УДК 539.3

О НЕКОТОРЫХ ПРЯМЫХ МЕТОДАХ И СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЯ В НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГИХ НЕПОЛОГИХ ОБОЛОЧЕК ВРАЩЕНИЯ

И. И. Ворович, Л. П. Лебедев, Ш. М. Шлафман

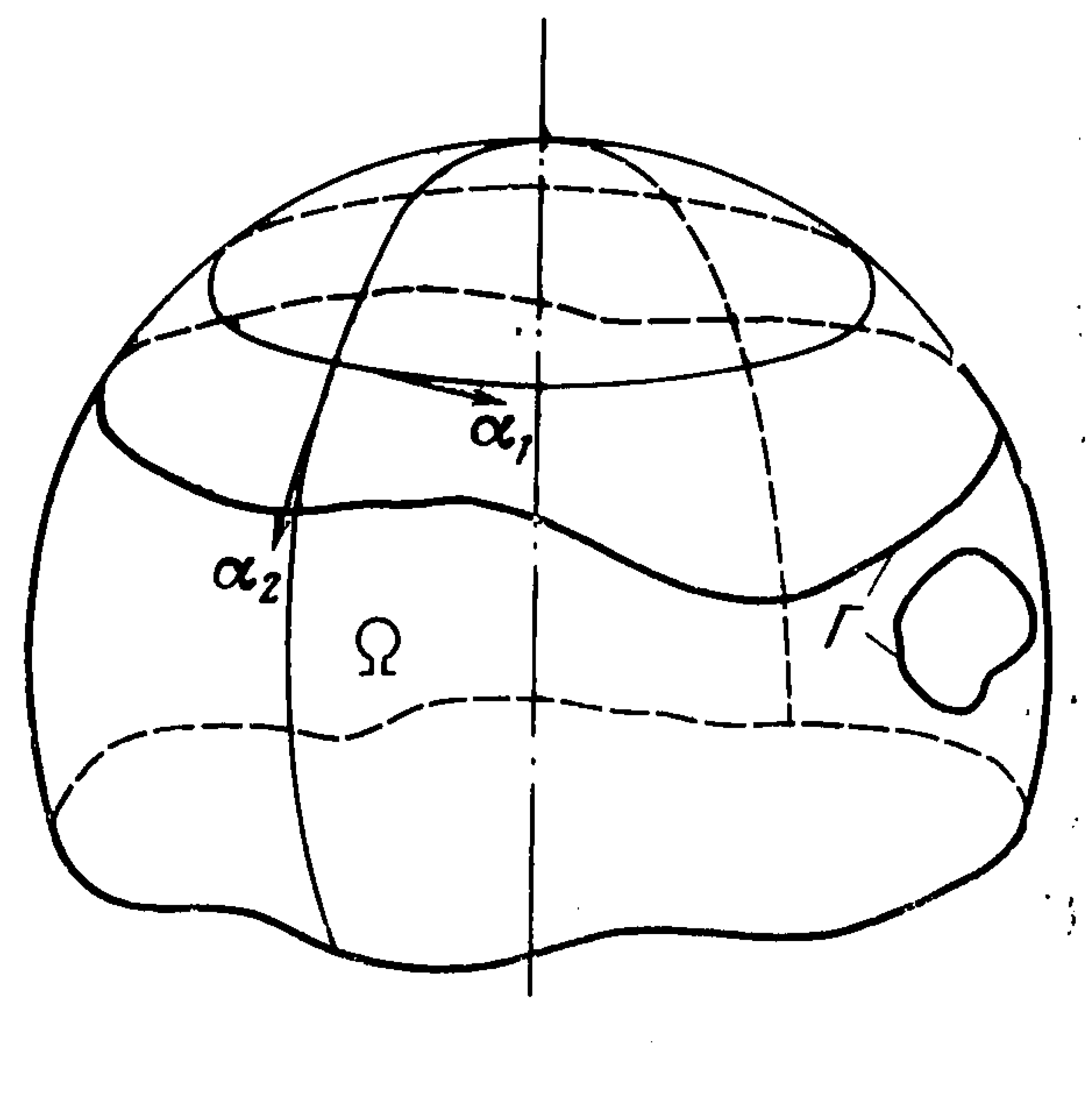
(Ростов-на-Дону)

Методами работы [1] доказывается существование обобщенного решения и обосновывается сходимость приближенных методов Ритца и Бубнова — Галеркина в задаче о равновесии упругой непологой оболочки, срединная поверхность которой является частью поверхности вращения, при произвольной нагрузке и жестко закрепленном крае. В частном случае осесимметричной деформации оболочки вращения вычислена важная топологическая характеристика задачи — вращение векторного поля.

