Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.4

ТЕОРИЯ ДВУМЕРНОГО ПОТЕНЦИАЛЬНОГО ПОЛЯ В КУСОЧНО-НЕОДНОРОДНЫХ АНИЗОТРОПНЫХ РЕГУЛЯРНЫХ СРЕДАХ

Л. А. Фильштинский

(Новосибирск)

Рассматривается потенциальное поле в кусочно-неоднородных средах, наделенных регулярной структурой. Основная структура образуется двоякопериодической системой групп произвольных инородных анизотропных включений. Субструктуру образует наличие в каждом из них своих инородных включений, обладающих той же периодичностью, что и основная структура. Вопрос об однозначном определении поля в структуре сводится к определению решений однородного эллиптического уравнения второго порядка в каждой из составляющих областей, удовлетворяющих условиям сопряжения на границах раздела сред и некоторым дополнительным соотношениям. Указанная краевая задача сводится к системе регулярных интегральных уравнений, разрешимость которой доказывается. Развиваются вопросы, связанные с моделированием кусочно-неоднородных анизотропных регулярных структур общего вида однородными анизотропными средами.

В качестве приложения рассматриваются некоторые задачи гидромеханики и теории анизотропных армированных материалов.

1. Постановка основной задачи. Пусть ω_1 и ω_2 ($\operatorname{Im}\omega_1 = 0$, $\operatorname{Im}\omega_2 / \omega_1 > 0$) — основные периоды кусочно-неоднородной среды, разбивающие ее на совокупность конгруентных фундаментальных ячеек Π_{mn} (например, на совокупность параллелограммов периодов). Будем считать, что структура всех конгруентных ячеек тождественна, поэтому достаточно описать структуру ячейки Π_{00}.

Основную структуру ячейки Π_{00} образует группа из различных инородных анизотропных включений D_j, ограниченных замкнутыми кривыми L_j ($j = 1, 2, \ldots, r$). Субструктуру ячейки создает неоднородность каждой из областей D_j, т. е. наличие в них своих анизотропных включений d_{jq}, ограниченных замкнутыми кривыми l_{jq} ($j = 1, 2, \ldots, r$; $q = 1, 2, \ldots, r_j$). Будем предполагать, что L_j, l_{jq} — не имеющие общих точек простые гладкие кривые Ляпунова.

Пусть

$$L = \bigcup_{j=1}^{r} L_j, \quad d_j = \bigcup_{q=1}^{r_j} d_{jq}, \quad l_j = \bigcup_{q=1}^{r_j} l_{jq}, \quad B_j = D_j \setminus d_j$$

и D — неограниченная область, занятая основной однородной анизотропной средой (фигура).

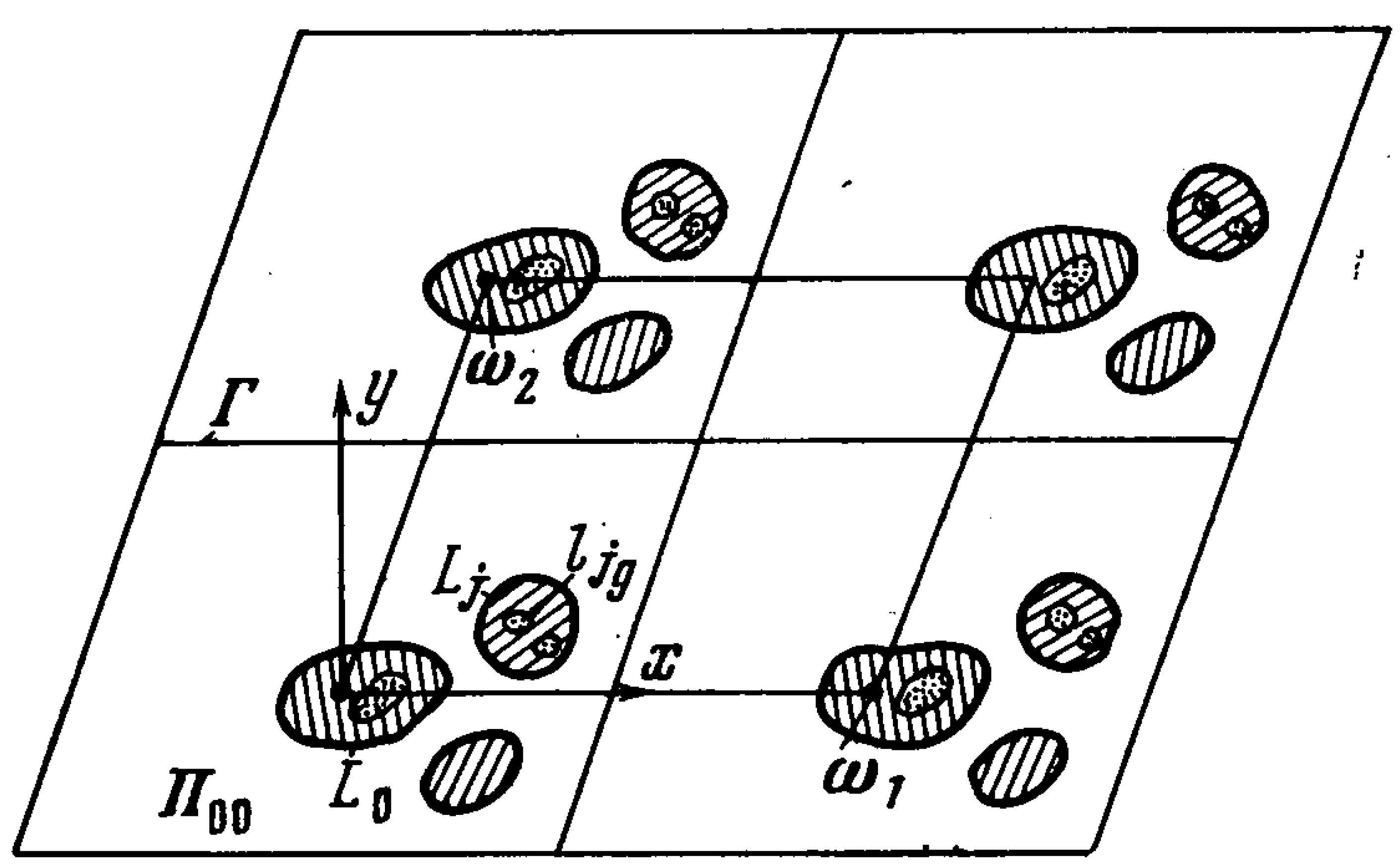
Рассмотрим скалярное поле, описываемое в каждой из областей D, B_j, d_{jq} уравнением эллиптического типа

