применимы на конечных интервалах времени, так как при $t \rightarrow \infty$ приближенные значения p и p_{ij} могут как угодно сильно отличаться от точных. Следует, однако, обратить внимание на то, что приближение Барнетта можно применять на значительно больших интервалах времени, чем приближение Навье — Стокса. При $F = 0$ эйлеровское приближение метода Чепмена — Энскога тождественно с точным решением. В этом случае начальный слой отсутствует, и решение



Чепмена — Энскога равномерно справедливо на всем интервале времени от нуля до бесконечности.

2. Рассмотрим теперь течение плоского разлета

$$u_x = x / (t + c), \quad u_y = y / (t + c), \quad u_z = 0, \quad \rho = \rho(0) / \tau^2$$

Система уравнений кинетических моментов одноатомного максвелловского газа в данном случае сводится к вырожденному гипергеометрическому уравнению, а решения для p и p_{ij} могут быть представлены в вырожденных гипергеометрических функциях [6,7].

Решение задачи в навье-стоксовском и барнеттовском приближениях метода Чепмена — Энскога приводит соответственно к следующим результатам:

$$(2.1) \quad p/p_0 = \tau^{-10/3} e^{8/9 F \tau}$$

$$(2.2) \quad p/p_0 = \tau^{-10/3} e^{8/9 F \tau - 8/27 F^2 \tau^2}$$

Асимптотическое поведение точного решения при $t \rightarrow \infty$ изучалось в работе [6], где при помощи асимптотического анализа было показано, что точное решение асимптотически устойчиво. В то же время навье-стоксовское приближение (2.1) оказывается асимптотически неустойчивым, т. е. несмотря на то, что в плоском разлете плотность с течением времени падает, а внешние силы отсутствуют, давление и напряжения возрастают. Этот факт свидетельствует о том, что для описания данного течения приближение Навье — Стокса нельзя использовать ни при каких значениях параметра F . С другой стороны, барнеттовское приближение (2.2) дает асимптотически устойчивое решение. Таким образом, барнеттовское приближение исправляет навье-стоксовское и дает, вообще говоря, качественно правильный результат.

Такой же характерной особенностью обладает и течение, представляющее собой суперпозицию плоского разлета и сдвига

$$u_x = x / \tau, \quad u_y = xc / \tau^2 + y / \tau, \quad u_z = 0$$

Действительно, можно показать, что точное решение, описывающее это течение, асимптотически устойчиво. Решая теперь задачу методом Чепмена — Энскога в навье-стоксовском приближении, получаем

$$p/p_0 = \tau^{-10/3} \exp(8/9 F \tau - 2/3 F \tau^{-1})$$

и $p \rightarrow \infty$ при $t \rightarrow \infty$.

Напротив, в барнеттовском приближении

$$p/p_0 = \tau^{-10/3 - 4/3 F^2} \exp(8/9 F \tau - 2/3 F \tau^{-1} - 4/27 F^2 \tau^2)$$

И при любых фиксированных F решение оказывается асимптотически устойчивым.

Автор приносит глубокую благодарность своему руководителю В. В. Струминскому за постановку задачи и ценные замечания.

Поступила 21 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Галкин В. С. Об одном решении кинетического уравнения Больцмана. ПММ, 1956, т. 20, вып. 3.
2. Галкин В. С. Об одном классе решений уравнений кинетических моментов Грэда. ПММ, 1958, т. 22, вып. 3.
3. Галкин В. С. Одномерное нестационарное решение уравнений кинетических моментов одноатомного газа. ПММ, 1964, т. 28, вып. 1.
4. Truesdell C. On the pressures and the flux of energy in a gas according to maxwell's kinetic theory. J. Rational Mech. and Analysis, 1956, vol. 5, No. 1.
5. Галкин В. С. Об однородных течениях разреженного газа при малых числах Кнудсена. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 2.
6. Борисов А. С. Асимптотическое поведение некоторых решений систем кинетических моментов Грэда. Инж. ж., 1965, т. 5, вып. 6.
7. Галкин В. С. О точных решениях уравнений кинетических моментов смеси одноатомных газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1966, № 5.