1. Основные соотношения. Рассматривается следующий вариант соотношений нелинейной теории непологих оболочек, который можно получить из соотношений для среднего изгиба:

$$
\begin{aligned}
&(1.1)\qquad T_{ij}(\varepsilon_{kl}) = E_{ijkl}\varepsilon_{kl}, \qquad M_{ij} = D_{ijkl}\varkappa_{kl}\\
&\varepsilon_{ij} = e_{ij} + {}^1/{}_2\psi_i\psi_j, \qquad \psi_1 = A_1^{-1}w_{\alpha_1} - R_1^{-1}u_1\\
&e_{11} = A_1^{-1}u_{1\alpha_1} + A_{1\alpha_2}(A_1A_2)^{-1}u_2 + R_1^{-1}w\\
&2e_{12} = A_1A_2^{-1}(A_1^{-1}u_1)_{\alpha_2} + A_2A_1^{-1}(A_2^{-1}u_2)_{\alpha_1}\\
&\varkappa_{11} = -A_1^{-1}\psi_{1\alpha_1} - A_{1\alpha_2}(A_1A_2)^{-1}\psi_2\\
&2\varkappa_{12} = -A_1A_2^{-1}(A_1^{-1}\psi_1)_{\alpha_2} - A_2A_1^{-1}(A_2^{-1}\psi_2)_{\alpha_1}\\
&E_{ijkl} = E_{klij}, \qquad D_{ijkl} = {}^1/{}_3h^2E_{ijkl} \quad (1 \rightleftarrows 2)
\end{aligned}
$$

Здесь T_{ij} — тангенциальные усилия; ε_{ij} — деформации растяжения и сдвига; M_{ij} — изгибающие моменты; $\varkappa_{ij}$ — изменения кривизн R_k^{-1} срединной поверхности S^* оболочки, ψ_i — углы поворота координатных линий α_i; A_i^2, $2\,C = 0$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S^*; u_1, u_2, w — смещения точек срединной поверхности S^* оболочки; нижний индекс α_i означает дифференцирование по координате α_i; $2h$ — толщина оболочки; E_{ijkl}, D_{ijkl} — упругие характеристики оболочки.



Этот вариант теории непологих оболочек уже рассматривался в работах [2,3], однако в них приведено неверное доказательство основной априорной оценки решения задачи. В данной работе доказательство существования решения проводится способом, аналогичным [1].

Пусть выполняются следующие условия:

1) срединная поверхность S^* оболочки есть часть поверхности вращения, и гомеоморфное отображение ее меридиана $\alpha_1 = \text{const}$ на некоторый отрезок $[a, b]$ производится функцией $r(\alpha_2) \in C^{(3)}(a, b)$;

2) область Ω, занимаемая оболочкой в плане, является конечной суммой ограниченных звездных областей; если оболочка замкнута (см. фигуру), то в качестве Ω берется область, заключенная между прямыми $\alpha_1 = 0$, $\alpha_1 = 2\pi$;

3) граница Γ области Ω состоит из конечного числа замкнутых контуров класса Ляпунова $Л_1(m, 0)$;

4) всюду на области Ω справедливы неравенства

$$0 < m_1 \leqslant A_i, \qquad h, \ | R_i | \leqslant m_2$$

(здесь и далее $m_k > 0$ — некоторые положительные постоянные);

5) E_{ijkl} — кусочно-непрерывные на Ω функции, причем для всех симметричных тензоров ε_{ij} выполняется на Ω неравенство

$$m_3\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \leqslant E_{ijkl}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{kl} \leqslant m_4\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}$$

Условие 4) позволяет из всех соотношений (1.1) исключить компоненты вектора перемещений u_1, u_2 с помощью соотношений

$$u_i = R_iA_i^{-1}w_{\alpha_i} - R_i\psi_i, \qquad i = 1, 2$$

Далее эта замена считается произведенной всюду без каких-либо дополнительных оговорок.