$$K_{11}(z)\,W_{xx}(z) + 2K_{12}(z)W_{xy}(z) + K_{22}(z)\,W_{yy}(z) = 0 \tag{1.1}$$

$$K_{\alpha\beta}(z) = \begin{cases} K_{\alpha\beta}, & z \in D \\ K^j_{\alpha\beta}, & z \in B_j, \\ K^{jq}_{\alpha\beta}, & z \in d_{jq} \end{cases} \qquad W(z) = \begin{cases} u(z), & z \in D \\ u_j(z), & z \in B_j \\ u_{jq}(z), & z \in d_{jq} \end{cases}$$

$$K_{11}(z)\,K_{22}(z) - K_{12}{}^2(z) > 0, \alpha, \beta = 1, 2, \; K_{11}(z) > 0, K_{22}(z) > 0$$

Здесь $K_{\alpha\beta}$, $K^j_{\alpha\beta}$, $K^{jq}_{\alpha\beta}$ — константы, определяющие физико-технические свойства анизотропных компонентов структуры.



Под потоком поля q в каждой точке области, занятой каким-либо компонентом среды, будем понимать выражение

$$\begin{gathered} q = q_1(z) + iq_2(z) = -[K_{11}(z)W_x + K_{12}(z)W_y] - \\ -i[K_{21}(z)\,W_x + K_{22}(z)W_y] \\ K_{12}(z) = K_{21}(z) \end{gathered} \tag{1.2}$$

Здесь $q_\nu(z)$ принимает значения q_ν, $q_\nu{}^j$ и $q_\nu{}^{jq}$ в областях D, B_j, d_{jq} соответственно.

Предположим, что среды, заполняющие конгруентные области структуры, тождественны в смысле физико-технических свойств и для всякого $z \in D$ имеют место равенства (q_n — нормальная составляющая вектора q)

$$\int_z^{z+\omega_\nu} q_n ds = |-\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Im}\,\Omega_\nu = \mathrm{const}, \quad \Delta = K_{11}K_{22} - K_{12}{}^2, \qquad \nu = 1, 2 \tag{1.3}$$

В этих условиях поле в неограниченной кусочно-неоднородной среде полностью определяется полем в структуре фундаментальной ячейки. Поэтому основную краевую задачу сформулируем следующим образом.

В каждой из областей D, B_j, d_{jp} построить регулярные решения уравнения (1.1), удовлетворяющие дополнительным условиям (1.3) и следующим краевым условиям на границе раздела компонентов среды:

$$\begin{gathered} u(t) = u_j(t) + g_j(t), \quad q_n(t) = q_n{}^j(t), \qquad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r \\ u_j(t) = u_{jp}(t) + g_{jp}(t), \quad q_n{}^j(t) = q_n{}^{jp}(t), \qquad t \in l_{jp}, \\ p = 1, 2, \ldots, r_j \end{gathered} \tag{1.4}$$

Под $g_j(t)$, $g_{jp}(t)$ понимаем заданные соответственно на L_j, l_{jp} — произвольные непрерывные по Гельдеру функции.

Преобразуем описанную краевую задачу к более удобному виду. С этой целью выразим общее решение уравнения (1.1) через произвольные аналитические функции. Имеем

$$
(1.5)\qquad
\begin{gathered}
u = \operatorname{Re}\varphi(z_0), \quad u_j = \operatorname{Re}\varphi_j(z_j), \quad u_{jq} = \operatorname{Re}\varphi_{jq}(z_{jq}) \\
z_0 = x + \mu_0 y, \quad z_j = x + \mu_j y, \quad z_{jq} = x + \mu_{jq} y \\
\mu(z) = \begin{cases} \mu_0 = \alpha_0 + i\beta_0, & z \in D \\ \mu_j = \alpha_j + i\beta_j, & z \in B_j, \\ \mu_{jq} = \alpha_{jq} + i\beta_{jq}, & z \in d_{jq}, \end{cases} \qquad \operatorname{Re}\mu(z) = -\frac{K_{12}(z)}{K_{22}(z)}, \quad |\mu(z)|^2 = \frac{K_{11}(z)}{K_{22}(z)} \\
\beta_0 > 0, \quad \beta_j > 0, \quad \beta_{jq} > 0, \quad j = 1, 2, \ldots, r; \quad q = 1, 2, \ldots, r_j
\end{gathered}
$$

В плоскости z_0 периодичность структуры не нарушится, основные периоды ω_{10} и ω_{20} имеют здесь вид

$$
(1.6)\qquad
\begin{gathered}
\omega_{10} = \omega_1, \quad \omega_{20} = \operatorname{Re}\omega_2 + \mu_0 \operatorname{Im}\omega_2 = \\
= h + \alpha_0 H + i\beta_0 H = h_0 + iH_0 \\
h = \operatorname{Re}\omega_2, \ H = \operatorname{Im}\omega_2, \quad h_0 = \operatorname{Re}\omega_{20}, \ H_0 = \operatorname{Im}\omega_{20}
\end{gathered}
$$

Для обозначения образов точек, кривых и областей, получающихся при афинном отображении физической плоскости z на плоскости z_0, z_j, z_{jq} ($j = 1, 2, \ldots, r$; $q = 1, 2, \ldots, r_j$), будем приписывать к обозначениям одноименных прообразов в плоскости z, соответственно нолик, штрих и два штриха.

