ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, М., «Наука», 1968, стр. 30.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961, стр. 546.
3. *Демин В. Г.* Об одном частном случае интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби. Вестн. МГУ Сер. физ., астрон., 1960, № 1.
4. *Яров-Яровой М. С.* Об интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. М., «Наука», 1968, стр. 310.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений М., «Наука», 1966, стр. 381—393.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Ю. М.-Л. Костюковский

(Москва)

Рассматривается управляемая система, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой содержат произвольные гладкие функции времени. Формулируются условия, когда среди всех возможных движений этой системы не существует ни одного устойчивого по Ляпунову движения, принадлежащего заданному ограниченному множеству в пространстве ее состояний.

1. Движение управляемой системы задано системой уравнений

$$dx / dt = Q(t, x) + u(t), \qquad t \in I = \{t : t \geqslant t_0\} \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\ u = (u_1, \ldots, u_n),\ Q(\cdot) = Q_1(\cdot), \ldots, Q_n(\cdot))$$

Здесь $x, u, Q(\cdot)$ — векторы в действительном n-мерном пространстве R_x^n, t_0 и t — начальный и текущий моменты времени соответственно. Вектор $x = x(t)$ характеризует состояние управляемой системы; $u = u(t)$, $t \in I$ — управляющее воздействие, график которого $\omega = \{(t, u) : u = u(t), t \in I\}$, $\omega[t_0, t]$ — сужение ω на $[t_0, t] \cap \cap I$; $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \omega[t_0, t])$, $t \in I$ — движение системы (1.1) при заданном $\omega \in \Omega$, исходящее из начального состояния $x(t_0) = x_0$, Ω — некоторое допустимое множество $\{\omega\}$.

Сформулируем задачу, родственную задаче о выделении из общего континуального множества движений системы множества устойчивых и множества неустойчивых движений, которую впервые поставил Н. Г. Четаев [1,2].

Задача. По виду системы уравнений (1.1), которая отождествляется с управляемой системой, необходимо определить, когда среди всех возможных движений этой системы не существует ни одного устойчивого движения, принадлежащего заданному множеству G в R_x^n при всех $t \in I$.

Обозначим

$$\operatorname{div}_x Q(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i(t, x), \qquad \|x\| = \max_i |x_i|$$

$$d(a, Z) = \inf \{\|a - b\|, b \in Z\}, \qquad S(Z, \rho) = \{x \in R_x^n : d(x, Z) < \rho\}$$

Z — любое множество в R_x^n, $\bar{S}(Z, \rho)$ — замыкание $S(Z, \rho)$, где ρ — положительное число.

Теорема 1. Пусть а) G — заданное ограниченное множество в R_x^n; б) $u(t)$, $t \in I$ — любая непрерывно дифференцируемая функция времени; в) существует положительное число ε_0 такое, что функция $Q(t, x)$ непрерывна в $I \times S(G, \varepsilon_0)$ вместе со своими частными производными по t и $x_1, \ldots, x_n$; г) существует непрерывная функция $M(x)$ такая, что $\operatorname{div}_x Q(t, x) \geqslant M(x) > 0$ при всех $t \in I$ и всех $x \in S(G, \varepsilon_0)$.

Тогда какое бы управляющее воздействие $u(t)$, $t \in I$ из класса непрерывно дифференцируемых функций времени ни было выбрано, не существует устойчивого по Ляпунову движения системы (1.1), которое принадлежало бы множеству G при всех $t \in I$.

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы существует управляющее воздействие $u^*(t)$, $t \in I$ из класса непрерывно дифференцируемых функций времени и соответствующее ему устойчивое по Ляпунову движение $x^0(t) = \varphi(t, t_0, x_0^*, \omega^*[t_0, t])$, $t \in I$, $x_0^* \in G$ такое, что

$$x^0(t) \in G \quad \text{при всех } t \in I \tag{1.2}$$

Следовательно, согласно определению устойчивого движения по Ляпунову [3], существует положительное число $\delta \leqslant {}^1/_2\, \varepsilon_0$ такое, что

$$\| \varphi(t, t_0, x_0, \omega^*[t_0, t]) - x^0(t) \| < {}^1/_2\, \varepsilon_0 \tag{1.3}$$

при всех $t \in I$ и всех $x_0 \in V_0 = \{x_0 : \| x_0 - x_0^* \| < \delta \leqslant {}^1/_2\, \varepsilon_0\}$.