Принцип Лагранжа определяет уравнения равновесия оболочки

$$\int_\Omega \{T_{ij}(\varepsilon_{kl})\,\delta\varepsilon_{ij} + M_{ij}\delta\varkappa_{ij}\}\,A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2 = \tag{1.2}$$
$$= \int_\Omega \{F_1(R_1A_1^{-1}\delta w_{\alpha_1} - R_1\delta\psi_1) + F_2(R_2A_2^{-1}\delta w_{\alpha_2} - R_2\delta\psi_2) +$$
$$+ F_3\delta w\}\,A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2$$

если край оболочки жестко заделан, т. е.

$$\psi_i|_\Gamma = 0, \qquad w|_\Gamma = 0, \qquad w_{\alpha_i}|_\Gamma = 0, \quad i = 1, 2 \tag{1.3}$$

Здесь F_i — компоненты вектора внешней нагрузки; знак вариации δ означает, что вместо вектор-функции $\omega\,(\psi_1, \psi_2, w)$ необходимо подставить в соответствующее выражение «возможное» перемещение $\delta\omega\,(\delta\psi_1, \delta\psi_2, \delta w)$, причем

$$\delta\varepsilon_{ij} = \delta e_{ij} + {}^1/_2\,(\psi_i\delta\psi_j + \psi_j\delta\psi_i)$$

Из уравнений (1.2) стандартным для вариационного исчисления методом можно получить систему трех дифференциальных уравнений относительно вектор-функции $\omega\,(\psi_1, \psi_2, w)$. Эта система равносильна обычной системе уравнений равновесия непологой оболочки в перемещениях u_1, u_2, w.

Вводится следующее скалярное произведение:

$$(\omega\cdot\delta\omega)_H = \int_\Omega \{T_{ij}(e_{kl})\,\delta e_{ij} + M_{ij}\delta\varkappa_{ij}\}\,A_1A_2\,d\alpha_1\,d\alpha_2 \tag{1.4}$$

Определение 1.1. Пространством **H** называется замыкание в норме соответствующей скалярному произведению (1.4), множества **C** вектор-функций $\boldsymbol{\omega}(\psi_1, \psi_2, w) \in C^{(1)}(\Omega) \times C^{(1)}(\Omega) \times C^{(2)}(\Omega)$, удовлетворяющих краевым условиям (1.3). В случае замкнутой оболочки (см. условие 2) необходимо от этих функций потребовать еще 2π-периодичность по переменной α_1.

Как в [4], можно доказать следующую лемму.

Лемма 1.1. Пусть выполняются условия 1) — 5). В этом случае пространство **H** является подпространством пространства

$$\mathbf{W} = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega) \times W_2^2(\Omega)$$

причем для произвольного элемента $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}$ справедливо неравенство

$$0 < m_5 \leqslant \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}} \|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{W}}^{-1} \leqslant m_6$$

с постоянными m_5, m_6, не зависящими от выбора $\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}$. Более того, пространство, образованное замыканием подмножества вектор-функций $\mathbf{a} \in \mathbf{C}$ вида $\mathbf{a} = (\psi_1, \psi_2, 0)$, в норме, соответствующей скалярному произведению в $\mathbf{H}_1$

$$(\mathbf{a} \cdot \delta\mathbf{a})_{\mathbf{H}_1} = \int_\Omega M_{ij} \delta\varkappa_{ij} A_1 A_2 \, d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

есть подпространство $\mathbf{W}_1 = W_2^1(\Omega) \times W_2^1(\Omega)$, причем на пространстве $\mathbf{H}_1$ нормы $\mathbf{H}_1$ и $\mathbf{W}_1$ эквивалентны.

Лемма 1.1 показывает, что для пространств **H**, $\mathbf{H}_1$ справедливы соответствующие теоремы вложения С. Л. Соболева [5].

2. Постановка задачи. Как и в [6], вводится понятие обобщенного решения.

Определение 2.1 Обобщенным решением задачи о равновесии упругой непологой оболочки с жестко заделанным краем называется вектор-функция $\boldsymbol{\omega}(\psi_1, \psi_2, w) \in \mathbf{H}$ такая, что для произвольной вектор-функции $\delta\boldsymbol{\omega} \in \mathbf{H}$ выполняется интегральное соотношение (1.2).