Вычислим поток Q, проходящий через произвольную кривую, соединяющую точки A и B в D.

Находим, учитывая (1.5) и (1.2)

$$
(1.7)\qquad Q = \int_A^B q_n ds = \int_A^B (q_1 dy - q_2 dx) = -\sqrt{\Delta}\operatorname{Im}\varphi(z_0)\Big|_{A_0}^{B_0}
$$

В силу (1.7) дополнительные условия (1.3) приобретают вид

$$
(1.8)\qquad
\begin{gathered}
\operatorname{Im}\{\varphi(z_0 + \omega_{10}) - \varphi(z_0)\} = \operatorname{Im}\Omega_1 \\
\operatorname{Im}\{\varphi(z_0 + \omega_{20}) - \varphi(z_0)\} = \operatorname{Im}\Omega_2
\end{gathered}
$$

Из (1.8) следует квазипериодичность регулярной в D° функции $\varphi(z_0)$ по периодам ω_{10} и ω_{20}.

Краевые условия (1.4), учитывая (1.7), можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$
(1.9)\qquad
\begin{gathered}
\varphi(t_0) = \varepsilon_j \varphi_j(t_j) + \varepsilon_j^* \overline{\varphi_j(t_j)} + g_j(t) \\
t \in L_j, \quad t_0 \in L_j^\circ, \quad t_j \in L_j' \\
\varphi_j(t_j) = \varepsilon_{jq}\varphi_{jq}(t_{jq}) + \varepsilon_{jq}^* \overline{\varphi_{jq}(t_{jq})} + g_{jq}(t) \\
t \in l_{jq}, \quad t_j \in l_{jq}', \quad t_{jq} \in l_{jq}''
\end{gathered}
$$

$$
\varepsilon_j = \frac{1}{2}(1 + \lambda_j), \quad \varepsilon_j^* = \frac{1}{2}(1 - \lambda_j), \quad \varepsilon_{jq} = \frac{1}{2}(1 + \lambda_{jq}), \quad \varepsilon_{jq}^* = \frac{1}{2}(1 - \lambda_{jq}),
$$

$$
\lambda_j = \frac{\beta_j K_{22}^j}{\beta K_{22}}, \quad \lambda_{jq} = \frac{\beta_{jq} K_{22}^{jq}}{\beta_j K_{22}^j}, \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad q = 1, 2, \ldots, r_j
$$

Постоянные интегрирования, которые должны фигурировать в правых частях (1.9), включены в искомые функции φ_j, φ_{jq}.

Таким образом, приходим к следующей краевой задаче.

Определить квазипериодическую в D° функцию $\varphi(z_0)$ и регулярные в областях B_j' и d_{jq}'' соответственно функции $\varphi_j(z_j)$ и $\varphi_{jq}(z_{jq})$ по краевым условиям (1.9) и дополнительным условиям (1.8). Подразумевается, что условия квазипериодичности $\varphi(z_0)$ выполняются автоматически за счет выбора специального представления функции $\varphi(z_0)$.

Положим

$$\varphi(z_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^\bullet} \{\varepsilon(t)P(t) - \varepsilon^*(t)\overline{P(t)}\}\zeta(t_0 - z_0)\,dt_0 + Az_0, \qquad z_0 \in D^\circ \tag{1.10}$$

$$\varphi_j(z_j) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_j'} \frac{P_j(t)}{t_j - z_j}dt_j + \frac{1}{2\pi i}\sum_{p=1}^{r_j}\int\limits_{l_{jp}'}\{\varepsilon_{jp}P_{jp}(t) - \varepsilon_{jp}^*\overline{P_{jp}(t)}\}\frac{dt_j}{t_j - z_j}, \quad z_j \in B_j'$$

$$\varphi_{jq}(z_{jq}) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l_{jq}''}\frac{P_{jq}(t)}{t_{jq} - z_{jq}}dt_{jq}, \quad z_{jq} \in d_{jq}'', \quad j = 1, 2, \ldots, r, \quad q = 1, 2, \ldots, r_j$$

$$t_0 = \frac{t}{2}(1 - i\mu_0) + \frac{\bar t}{2}(1 + i\mu_0), \quad z_0 = \frac{z}{2}(1 - i\mu_0) + \frac{\bar z}{2}(1 + i\mu_0)$$
$$t \in L, \qquad z \in D$$

$$t_j = \frac{t}{2}(1 - i\mu_j) + \frac{\bar t}{2}(1 + i\mu_j), \quad z_j = \frac{z}{2}(1 - i\mu_j) + \frac{\bar z}{2}(1 + i\mu_j)$$
$$t \in L_j + l_j, \qquad z \in B_j$$

$$t_{jq} = \frac{t}{2}(1 - i\mu_{jq}) + \frac{\bar t}{2}(1 + i\mu_{jq}), \quad z_{jq} = \frac{z}{2}(1 - i\mu_{jq}) + \frac{\bar z}{2}(1 + i\mu_{jq})$$
$$t \in l_{jq}, \qquad z \in d_{jq}$$

$$t_0 \in L^\circ, \quad t_j \in L_j' + l_j', \quad t_{jq} \in l_{jq}''$$

$$P(t) = \{P_j(t),\ t \in L_j\}, \quad \varepsilon(t) = \{\varepsilon_j\, t \in L_j\}, \quad \varepsilon^*(t) = \{\varepsilon_j^*,\ t \in L_j\}$$

Здесь $\zeta(z_0)$ — дзета-функция Вейерштрасса, построенная на периодах ω_{10} и ω_{20}, A — подлежащая определению константа. Обход при интегрировании вдоль l_{jq}'', l_{jp}' ведется по часовой стрелке, а при интегрировании по L_j', L_j° — против часовой стрелки.