Из (1.2), (1.3) видно, что движения $\Phi = \{\varphi(t, t_0, x_0, \omega^*[t_0, t]), t \in I, x_0 \in V_0\}$ принадлежат множеству $S(G, {}^1/_2\, \varepsilon_0)$, а потому ограничены в силу условия а) теоремы.

С другой стороны, поскольку $\bar{S}(G, {}^1/_2\varepsilon_0)$ — компакт, из условия г) теоремы следует, что существует положительное число α такое, что при всех значений $t \in I$ и всех $x \in \bar{S}(G, {}^1/_2\varepsilon_0)$

$$\operatorname{div}_x Q(t, x) \geqslant M(x) \geqslant \alpha > 0 \tag{1.4}$$

Однако тогда из (1.3) и (1.4) вытекает, что

$$\int_{t_0}^{t} \operatorname{div}_x Q(\tau, \varphi(\tau, t_0, x_0, \omega^*[t_0, \tau]))\, d\tau \to \infty \quad \text{при } t \to \infty \tag{1.5}$$

равномерно по $x_0 \in V_0$, где V_0 — открытое множество в R_x^n. Согласно теореме 1 из [4], соотношение (1.5) означает, что движения $\Phi = \{\varphi(t, t_0, x_0, \omega^*[t_0, t]), t \in I, x_0 \in V_0\}$ являются полностью лабильными относительно множества V_0 в смысле [4], а это противоречит установленному выше свойству ограниченности движений Φ.

Замечание 1. Пусть $n = 2$, $Q(t, x) \equiv A(x)$, $u(t) \equiv 0$. В этом частном случае теорема 1 напоминает известный критерий Бендиксона об отсутствии предельных циклов в заданной открытой области на фазовой плоскости R_x^2 [5]. Однако в отличие от критерия Бендиксона теорема 1 формулирует достаточные условия отсутствия любых устойчивых по Ляпунову движений (не обязательно периодических) в заданном ограниченном (не обязательно открытом) множестве G в R_x^2, если дивергенция от $A(x)$ знакоположительна в $S(G, \varepsilon_0)$ (т. е. обладает более сильным свойством, чем свойство знакопостоянства, которое обусловливает критерий Бендиксона [5]).

2. Если $Q(t, x) \equiv A(x)$ и $u(t) \equiv 0$, то система (1.1) принимает вид

$$dx / dt = A(x), \qquad t \in I \tag{2.1}$$

Теорема 2. Пусть а) G — ограниченное множество в R_x^n; б) существует положительное число ε_0 такое, что $A(x)$ — функция, непрерывно дифференцируемая по $x_1, \ldots, x_n$ в $S(G, \varepsilon_0)$; в) существует скалярная функция $\nu(x)$, непрерывно дифференцируемая по $x_1, \ldots, x_n$ в $S(G, \varepsilon_0)$ такая, что $\nu(x) \neq 0$, $\operatorname{div}_x [\nu(x) A(x)] > 0$ при всех $x \in S(G, \varepsilon_0)$.

Тогда не существует устойчивого по Ляпунову движения системы (2.1), принадлежащего множеству G при всех $t \in I$.

Доказательство. Рассуждением от противного можно установить так же, как и при доказательстве теоремы 1, что существует открытое множество V_0 начальных состояний системы (2.1) такое, что движения этой системы $\Phi = \{\varphi(t, t_0, x_0),\ t \in I,\ x_0 \in V_0\}$ принадлежат области $S(G, {}^1/_2\,\varepsilon_0)$, а потому ограничены.