Воспользовавшись неравенством Гельдера и леммой 1.1, можно показать, что при таком определении обобщенного решения все члены уравнения (1.2) имеют смысл и, более того, каждый из них есть непрерывный линейный функционал по переменной $\delta\boldsymbol{\omega}$ в пространстве **H**, если выполняется условие

6) $F_1, \quad F_2 \in L_p(\Omega), \quad p > 1, \quad F_3 \in L(\Omega)$

На основании теоремы Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве уравнение (1.2) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве **H**

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{G}\boldsymbol{\omega}$$

Рассматривая вариацию функционала энергии J, можно показать, чт

$$\mathbf{I} - \mathbf{G} = \operatorname{grad}_{\mathbf{H}} J$$

$$J = \frac{1}{2}\|\boldsymbol{\omega}\|_{\mathbf{H}}^2 + J_2 = \frac{1}{2}\int_\Omega \{T_{ij}(\varepsilon_{kl})\varepsilon_{ij} + M_{ij}\varkappa_{ij}\} A_1 A_2 \, d\alpha_1 \, d\alpha_2 -$$

$$- \int_\Omega \{F_1 (R_1 A_1^{-1} w_{\alpha_1} - R_1 \psi_1) + F_2 (R_2 A_2^{-1} w_{\alpha_2} -$$
$$- R_2 \psi_2) + F_3 w\} A_1 A_2 \, d\alpha_1 \, d\alpha_2$$

Из явного вида функционала J_2 и леммы 1.1 следует, что J_2 слабо непрерывен, а это, в свою очередь, влечет за собой по теореме Э. С. Цитланадзе полную непрерывность оператора $\mathbf{G}$.

Существование обобщенного решения будет доказано, если показать существование критических точек функционала J (см. [1]).

Лемма 2.1 Пусть выполняются условия 1) — 5) и пусть имеется слабо сходящаяся к элементу ω_0 в пространстве $\mathbf{H}$ последовательность ω_n такая, что $J_4(\omega_n) \to 0$. В этом случае $\omega_0 = 0$. Здесь $J_4(\omega)$ — однородная по R четвертой степени часть функционала J при отображении единичной сферы $S\{\omega^* \in S\colon \|\omega\|_{\mathbf{H}} = 1\}$ на «эллипсоид» $C(R)$, определенном соотношениями

$$w = R^2 w^*, \ \psi_i = R\psi_i^*, \qquad i = 1, 2, \qquad \omega^* \in S, \ \omega \in C(R)$$

Без потери общности можно считать, что $\omega_n \in \mathbf{C}$.

Из вида функционала $J_4(\omega)$ и условия 5) вытекает, что в $L_2(\Omega)$, а следовательно и в $L(\Omega)$, должны стремиться к нулю величины

$$\gamma_{1n} = \frac{(R_1 A_1^{-1} w_{n\alpha_1})_{\alpha_1}}{A_1} + \frac{A_{1\alpha_2} R_2 w_{n\alpha_2}}{A_1 A_2^2} + \frac{w_n}{R_1} + \frac{1}{2}\psi_{1n}^2 \quad (1 \rightleftarrows 2) \quad (n \to \infty) \tag{2.1}$$

Умножая второе из соотношений (2.1) на $A_1 A_2 R_1^{-1}$, интегрируя по области Ω и привлекая соотношения Гаусса — Кодацци

$$(A_2^{-1} A_{1\alpha_2})_{\alpha_2} + (A_1^{-1} A_{2\alpha_1})_{\alpha_1} + A_1 A_2 R_1^{-1} R_2^{-1} = 0$$
$$(A_1 R_1^{-1})_{\alpha_2} = A_{1\alpha_2} R_2^{-1} \quad (1 \rightleftarrows 2)$$

элементарными преобразованиями можно получить

$$\frac{1}{4}\int_\Omega \psi_{2n}^2 R_1^{-1} A_1 A_2 d\alpha_1 d\alpha_2 = \int_\Omega \left\{\left(\frac{A_{2\alpha_1}}{A_1}\right)_{\alpha_1} w_n - \frac{1}{2}\gamma_{2n} R_1^{-1} A_1 A_2\right\} d\alpha_1 d\alpha_2$$

Отсюда следует (так как $A_{2\alpha_1} \equiv 0$), что

$$\int_\Omega \psi_{2n}^2 d\alpha_1 d\alpha_2 \to 0$$

т. е. $\psi_{20} = 0$. Из леммы 1.1 и второго из равенств (2.1) вытекает, что $\theta_n \to 0$ в пространстве $L_2(\Omega)$

$$\theta_n = A_2^{-1}(R_2 w_{n\alpha_2} A_2^{-1})_{\alpha_2} + w_n R_2^{-1} \tag{2.2}$$

Аналогично тому, как это проделано при доказательстве теорем вложения в [4], можно показать, что из соотношения (2.2) следует сильная сходимость к нулю в пространстве $L_2(\Omega)$ последовательностей w_n, $w_{n\alpha_2}$, $w_{n\alpha_2\alpha_2}$, т. е. $w_0 = 0$. Наконец, из первого из соотношений (2.1) вытекает $\psi_{10} = 0$, что и заканчивает доказательство.