Очевидно, функция $\varphi(z_0)$, определенная в (1.10), квазипериодична в D°.

Подставляя в (1.8) приращения $\varphi(z_0)$ и разрешая полученные уравнения относительно A, находим

$$A = A_L + A_\Omega \tag{1.11}$$

$$A_L = \left(\frac{\delta_{10}}{\omega_{10}} - \frac{\pi}{S_0}\right)a - \frac{\pi}{S_0}\bar a, \quad A_\Omega = \frac{1}{S_0}(\bar\omega_{10}\operatorname{Im}\Omega_2 - \bar\omega_{20}\operatorname{Im}\Omega_1)$$

$$\delta_{10} = \zeta(z_0 + \omega_{10}) - \zeta(z_0) = 2\zeta\left(\frac{\omega_{10}}{2}\right)$$

$$\delta_{20} = \zeta(z_0 + \omega_{20}) - \zeta(z_0) = 2\zeta\left(\frac{\omega_{20}}{2}\right)$$

$$a = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L^\circ}\{\varepsilon(t)P(t) - \varepsilon^*(t)\overline{P(t)}\}\,dt_0, \quad S_0 = \omega_{10}\operatorname{Im}\omega_{20}$$

Таким образом, представления (1.10) определяют квазипериодическую в D° функцию $\varphi(z_0)$, удовлетворяющую дополнительным условиям (1.8). Вопрос сводится к определению плотностей $P_j(t)$, $P_{jq}(t)$ из краевых условий (1.9).

2. Решение краевой задачи (1.9). Переходя в представлениях (1.10) к предельным значениям и подставляя их в краевые условия (1.9), получим систему интегральных уравнений Фредгольма второго рода относительно искомых функций P_j, P_{jq}

$$
\begin{aligned}
&P_j(\tau) - M_j\{P_j(t),\ P_{jq}(t),\ \tau\} = F_j(\tau), \tau \in L_j, \qquad j = 1, 2, \ldots, r \\
&P_{jq}(\tau) - M_{jq}\{P_{jq}(t), P_j(t), \tau\} = F_{iq}(\tau), \qquad \tau \in l_{jq}, \qquad q = 1, 2, \ldots, r_j
\end{aligned} \tag{2.1}
$$

$$
\begin{aligned}
M_j = &\frac{\varepsilon_j^*}{2\pi i\varepsilon_j}\int_{L_j}\overline{P_j(t)}\, d\left\{\ln\frac{\bar t_j - \bar\tau_j}{\sigma(t_0 - \tau_0)}\right\} - \frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} P_j(t)\, d\left\{\ln\frac{t_j - \tau_j}{\sigma(t_0 - \tau_0)}\right\} + \\
&+ \frac{1}{2\pi i\varepsilon_j}\int_{L^\circ\setminus L^\circ_j}\{\varepsilon(t)P(t) - \varepsilon^*(t)\overline{P(t)}\}\,\zeta(t_0 - \tau_0)\, dt_0 + \\
&+ \frac{\varepsilon_j^*}{2\pi i\varepsilon_j}\sum_{q=1}^{r_j}\int_{l_{jq}'}\{\varepsilon_{jq}\overline{P_{jq}(t)} - \varepsilon_{jq}^*(tP_{jq})\}\frac{d\bar t_j}{\bar t_j - \bar\tau_j} - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\sum_{q=1}^{r_j}\int_{l_{jq}'}\{\varepsilon_{jq}P_{jq}(t) - \varepsilon_{jq}^*\overline{P_{jq}(t)}\}\frac{dt_j}{t_j - \tau_j} + \frac{\tau_0}{\varepsilon_j}A_L
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
M_{jq} = &\frac{1}{2\pi i\varepsilon_{jq}}\sum_{s=1}^{r_j}{}'\int_{l_{js}'}\{\varepsilon_{js}^*\overline{P_{js}(t)} - \varepsilon_{js}P_{js}(t)\}\frac{dt_j}{t_j - \tau_j} - \\
&- \frac{1}{2\pi i}\int_{l_{jq}} P_{iq}(t)\, d\left\{\ln\frac{t_j - \tau_j}{t_{jq} - \tau_{jq}}\right\} - \frac{\varepsilon_{jq}^*}{2\pi i\varepsilon_{jq}}\int_{l_{jq}}\overline{P_{jq}(t)}\, d\left\{\ln\frac{\bar t_{jq} - \bar\tau_{jq}}{t_j - \tau_j}\right\} - \\
&- \frac{1}{2\pi i\varepsilon_{jq}}\int_{L_j'}\frac{P_j(t)}{t_j - \tau_j}\, dt_j
\end{aligned}
$$

$$
F_j(\tau) = \frac{1}{\varepsilon_j}[\tau_0 A_\Omega - g_j(\tau)], \qquad F_{jq}(\tau) = \frac{1}{\varepsilon_{jq}}g_{jq}(\tau)
$$

Штрих над суммой в выражении для M_{jq} означает, что слагаемое с номером $s = q$ необходимо опустить.

Если система (2.1) разрешима, то ее решение полностью определяет искомые аналитические функции φ, φ_j, φ_{jq}.

3. Теоремы единственности. Будем предполагать, что решения краевой задачи (1.9), (1.8) существуют.