Рассмотрим вспомогательную систему

$$dz / dt = \nu(z) A(z), \quad t \in I, \quad z = (z_1, \ldots, z_n) \in R_x^n \tag{2.2}$$

Согласно условию в) теоремы 2, функция $\nu(z)$ знакопостоянна в $S(G, \varepsilon_0)$, поэтому фазовые траектории системы (2.1) должны совпадать с фазовыми траекториями вспомогательной системы (2.2) в $S(G, \varepsilon_0)$. В этом случае движения вспомогательной системы (2.2), берущие начало на V_0, должны принадлежать ограниченному множеству $S(G, {}^1/_2\varepsilon_0) \subset R_x^n$, так же как и движения Φ основной системы (2.1). Однако, согласно условию в) теоремы 2 и теоремы 1, этого не может быть.

Замечание 2. Пусть $n = 2$. В этом частном случае теорема 2 напоминает известный критерий Дюлака об отсутствии предельных циклов в заданной открытой области на фазовой плоскости R_x^2 [6] подобно тому, как теорема 1 напоминает критерий Бендиксона [5].

3. Дана система из двух связанных осцилляторов Ван дер Поля, которая может быть интерпретирована, например, как математическая модель двухконтурного автогенератора [7]

$$\begin{aligned} &dx_1 / dt = x_2, \qquad dx_3 / dt = x_4 \\ &dx_2 / dt = -\omega_1^2 x_1 - 2\delta_1 x_2 + (\alpha_1 - \beta_1 x_1^2) x_2 + \gamma_1 x_3 + u_1(t) \quad (t \geqslant 0) \\ &dx_4 / dt = -\omega_2^2 x_3 - 2\delta_2 x_4 + (\alpha_2 - \beta_2 x_3^2) x_4 + \gamma_2 x_1 + u_2(t) \end{aligned} \tag{3.1}$$

Здесь $x = (x_1, \ldots, x_4)$ — вектор в действительном четырехмерном нормированном пространстве R_x^4 с нормой $\| x \| = \max_{1, \ldots, 4} | x_i |$; $u_1(t)$, $u_2(t)$ $(t \geqslant 0)$ — входные воздействия, любые скалярные непрерывно дифференцируемые функции времени; $\omega_i, \alpha_i, \beta_i, \gamma_i, \delta_i$ $(i = 1, 2)$ — положительные числа, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1 + \alpha_2 \leqslant 2(\delta_1 + \delta_2) \tag{3.2}$$

Задача. Найти такое ограниченное множество G в R_x^4, которое не содержит ни одного устойчивого по Ляпунову движения системы (3.1), принадлежащего этому множеству при всех $t \geqslant 0$.

Очевидно, что система (3.1) удовлетворяет условиям б), в) теоремы 1. Множество G может быть найдено из условия г) теоремы 1. Используя это условие, сначала найдем множество $S(G, \varepsilon_0)$, чтобы затем, имея $S(G, \varepsilon_0)$ и выбирая подходящее ε_0, построить G.

Из (3.1) следует, что

$$\operatorname{div}_x Q(t, x) = -\beta_1 x_1^2 - \beta_2 x_2^2 + (\alpha_1 + \alpha_2) - 2(\delta_1 + \delta_2) \tag{3.3}$$

Пусть E — область в R_x^4, в которой $\operatorname{div}_x Q(t, x) \equiv M(x) > 0$. Тогда с учетом (3.3) можно написать

$$E = \left\{ x = (x_1, \ldots, x_4) : \left(\frac{x_1}{\sqrt{\beta\beta_2}} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{\beta\beta_1}} \right)^2 < 1 \right\}$$

$$\beta = [2(\delta_1 + \delta_2) - (\alpha_1 + \alpha_2)]$$

где β — положительное число (в силу (3.2)).