Лемма 2.2. Если выполняются условия 1) — 6), то при достаточно больших $R > 0$ на эллипсоидах $C(R)$ справедлива оценка

$$J \geqslant m_7 R^2, \qquad m_7 > 0 \tag{2.3}$$

Доказательство неравенства (2.3) проводится по схеме [4]. Прообраз S эллипсоида $C(R)$ разбивается на три части: S_1, S_2 S_3. На S_1 $\{\omega^* (\mathbf{a}^*, w^*) \in S_1: \| \mathbf{a}^* \|_{\mathbf{H}_1}^2 \leqslant \varepsilon\}$ при достаточно малом, но вполне определенном $\varepsilon > 0$ функционал $J_4(\omega^*) \geqslant m_8$, $m_8 > 0$, и при отображении S_1 на $C(R)$ оценка (2.3) на этой части $C(R)$ выполняется, поскольку остальные члены функционала J имеют по R степень не выше третьей.

На остальной части сферы $S \setminus S_1$ выделяется множество S_2

$$\frac{1}{2} \| \omega^* \|_{\mathbf{H}}^2 - \int_\Omega \{F_1 A_2 R_1 w_{\alpha_1}^* + F_2 A_1 R_2 w_{\alpha_2}^* + F_3 A_1 A_2 w^*\} \, d\alpha_1 d\alpha_2 \geqslant \frac{1}{4} \varepsilon$$

Из вида функционала J следует, что на образе S_2 выполняется оценка (2.3) с константой $m_7 = {}^1/_5\, \varepsilon$.

Множество $S_3 = S \setminus (S_1 \cup S_2)$ не содержит слабого нуля. Из леммы 2.1 вытекает, что функционал $J_4(\omega^*)$ на S_3 строго положителен, откуда, как и выше, следует оценка (2.3) на образе S_3 в $C(R)$.

Эллипсоид $C(R)$ при $R > 0$ является границей связного выпуклого звездного относительно нуля множества в пространстве $\mathbf{H}$.

Из леммы 2.2 вытекает, что внутри некоторого эллипсоида $C(R)$ с достаточно большим параметром R имеется минимальная точка.

Действительно, пусть d_0 — точная нижняя грань функционала J в пространстве $\mathbf{H}$. Из леммы 2.2 вытекает, что $d_0 > -\infty$. Всякая минимизирующая функционал J последовательность ω_n, очевидно, лежит во множестве M, определяемом неравенством $J \leqslant d_0 + m_9$.

В силу оценки (2.3) это множество лежит в некотором эллипсоиде, который является ограниченным в $\mathbf{H}$ множеством, и следовательно, множество $\{\omega_n\}$ слабо компактно. Так как функционал J_2 слабо непрерывен то, повторяя дословно рассуждения [1], можно получить, что множество $\{\omega_n\}$ сильно компактно и каждый слабый предел ω_0 последовательности ω_n служит одновременно и сильным пределом. Следовательно

$$J(\omega_0) = \lim J(\omega_n) = d_0$$

что и заканчивает доказательство существования критических точек функционала J.

Таким образом, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть выполняются условия 1) — 6), указанные выше. В этом случае существует по меньшей мере одно обобщенное решение задачи в том смысле, как это указано в определении 2.1.

3. Сходимость метода Бубнова — Галеркина. Обоснование метода Бубнова — Галеркина в теории непологих оболочек проводится по той же схеме, что и для пологих оболочек [7].