Теорема 3.1. Между любыми двумя решениями краевой задачи (1.9) $\varphi^{(1)}(z_0)$, $\varphi_j^{(1)}(z_j)$, $\varphi_{jq}^{(1)}(z_{jq})$ и $\varphi^{(2)}(z_0)$, $\varphi_j^{(2)}(z_j)$, $\varphi_{jq}^{(2)}(z_{jq})$, каждое из которых удовлетворяет дополнительным условиям (1.8), имеют место соотношения

$$
\begin{aligned}
&\overset{\circ}{\varphi} = \varphi^{(2)}(z_0) - \varphi^{(1)}(z_0) = C, \qquad \overset{\circ}{\varphi}_j = \varphi_j^{(2)}(z_j) - \varphi_j^{(1)}(z_j) = C_j \\
&\overset{\circ}{\varphi}_{jq} = \varphi_{jq}^{(2)}(z_{jq}) - \varphi_{jq}^{(1)}(z_{jq}) = C_{jq}, \qquad j = 1, 2, \ldots, r; \quad q = 1, 2, \ldots, r_j \\
&C_j = \operatorname{Re} C + \frac{i}{\lambda_j}\operatorname{Im} C, \qquad C_{jq} = \operatorname{Re} C + \frac{i}{\lambda_j\lambda_{jq}}\operatorname{Im} C
\end{aligned} \tag{3.1}
$$

Для доказательства заметим прежде всего, что для любого регулярного в области B решения уравнения (1.1) имеет место «энергетическое» равенство

$$\iint\limits_B |W_y - \mu W_x|^2 \, dx\, dy = -\frac{1}{K_{22}} \int\limits_{L_B} W q_n \, ds \tag{3.2}$$

Здесь L_B — граница области B, q_n — нормальная составляющая потока q, введенного в (1.2), обход при интегрировании — против стрелки часов.

Формула (3.2) выводится при помощи обычных преобразований, вполне аналогичных тем, которые приводят к интегральной формуле Пуассона в теории потенциала. При $K_{11} = K_{22}$, $K_{12} = 0$ она и совпадает с формулой Пуассона.

Применяя (3.2) к рассматриваемой многокомпонентной структуре, получим с учетом (1.1), (1.9) и (1.5)

$$\begin{aligned} J = {} & K_{22} \iint\limits_{D_\Gamma} \left| \frac{\partial u}{\partial y} - \mu_0 \frac{\partial u}{\partial x} \right|^2 dx\, dy + \\ & + \sum_{j=1}^{r} K_{22}{}^j \iint\limits_{B_j} \left| \frac{\partial u_j}{\partial y} - \mu_j \frac{\partial u_j}{\partial x} \right|^2 dx\, dy + \\ & + \sum_{j=1}^{r} \sum_{q=1}^{r_j} K_{22}^{jq} \iint\limits_{d_{jq}} \left| \frac{\partial u_{jq}}{\partial y} - \mu_{jq} \frac{\partial u_{jq}}{\partial x} \right|^2 dx\, dy = \\ & = \sum_{j=1}^{r} \sum_{q=1}^{r_j} \int\limits_{l_{jq}} q_n{}^j g_{jq}(t)\, ds + \sum_{j=1}^{r} \int\limits_{L_j} q_n g_j(t)\, ds - \int\limits_{\Gamma} u q_n ds \end{aligned} \tag{3.3}$$

В (3.3) контуры l_{jq}, L_j и Γ (граница Π_{00}) обходятся против стрелки часов; D_Γ — $r+1$-связная область с границей $\Gamma \bigcup L$.

В силу квазипериодичности $\varphi(z_0)$ находим с учетом (1.5), (1.7) и (1.8)

$$\int\limits_{\Gamma} u q_n \, ds = (\operatorname{Re}\Omega_2 \operatorname{Im}\Omega_1 - \operatorname{Re}\Omega_1 \operatorname{Im}\Omega_2) \sqrt{\Delta} \tag{3.4}$$

Подставляя (3.4) в энергетическое равенство (3.3) и применяя затем (3.3) к разности двух решений краевой задачи (1.9), удовлетворяющих условию (1.8), приходим к требуемому утверждению.

Функции φ°, $\varphi_j{}^\circ$, $\varphi_{jq}{}^\circ$ можно интерпретировать как решения однородной краевой задачи (1.9), соответствующей

$$g_j(t) \equiv 0, \; g_{jq}(t) \equiv 0, \quad \operatorname{Im}\Omega_1 = \operatorname{Im}\Omega_2 = 0$$

Теорема 3.2. Пусть $\chi_j(t)$ и $\sigma_j(t)$ — граничные значения функции $\chi_j(z_0)$ и $\sigma_j(z_j)$, регулярных соответственно в конечной области на плоскости z_0, ограниченной кривой L_j^* и в дополнении D_j' до полной плоскости z_j. Если в окрестности бесконечно удаленной точки $\sigma_j(z_j) = O(|z_j'|^{-1})$, то краевая задача

$$\chi_j(t) = \varepsilon_j \sigma_j(t) + \varepsilon_j^* \overline{\sigma_j(t)}, \quad t \in L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, r$$

имеет лишь тривиальное решение.

Для доказательства применим формулу (3.2) к двухкомпонентной области, ограниченной окружностью C_R достаточно большого радиуса. Имеем

$$\beta_0^2 K_{22} \iint_{D_j} |\chi'(z_0)|^2\, dx\, dy + \beta_j^2 K_{22}{}^j \iint_{D_R} |\sigma_j'(z_j)|^2\, dx\, dy = \tag{3.5}$$
$$= \int_{C_R} q_n \operatorname{Re} \sigma_j(z_j)\, ds, \qquad \chi' = \frac{d\chi}{dz_0}$$

Здесь D_R — двухсвязная область с границей $L_j \bigcup C_R$. Неограниченно увеличивая R, приходим к требуемому результату.

