УДК 531.31

О НЕПРИВОДИМОСТИ УРАВНЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ КРУГОВОЙ ЗАДАЧИ ТРЕХ ТЕЛ К УРАВНЕНИЯМ ТИПА ШТЕККЕЛЯ

Е. А. Гребенников, М. Н. Киоса

(Москва)

Доказывается, что не существует таких обобщенных координат, в которых полный интеграл уравнения Гамильтона — Якоби для ограниченной круговой задачи трех тел может быть представлен в виде конечной суммы функций, каждая из которых зависит только от одной обобщенной координаты.

Уравнение Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной круговой задачи трех тел в эллиптических переменных u, v [1] имеет вид

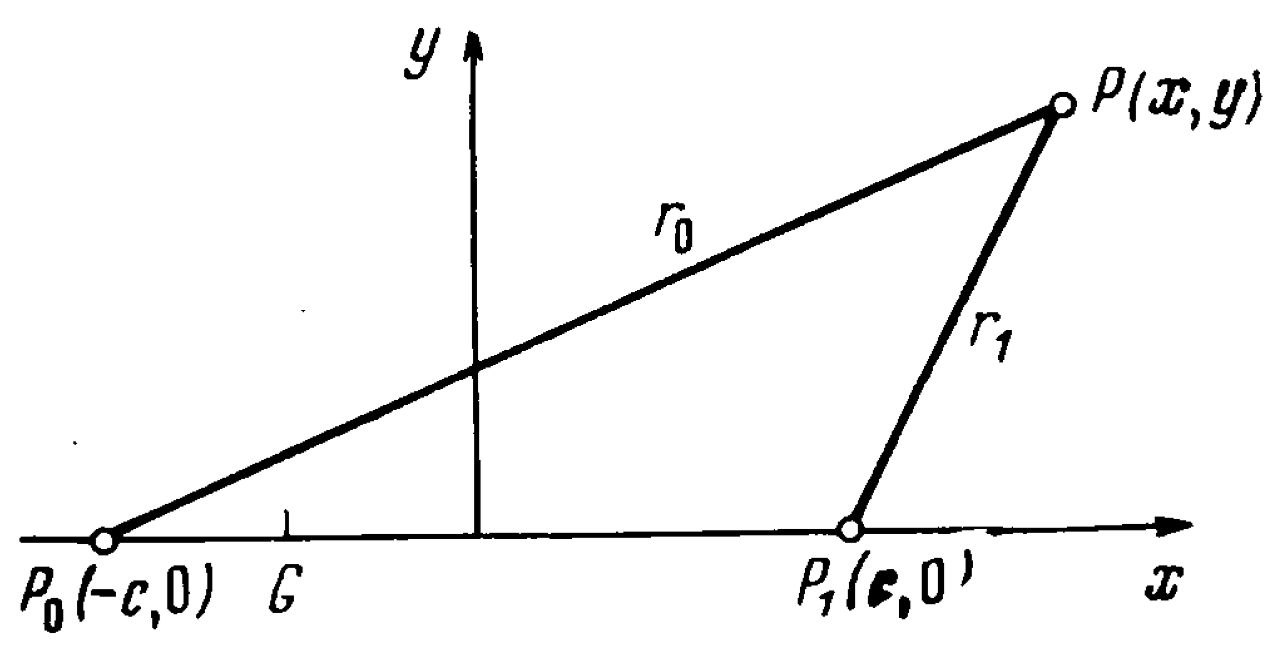
$$\left(\frac{\partial S}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial v}\right)^2 + \frac{\partial S}{\partial u}\left[nc^2 \sin 2v - nc\,(a_1 - a_0)\,\mathrm{ch}\, u \sin v\right] + \tag{1}$$

$$+ \frac{\partial S}{\partial v}\left[nc^2\, \mathrm{sh}\, 2u - nc\,(a_1 - a_0)\,\mathrm{sh}\, u \cos v\right] = F_1(u) + F_2(v)$$

$$F_1(u) = hc^2\, \mathrm{ch}\, 2u + 2fc\,(m_0 + m_1)\,\mathrm{ch}\, u$$

$$F_2(v) = -hc^2 \cos 2v + 2fc\,(m_0 - m_1) \cos v$$

Здесь f — гравитационная постоянная, h — постоянная интеграла Якоби, n — угловая скорость вращения притягивающих точек P_0 и P_1 с массами m_0 и m_1 вокруг общего центра масс G. Другие параметры поясняются на фигуре, где