Пусть χ_l — полная ортонормированная система вектор-функций в пространстве $\mathbf{H}$. Обобщенное решение задачи отыскивается приближенно методом Ритца в виде

$$\omega_n = \sum_{l=1}^{n} q_{nl} \chi_l \tag{3.1}$$

как минимальное значение функционала J на n-мерном многообразии M_n, натянутом на векторы χ_l, $l = 1, \cdots, n$, из следующей системы алгебраических уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial q_{nl}} J(\omega_n) = 0, \qquad l = 1, \ldots, n \tag{3.2}$$

В силу оценки (2.3) можно показать, что при достаточно больших значениях $R > 0$ на эллипсоидах $C_n^{\cdot}(R)$ в n-мерном пространстве коэффициентов q_{nl}, которые получаются из эллипсоидов $C(R)$ выделением точек, принадлежащих многообразию M_n, справедливо неравенство

$$J(0) \leqslant J(\omega_n), \qquad \omega_n \in C_n(R)$$

Следовательно, функционал J, рассматриваемый на многообразии M_n принимает минимальное значение внутри эллипсоида $C_n(R)$. Отсюда вытекает, что система уравнений (3.2) имеет по меньшей мере одно действительное решение, лежащее внутри эллипсоида $C_n(R)$ при достаточно большом $R > 0$. Это же решение лежит и внутри эллипсоида $C(R)$ пространства **H** независимо от n, т. е. последовательность приближенных решений Ритца слабо компактна в пространстве **H**.

Аналогично [1] можно показать сильную компактность последовательности приближенных решений Ритца.

Система уравнений метода Бубнова — Галеркина в n-м приближении строится следующим образом: в уравнение (1.2) вместо вектор-функции ω подставляется (3.1), а вместо $\delta\omega$ последовательно подставляются n вектор-функций базиса χ_l, $l = 1, \cdots, n$.

Из явного вида функционала J и его свойств, аналогично [1], вытекает теорема 3.1.

Теорема 3.1. Пусть выполняются все условия теоремы 2.1, и χ_l — полная ортонормированная система вектор-функций в пространстве **H**. Если обобщенное решение задачи разыскивается приближенно методом Ритца или методом Бубнова — Галеркина, то справедливы следующие утверждения:

1) при использовании обоих методов относительно коэффициентов q_{nl} всегда получается одна и та же система алгебраических уравнений, имеющая по крайней мере одно действительное решение;

2) множество приближенных решений ω_n, заключенных в сфере пространства **H** достаточно большого радиуса, бесконечно, сильно компактно и содержит последовательность, минимизирующую J;

3) каждая предельная точка множества приближенных решений ω_n есть обобщенное решение задачи в смысле определения 2.1.

Замечание. Все полученные выше теоремы остаются в силе, если вместо условия, что S^* — часть поверхности вращения, потребовать лишь что $A_{2\alpha_1} \equiv 0$.

4. Осесимметричная задача. Осесимметричный случай деформации оболочки приводится здесь по двум причинам: во-первых, из теоремы 2.1 не следует существование осесимметричного решения в случае деформации оболочки вращения осесимметричной нагрузкой, а во-вторых, в этом случае вычисляется топологическая характеристика задачи — вращение векторного поля.

Срединная поверхность S^* осесимметрично деформируемой изотропной однородной упругой оболочки есть часть поверхности вращения, заключенная между двумя параллелями $\alpha_2 = a$ и $\alpha_2 = b$. Основные соотношения (1.1) в этом случае принимают вид

$$
\begin{aligned}
(4.1)\qquad & T_{11}(\varepsilon_{kl}) = E_1(\varepsilon_{11} + \nu\varepsilon_{22}), \qquad T_{12} = 0\\
& M_{11} = D(\varkappa_{11} + \nu\varkappa_{22}), \qquad M_{12} = 0 \quad (1 \rightleftarrows 2)\\
& \varepsilon_{ij} = e_{ij} + {}^1/_2\, \psi_i\psi_j\\
& \varepsilon_{11} = A_{1\beta}(A_1A_2)^{-1}(R_2A_2^{-1}w_\beta - R_2\psi) + R_1^{-1}w\\
& \varepsilon_{22} = A_2^{-1}(R_2A_2^{-1}w_\beta - R_2\psi)_\beta + wR_2^{-1} + {}^1/_2\psi^2\\
& \varepsilon_{12} = \varepsilon_{21} = \psi_1 = \varkappa_{12} = \varkappa_{21} = 0, \qquad \psi_2 = \psi\\
& \varkappa_{11} = -A_{1\beta}(A_1A_2)^{-1}\psi, \qquad \varkappa_{22} = -A_2^{-1}\psi_\beta\\
& E_1 = 2hE(1-\nu^2)^{-1}, \qquad D = {}^2/_3 h^3 E(1-\nu^2)^{-1}, \qquad 0 < \nu < {}^1/_2.
\end{aligned}
$$

Здесь координата α_2 переобозначена через β, E — модуль Юнга, ν – коэффициент Пуассона. Все функции в (4.1) зависят лишь от координаты β.