4. Разрешимость системы (2.1). Докажем, что при сделанных предположениях относительно граничных линий и функций g_j, g_{jq} система интегральных уравнений (2.1) всегда разрешима.

Для этого рассмотрим соответствующую ей однородную систему. Очевидно, для того, чтобы $F_j(\tau) = 0$, $F_{jq}(\tau) = 0$, необходимы и достаточны условия

$$g_j(\tau) = 0,\ g_{jq}(\tau) = 0, \qquad \operatorname{Im} \Omega_1 = \operatorname{Im} \Omega_2 = 0 \tag{4.1}$$
$$j = 1, 2, \ldots, r; \quad q = 1, 2, \ldots, r_j$$

Таким образом, однородная система соответствует однородной краевой задаче (1.9) при однородных дополнительных условиях (1.8).

Обозначим решения однородной системы (2.1) через $P_j^\circ(t) P_{jq}^\circ(t)$. Функциям и функционалам, соответствующим этим решениям, также будем приписывать ноль снизу или сверху.

На основании теоремы единственности (3.1) запишем

$$\varphi^\circ(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L^\circ} \{\varepsilon(t) P_0(t) - \varepsilon^*(t) \overline{P_0(t)}\} \zeta(t_0 - z_0)\, dt_0 + \tag{4.2}$$
$$+ A_0 z_0 = C, \quad z_0 \in D^\circ$$
$$\varphi_j^\circ(z_j) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_j'} \frac{P_j^\circ(t)}{t_j - z_j}\, dt_j +$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^{r_j} \int_{l_{js}'} \{\varepsilon_{js} P_{js}^\circ(t) - \varepsilon_{js}^* \overline{P_{js}^\circ(t)}\} \frac{dt_j}{t_j - z_j} = C_j, \quad z_j \in B_j'$$
$$\varphi_{jq}^\circ(z_{jq}) = \frac{1}{2\pi i} \int_{l_{jq}''} \frac{P_{jq}^\circ(t)}{t_{jq} - z_{jq}}\, dt_{jq} = C_{jq}, \qquad z_{jq} \in d_{jq}''$$

Вычисляя приращения функции $\varphi^\circ(z_0)$ в первой формуле (4.2) при переходе от точки z к конгруентной точке $z + \omega_\nu$ ($\nu = 1,2$), получаем

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L^\bullet} \{\varepsilon(t) P_0(t) - \varepsilon^*(t) \overline{P_0(t)}\} \zeta(t_0 - z_0)\, dt_0 = C \tag{4.3}$$
$$A_0 = a_0 = 0, \qquad z_0 \in D^\circ$$

Из (4.3) следует, что функция $\varepsilon(t) P_0(t) - \varepsilon^*(t) \overline{P_0(t)}$ — граничное значение некоторых функций, регулярных в конечных областях плоскости z_0, ограниченных контурами L_j° ($j = 1, 3, \ldots, r$). Поэтому интеграл в (4.3) исчезает, и получаем на основании (3.1)

$$(4.4)\qquad C=0,\quad C_j=0,\quad C_{jq}=0,\qquad j=1,2,\ldots,r;\ q=1,2,\ldots,r_j$$

Введем в рассмотрение функции

$$(4.5)\qquad \begin{aligned} &i\chi_j(t)=\varepsilon_jP_j^\circ(t)-\varepsilon_j{}^*\overline{P_j^\circ(t)},\quad i\sigma_j(t)=P_j^\circ(t),\quad t\in L_j,\qquad j=1,2,\ldots,r\\ &i\chi_{jq}(t)=\varepsilon_{jq}P_{jq}{}^\circ(t)-\varepsilon_{jq}{}^*\overline{P_{jq}{}^\circ(t)},\quad i\sigma_{jq}(t)=P_{jq}{}^\circ(t)\\ &t\in l_{jq},\qquad q=1,2,\ldots,r_j\end{aligned}$$

Из (4.2) с учетом (4.4) и (4.5) заключаем, что $\chi_j(t)$ — граничное значение функций $\chi_j(z_0)$, регулярных в конечных областях, ограниченных кривыми L_j°; $\sigma_j(t)$ — граничное значение функций $\sigma_j(z_j)$, регулярных вне D_j' и исчезающих на бесконечности; $\chi_{jq}(t)$ — граничное значение функций $\chi_{jq}(z_j)$, регулярных в конечных областях, ограниченных кривыми l_{jq}', и, наконец, $\sigma_{jq}(t)$ — граничное значение функций $\sigma_{jq}(z_{jq})$, регулярных вне областей d_{jq}'' и исчезающих на бесконечности.

Исключая из (4.5) функции $P_j^\circ(t)$, $P_{jq}{}^\circ(t)$, приходим к системе независимых краевых задач

$$(4.6)\qquad \begin{aligned} &\chi_j(t)=\varepsilon_j\sigma_j(t)+\varepsilon_j{}^*\overline{\sigma_j(t)},\quad t\in L_j,\quad j=1,2,\ldots,r\\ &\chi_{jq}(t)=\varepsilon_{jq}\sigma_{jq}(t)+\varepsilon_{jq}{}^*\overline{\sigma_{jq}(t)},\quad t\in l_{jq},\quad q=1,2,\ldots,r_j\end{aligned}$$

Функции $\sigma_j(z_j)$ и $\sigma_{jq}(z_{jq})$ в окрестности бесконечноудаленной точки затухают не медленнее чем $|z_j^{-1}|$ и $|z_{jq}{}^{-1}|$ соответственно.