$$r_0^2 = (x + c)^2 + y^2, \quad r_1^2 = (x - c)^2 + y^2$$

$$|P_0G| = a_0, \quad |P_1G| = a_1$$

Связь между эллиптическими и прямоугольными координатами точки P выражается соотношениями

$$2c\, \mathrm{ch}\, u = r_0 + r_1, \qquad 2c \cos v = r_0 - r_1$$

Назовем в случае двух независимых переменных нелинейное уравнение в частных производных

$$f_1(q_1)\left[\frac{\partial W}{\partial q_1} + \varphi_1(q_1)\right]^2 + f_2(q_2)\left[\frac{\partial W}{\partial q_2} + \varphi_2(q_2)\right]^2 = \Phi_1(q_1) + \Phi_2(q_2) \tag{2}$$

уравнением Штеккеля. Именно такой вид имеет уравнение Гамильтона — Якоби в случае, когда оно интегрируется методом разделения переменных. Известно, что к нему приводятся системы Штеккеля, Лиувилля и их обобщения [2,4].

Теорема Штеккеля [2,5] дает необходимые и достаточные условия разделимости переменных в уравнении Гамильтона — Якоби, т. е. содержит условия, при которых уравнение Гамильтона — Якоби с независимыми переменными q_1, q_2 приводится к виду (2) с теми же переменными.

Выполним дифференцируемую невырожденную замену переменных

$$u = \psi_1(q_1, q_2), \qquad v = \psi_2(q_1, q_2) \tag{3}$$

для которой обратную замену обозначим через

$$q_1 = \omega_1(u, v), \qquad q_2 = \omega_2(u, v)$$

Теорема. Не существует невырожденной дифференцируемой замены переменных типа (3), преобразующей уравнение Гамильтона — Якоби (1) в уравнение Штеккеля (2).

Доказательство. Условия преобразования уравнения (1) в уравнение (2) имеют вид

$$\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial u}\right)^2+\left(\frac{\partial\omega_i}{\partial v}\right)^2=f_i(\omega_i)\qquad (i=1,\,2) \tag{4}$$

$$\frac{\partial\omega_1}{\partial u}\frac{\partial\omega_2}{\partial u}+\frac{\partial\omega_1}{\partial v}\frac{\partial\omega_2}{\partial v}=0$$

$$F_1(u)+F_2(v)=\Phi_1(\omega_1)+\Phi_2(\omega_2)-f_1(\omega_1)\varphi_1^2(\omega_1)-f_2(\omega_2)\varphi_2^2(\omega_2)$$

$$[nc^2\sin 2v-nc(a_1-a_0)\operatorname{ch}u\sin v]\frac{\partial\omega_i}{\partial u}+$$

$$+[nc^2\operatorname{sh}2u-nc(a_1-a_0)\operatorname{sh}u\cos v]\frac{\partial\omega_i}{\partial v}=2f_i(\omega_i)\varphi_i(\omega_i)\qquad (i=1,2)$$

Система (4) состоит из трех нелинейных уравнений в частных производных, двух квазилинейных уравнений и одного функционального уравнения и содержит восемь неизвестных функций (ω_1, ω_2, f_1, f_2, φ_1, φ_2, Φ_1, Φ_2).

Докажем, что, если $n=0$ и $c\neq 0$, система (4) ни при каком выборе входящих в нее функций не является совместной.

Полные интегралы первого и второго уравнений системы (4) находятся методом Лагранжа — Шарпи [6] (C_i — произвольные постоянные)

$$u+C_1v+C_2=\sqrt{1+C_1^2}\int\frac{d\omega_1}{\sqrt{f_1(\omega_1)}} \tag{5}$$

$$C_3u+v+C_4=\sqrt{1+C_3^2}\int\frac{d\omega_2}{\sqrt{f_2(\omega_2)}}$$

Условие невырожденности замены (5) $C_1C_3-1\neq 0$. Учитывая равенства (5), можно доказать, что третье уравнение системы (4) удовлетворяется при $C_1=-C_3$. Таким образом, замена

$$u=\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2}}\left[\int\frac{dq_1}{\sqrt{f_1(q_1)}}-C_1\int\frac{dq_2}{\sqrt{f_2(q_2)}}\right]+\frac{C_1C_4-C_2}{1+C_1^2} \tag{6}$$

$$v=\frac{1}{\sqrt{1+C_1^2}}\left[C_1\int\frac{dq_1}{\sqrt{f_1(q_1)}}+\int\frac{dq_2}{\sqrt{f_2(q_2)}}\right]-\frac{C_1C_2+C_4}{1+C_1^2}$$

с любыми положительными функциями $f_1(q_1)$ и $f_2(q_2)$ удовлетворяет первым трем уравнениям системы (4).