Пусть $\mathrm{Pr}_{x_1 o x_3}[*]$ — проекция множества «$*$» в R_x^4 на координатную плоскость

$$x_1 o x_3 = \{x = (x_1, \ldots, x_4);\ x_2 = 0,\ x_4 = 0\}$$

Условие г) теоремы 1 можно обеспечить, если в качестве $S(G, \varepsilon_0)$ взять, например, любое открытое ограниченное связное множество в R_x^4 такое, что

$$\mathrm{Pr}_{x_1 o x_3}[S(G, \varepsilon_0)] = \mathrm{Pr}_{x_1 o x_3}[E] = \left\{ (x_1, x_3):\ \left(\frac{x_1}{\sqrt{\beta\beta_2}} \right)^2 + \left(\frac{x_3}{\sqrt{\beta\beta_1}} \right)^2 < 1 \right\}$$

Ниже выясняется, что если ε_0 удовлетворяет условиям

$$0 < \varepsilon_0 < \min(\sqrt{\beta\beta_1};\ \sqrt{\beta\beta_2}) \tag{3.4}$$

искомое множество G может быть выбрано непустым.

Обозначим через Г (*) границу множества «*». На координатной плоскости x_1ox_3 построим множества

$$B(\varepsilon_0) = \{(x_1, x_3) : \max(|x_1 - d_1|; |x_3 - d_3|) \leqslant \varepsilon_0; \quad (d_1, d_3) \in \Gamma(\mathrm{Pr}_{x_1ox_3}[E])\}$$

$$K(\varepsilon_0) = B(\varepsilon_0) \cap \mathrm{Pr}_{x_1ox_3}[E], \quad U(\varepsilon_0) = \mathrm{Pr}_{x_1ox_3}[E] \setminus K(\varepsilon_0)$$

С учетом определения нормы $\| x \| = \max_{1, \ldots, 4} | x_i |$ из предыдущих построений следует, что в качестве G можно взять любое открытое ограниченное связное множество в R_x^4 такое, что

$$\mathrm{Pr}_{x_1ox_3}[G] = U(\varepsilon_0)$$

Понятно, что G непусто, так как ε_0 удовлетворяет условиям (3.4). Таким образом, все условия теоремы 1 оказываются выполненными.

Следовательно, какое бы малое положительное число ε_0 и какие непрерывно дифференцируемые функции $u_1(t)$, $u_2(t)$ ни были бы выбраны, не существует ни одного устойчивого по Ляпунову движения системы (3.1), принадлежащего при всех $t \geqslant 0$ построенному множеству G.

Автор благодарит В. В. Румянцева за ценные указания.

Поступила 15 I 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Четаев Н. Г.* Об устойчивых траекториях динамики. Сб. научн. тр. Казанск. авиац. ин-та, 1936, № 5.
2. *Четаев Н. Г.* Об устойчивых траекториях динамики. Уч. зап. Казанск. ун-та, 1931, т. 91, кн. 4, № 1.
3. *Четаев Н. Г.* Устойчивость движения. М., Гостехиздат, 1955.
4. *Костюковский Ю. М.-Л.* Об одной идее Н. Г. Четаева. ПММ, 1973, т. 37, вып. 1.
5. *Bendixon I.* Sur les courbes defines par des equations differentielles. Acta Math., 1901, Bd. 24, S. 1—88.
6. *Dulac H.* Recherche des cycles limites. Compt. rend., Acad. Sci., 1937, t. 204, № 23, p. 1703—1706.
7. *Blaquire A.* Nonlinear system analysis. New York — London, Acad. Press, 1966. (Рус. перев.: Анализ нелинейных систем. М., «Мир», 1969.)

УДК 533.6.011.8

К ВОПРОСУ ОБ ИЗУЧЕНИИ ТОЧНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ КИНЕТИЧЕСКИХ МОМЕНТОВ

В. Я. Рудяк

(Новосибирск)

В работах В. С. Галкина [1,2] получен класс точных решений системы кинетических моментов одноатомного максвелловского газа. Простейшие течения, описываемые этими решениями,— сдвиговое и разлет — использовались для анализа области применимости метода Чепмена — Энскога [1,3,4]. В данной работе исследуются некоторые другие течения этого класса. На примере полученных решений изучается область применимости приближений Навье — Стокса и Барнетта метода Чепмена — Энскога.

1. Рассмотрим одномерное течение, для которого компоненты макроскопической скорости u_x, u_y, u_z зависят от координат x, y, z и времени t следующим образом