В силу теоремы 3.2 имеем

$$(4.7)\qquad \sigma_j(t)=\chi_j(t)=0,\quad \sigma_{jq}(t)=\chi_{jq}(t)=0,\quad j=1,2,\ldots,r;\ q=1,2,\ldots,r_j$$

Отсюда, на основании (4.5) заключаем

$$(4.8)\qquad P_j^\circ(t)=0,\quad P_{jq}{}^\circ(t)=0,\quad j=1,2,\ldots,r;\quad q=1,2,\ldots,r_j$$

Таким образом, система уравнений (2.1) всегда имеет решение и притом единственное.

Из доказательства видно, что без принципиальных изменений можно усложнять и далее структуру фундаментальной ячейки, вводя субструктуры более высоких порядков.

Устремляя периоды к бесконечности, получим решение краевой задачи (4.5) для многосвязной области с конечным числом компонент.

5. Модель регулярного поля (регулярной структуры). Положим $g_j(t)=0$, $g_{jq}(t)=0$.

В каждой из компонент среды имеет место скалярное поле, определяемое функциями u, u_j, u_{jq}. Поток в каждой точке поля задается формулой (1.2), а суммарный поток через дугу, соединяющую две конгруентные точки, не зависит от z и определяется в (1.3).

Введем средние потоки $\langle q_1\rangle$, $\langle q_2\rangle$ по формулам

$$(5.1)\qquad \begin{aligned} &\omega_1\langle q_2\rangle=\int_{z+\omega_1}^{z}q_n ds=\sqrt{\Delta}\,\operatorname{Im}\Omega_1\\ &h\langle q_2\rangle-H\langle q_1\rangle=\sqrt{\Delta}\,\operatorname{Im}\Omega_2\end{aligned}$$

Средние градиенты $\langle u_x \rangle$, $\langle u_y \rangle$ в структуре имеют вид

$$
\begin{aligned}
(5.2)\qquad & \langle u_x \rangle\, \omega_1 = \operatorname{Re} \varphi(z_0 + \omega_{10}) - \operatorname{Re} \varphi(z_0) = \operatorname{Re}\Omega_1 \\
& \langle u_x \rangle h + \langle u_y \rangle H = \operatorname{Re}\varphi(z_0 + \omega_{20}) - \operatorname{Re}\varphi(z_0) = \operatorname{Re}\Omega_2
\end{aligned}
$$

Выражая $\operatorname{Re}\Omega_1$, $\operatorname{Re}\Omega_2$ через $\operatorname{Im}\Omega_1$, $\operatorname{Im}\Omega_2$, находим с учетом (1.10) и (1.11)

$$
\begin{aligned}
(5.3)\qquad & \operatorname{Re}\Omega_1 = \frac{\omega_{10}}{H_0}\operatorname{Im}\Omega_2 - \frac{h_0}{H_0}\operatorname{Im}\Omega_1 - \frac{2\pi}{H_0}\operatorname{Re} a \\
& \operatorname{Re}\Omega_2 = \frac{h_0}{H_0}\operatorname{Im}\Omega_2 - \frac{|\omega_{20}|^2}{S_0}\operatorname{Im}\Omega_1 - \frac{2\pi}{\omega_{10}}\operatorname{Im} a - \frac{2\pi h_0}{S_0}\operatorname{Re} a
\end{aligned}
$$

Представим функционал a в виде

$$
(5.4)\qquad a = a_1 \operatorname{Im}\Omega_1 + a_2 \operatorname{Im}\Omega_2
$$

Здесь a_1 — функционал a, соответствующий решению $P(t)$ при $\operatorname{Im}\Omega_1 = 1$, $\operatorname{Im}\Omega_2 = 0$, а a_2 — функционал a, соответствующий $P(t)$ при $\operatorname{Im}\Omega_2 = 1$, $\operatorname{Im}\Omega_1 = 0$.

Вставляя в правые части (5.2) выражения (5.3) и учитывая формулы (5.1) и (5.4), приходим к закону связи между средними потоками и средними градиентами в структуре

$$
\begin{aligned}
(5.5)\qquad & \langle u_x \rangle = \varkappa_{11}\langle q_1 \rangle + \varkappa_{12}\langle q_2 \rangle, \qquad \langle u_y \rangle = \varkappa_{21}\langle q_1 \rangle + \varkappa_{22}\langle q_2 \rangle \\
& \varkappa_{11} = \frac{K_{22}}{\Delta}\left(\frac{2\pi}{\omega_1}\operatorname{Re} a_2 - 1\right), \qquad \Delta = K_{11}K_{22} - K_{12}^2 \\
& \varkappa_{12} = \frac{1}{\Delta}\left[K_{12} - \frac{2\pi}{H}K_{22}\operatorname{Re}\left(a_1 + \frac{h}{\omega_1}a_2\right)\right] \\
& \varkappa_{21} = \frac{1}{\Delta}\left\{K_{12} + \frac{2\pi}{\omega_1}\operatorname{Im}\left[a_2\left(\sqrt{\Delta} - i\frac{K_{12}}{H_0}\right)\right]\right\} \\
& \varkappa_{22} = -\frac{1}{\Delta}\left\{K_{11} + \frac{2\pi}{H}\operatorname{Im}\left[\left(a_1 + \frac{h}{\omega_1}a_2\right)\left(\sqrt{\Delta} - i\frac{K_{12}}{H_0}\right)\right]\right\}
\end{aligned}
$$

При $a_1 = a_2 = 0$ (однородная анизотропная среда) приходим в (5.5) к закону связи (1.2).

Коэффициенты при $\langle q_i \rangle$ в законе (5.5) назовем макроскопическими параметрами структуры, а однородную анизотропную среду, наделенную этими параметрами, — модельной средой.

Теорема 5.1. Макроскопические параметры структуры образуют симметричную невырожденную матрицу $\varkappa = \|\varkappa_{ik}\|$.