Рассмотрим теперь четвертое уравнение системы (4). Если подставить соотношения (6) в выражения для функций $F_1(u)$ и $F_2(v)$ и выполнить необходимые выкладки, то можно заключить, что четвертое равенство системы (4) имеет место тогда и только тогда, когда $C_1=0$, так как только в этом случае после замены переменных функция $F_1(u)+F_2(v)$ снова будет функцией с разделенными переменными. Это означает, что

$$u=\psi_1(q_1),\ v=\psi_2(q_2),\ q_1=\omega_1(u),\ q_2=\omega_2(v)$$

Но пятое уравнение системы (4) не имеет решений типа $q_1=\omega_1(u)$ ни при каком выборе функций $f_1(\omega_1)$ и $\varphi_1(\omega_1)$ (аналогично, шестое уравнение не имеет решений вида $q_2=\omega_2(v)$).

Таким образом, не существует таких криволинейных координат, с помощью которых уравнение Гамильтона — Якоби для плоской ограниченной задачи трех тел приводилось бы к уравнению типа Штеккеля (2).

Поступила 21 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демин В. Г.* Движение искусственного спутника в нецентральном поле тяготения, М., «Наука», 1968, стр. 30.
2. *Лурье А. И.* Аналитическая механика. М., Физматгиз, 1961, стр. 546.
3. *Демин В. Г.* Об одном частном случае интегрируемости уравнения Гамильтона — Якоби. Вестн. МГУ Сер. физ., астрон., 1960, № 1.
4. *Яров-Яровой М. С.* Об интегрировании уравнения Гамильтона — Якоби методом разделения переменных. ПММ, 1963, т. 27, вып. 6.
5. *Дубошин Г. Н.* Небесная механика. М., «Наука», 1968, стр. 310.
6. *Степанов В. В.* Курс дифференциальных уравнений М., «Наука», 1966, стр. 381—393.

УДК 531.36

ОБ УСТОЙЧИВЫХ ДВИЖЕНИЯХ

Ю. М.-Л. Костюковский

(Москва)

Рассматривается управляемая система, описываемая системой обыкновенных дифференциальных уравнений, правые части которой содержат произвольные гладкие функции времени. Формулируются условия, когда среди всех возможных движений этой системы не существует ни одного устойчивого по Ляпунову движения, принадлежащего заданному ограниченному множеству в пространстве ее состояний.

1. Движение управляемой системы задано системой уравнений

$$dx / dt = Q(t, x) + u(t), \qquad t \in I = \{t : t \geqslant t_0\} \tag{1.1}$$

$$x = (x_1, \ldots, x_n),\; u = (u_1, \ldots, u_n),\; Q(\cdot) = Q_1(\cdot), \ldots, Q_n(\cdot))$$

Здесь $x, u, Q(\cdot)$ — векторы в действительном n-мерном пространстве $R_x{}^n$, t_0 и t — начальный и текущий моменты времени соответственно. Вектор $x = x(t)$ характеризует состояние управляемой системы; $u = u(t)$, $t \in I$ — управляющее воздействие, график которого $\omega = \{(t, u) : u = u(t),\, t \in I\}$, $\omega[t_0, t]$ — сужение ω на $[t_0, t] \cap \cap I$; $x(t) = \varphi(t, t_0, x_0, \omega[t_0, t])$, $t \in I$ — движение системы (1.1) при заданном $\omega \in \Omega$, исходящее из начального состояния $x(t_0) = x_0$, Ω — некоторое допустимое множество $\{\omega\}$.

Сформулируем задачу, родственную задаче о выделении из общего континуального множества движений системы множества устойчивых и множества неустойчивых движений, которую впервые поставил Н. Г. Четаев [1,2].

Задача. По виду системы уравнений (1.1), которая отождествляется с управляемой системой, необходимо определить, когда среди всех возможных движений этой системы не существует ни одного устойчивого движения, принадлежащего заданному множеству G в $R_x{}^n$ при всех $t \in I$.

Обозначим

$$\operatorname{div}_x Q(t, x) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x_i} Q_i(t, x), \qquad \|x\| = \max_i |x_i|$$

$$d(a, Z) = \inf\{\|a - b\|,\, b \in Z\}, \qquad S(Z, \rho) = \{x \in R_x{}^n : d(x, Z) < \rho\}$$

Z — любое множество в $R_x{}^n$, $\bar S(Z, \rho)$ — замыкание $S(Z, \rho)$, где ρ — положительное число.