Для доказательства подставим в правую часть формулы (3.4) вместо $\operatorname{Re}\Omega_\nu$, $\operatorname{Im}\Omega_\nu$ $(\nu = 1,2)$ их выражения из (5.1) и (5.2). Тогда (3.3) можно представить в виде

$$
(5.6)\qquad J = -S\{\langle q_1 \rangle\langle u_x \rangle + \langle q_2 \rangle\langle u_y \rangle\}
$$

Вводя стандартные решения $u^{(\nu)}$, $u_j^{(\nu)}$, $u_{jq}^{(\nu)}$ $(\nu = 1,2)$ по формулам

$$
\begin{aligned}
(5.7)\qquad & u = u^{(1)}\langle q_1 \rangle + u^{(2)}\langle q_2 \rangle \\
& u_j = u_j^{(1)}\langle q_1 \rangle + u_j^{(2)}\langle q_2 \rangle \\
& u_{jq} = u_{jq}^{(1)}\langle q_1 \rangle + u_{jq}^{(2)}\langle q_2 \rangle
\end{aligned}
$$

и подставляя (5.7) в левую часть (3.3), получим (смысл J_{ik} ясен из текста)

$$
(5.8)\qquad \sum_{i,k=1}^{2} J_{ik}\langle q_i \rangle\langle q_k \rangle = -S\{\langle q_1 \rangle\langle u_x \rangle + \langle q_2 \rangle\langle u_y \rangle\}, \quad J_{ik} = J_{ki}
$$

Дифференцируя (5.8) по $\langle q_\nu \rangle$ ($\nu = 1,2$), приходим к закону (5.5). Матрица его коэффициентов $\varkappa$, очевидно, симметрична. В силу положительной определенности квадратичной формы в левой части (5.8) $\det \varkappa \neq 0$.

Результаты п. 5 суммирует следующая теорема.

Теорема 5.2. Для регулярной кусочно-неоднородной анизотропной структуры с квазипериодическими потоками Q существует модельная одно родная анизотропная среда, управляемая законом (5.5).

6. Приложения [1, 2].

Потенциальные течения в анизотропных пористых средах. Пусть имеет место потенциальное плоско-параллельное течение жидкости в кусочно-однородной анизотропной пористой среде, поперечное сечение которой представляет регулярную область указанной в п. 1 структуры. Потребовав, чтобы расход жидкости через любую кривую, соединяющую две конгруэнтные точки среды z и $z + \omega_\nu$ ($\nu=1, 2$), был постоянным и равнялся соответственно $-\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Im}\,\Omega_1$, $-\sqrt{\Delta}\,\mathrm{Im}\,\Omega_2$, придем к краевой задаче (1.4) при дополнительном условии (1.3). Под $K_{\alpha\beta}$, $K^j_{\alpha\beta}$, $K^{jq}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) понимаем коэффициенты фильтрации в анизотропных компонентах пористой среды (соотношение (1.2) — закон Дарси для каждой компоненты среды). Под u, u_j, v_{jq} понимаем давление в жидкости соответственно в компонентах среды D, B_j, d_{jq}. Искомые функции (скорости и давления в жидкости) полностью описываются соотношениями (1.5), (1.10) и системой интегральных уравнений (2.1).

В силу теоремы (5.2) для рассматриваемой кусочно-неоднородной пористой анизотропной среды существует модельная однородная пористая анизотропная среда, управляемая законом Дарси (5.5).

Поперечная теплопроводность армированных анизотропных сред. Пусть анизотропная среда, армированная конгруентными группами инородных анизотропных волокон (которые в свою очередь могут быть армированы инородными волокнами, так чтобы поперечное сечение такой среды имело описанную в п. I структуру), пронизывается нормальным к оси волокна стационарным тепловым потоком со средними значениями в каждой ячейке $\langle q_1 \rangle$ и $\langle q_2 \rangle$. В этом случае вновь приходим к краевой задаче (1.4), (1.3) для температуры u, u_j, u_{jq} в каждой из компонент среды. Величины $K_{\alpha\beta}$, $K^j_{\alpha\beta}$, $K^{jq}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1,2$) теперь следует интерпретировать как коэффициенты теплопроводности соответствующих компонент среды, а соотношения (1.2) — как закон, управляющий теплопроводностью в каждой компоненте. Согласно теореме 5.2, армированную среду можно заменить однородной модельной средой, управляемой законом (5.5).

Электростатическое поле в анизотропных армированных диэлектриках. Если неограниченную анизотропную кусочно-неоднородную среду с поперечным сечением указанного в п. 1 вида пронизывает поперечное электрическое поле с одинаковым в каждой фундаментальной ячейке средним вектором напряженности $\langle E \rangle = \langle q_1 \rangle + i\,\langle q_2 \rangle$, то приходим вновь в краевой задаче (1.4), (1.3) для потенциала поля u, u_j, u_{jq} в соответствующих компонентах среды. Величины $K_{\alpha\beta}$, $K^j_{\alpha\beta}$, $K^{jq}_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2$) — диэлектрические проницаемости материала соответствующих компонент среды. Соответствующая структуре модельная однородная анизотропная среда управляется законом (5.5), где K_{11}, K_{12}, K_{22} — диэлектрические проницаемости материала матрицы.

Если сопрягаемые среды (или только некоторые из них) изотропны, то все результаты остаются в силе. Необходимо лишь положить в соответствующей области $K_{12} = 0$, $K_{11} = K_{22} = K$ свое для каждой такой области.

Поступила 15 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.* Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.
2. *Полубаринова-Кочина П. Я., Фалькович С. В.* Теория фильтрации жидкостей в пористых средах. ПММ, 1947, т. 11, вып. 6.