Уравнение (1.2) в данном случае можно переписать в виде двух уравнений относительно функций ψ, w

$$
\begin{aligned}
(4.2)\qquad & \int_a^b \{M_{ij}\delta\varkappa_{ij}A_1A_2 - T_{11}A_{1\beta}R_2\delta\psi - T_{22}A_1(R_2\delta\psi)_\beta +\\
& + T_{22}A_1A_2\psi\delta\psi\}\,d\beta = -\int_a^b F_2R_2\delta\psi A_1A_2\,d\beta
\end{aligned}
$$

$$
(4.3)\qquad \int_a^b T_{ij}(\varepsilon_{kl})\,\delta\gamma_{ij}A_1A_2\,d\beta = \int_a^b \{F_2R_2A_1\delta w_\beta + F_3A_1A_2\delta w\}\,d\beta
$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\gamma_{11} &= A_{1\beta}(A_1A_2^2)^{-1}R_2w_\beta + wR_1^{-1}\\
\gamma_{22} &= A_2^{-1}(R_2w_\beta A_2^{-1}) + wR_2^{-1}
\end{aligned}
$$

Граничные условия 1.3 принимают вид

$$
(4.4)\qquad \psi(a) = \psi(b) = w(a) = w(b) = w'(a) = w'(b) = 0
$$

Условия, соответствующие условиям 1) — 6), записываются следующим образом:

1) срединная поверхность S^* оболочки представляет собой часть поверхности вращения, заключенную между параллелями $\beta = a$ и $\beta = b$; гомеоморфное отображение ее меридиана на отрезок $[a, b]$ производится функцией $r(\beta) \in C^{(3)}(a, b)$;

2) выполняются неравенства:

$$
0 < m_{10} \leqslant A_i, \qquad h, |R_i|, E \leqslant m_{11}, \; 0 < \nu < {}^1/_2
$$

3) внешние усилия удовлетворяют требованиям

$$
F_2 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-1}(a, b), \qquad F_3 \in \overset{\circ}{W}{}_2^{-2}(a, b)
$$

Определение 4.1. Замыкание множества функций $\psi \in C^{(1)}(a, b)$, удовлетворяющих краевым условиям (4.4), в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(4.5) \qquad (\psi \cdot \delta\psi)_{\mathbf{B}} = \int_a^b M_{ij} \delta\varkappa_{ij} A_1 A_2 d\beta$$

называется пространством **B**.

Определение 4.2. Замыкание множества функций $w \in C^{(2)}(a, b)$, удовлетворяющих краевым условиям (4.4), в норме, соответствующей скалярному произведению

$$(4.6) \qquad (w \cdot \delta w)_{\mathrm{S}} = \int_a^b T_{ij}(\gamma_{kl}) \delta\gamma_{ij} A_1 A_2 d\beta$$

называется пространством S.

Как и в [4], проводится доказательство следующей леммы.

Лемма 4.1. Пусть выполняются условия 1), 2) (п.4). В этом случае пространства **B** и S совпадают соответственно с пространствами $W_2^{\circ 1} \cdot (a, b)$ и $W_2^{\circ 2}(a, b)$, причем нормы (4.5) и (4.6) эквивалентны соответственно обычным нормам пространств $W_2^{\circ 1}(a, b)$ и $W^{\circ 2}_2(a, b)$.

Определение 4.3. Обобщенным осесимметричным решением задачи о равновесии упругой оболочки вращения с жестко заделанным краем под действием осесимметричной нагрузки называется пара функций $\psi \in \mathbf{B}$, $w \in \mathrm{S}$, удовлетворяющих уравнениям (4.2), (4.3) для любой пары функций $\delta\psi \in \mathbf{B}$, $\delta w \in \mathrm{S}$.

Все члены уравнений (4.2), (4.3) при таком определении обобщенного решения имеют смысл, если выполнены условия 1) — 3) (п. 4).

Используя лемму 4.1, а также теорему Рисса о представлении непрерывного линейного функционала в гильбертовом пространстве, уравнение (4.3) можно записать в виде операторного уравнения в пространстве S

$$(4.7) \qquad (w \cdot \delta w)_{\mathrm{S}} = \sum_{i=0}^{2} (\mathbf{K}_i \psi \cdot \delta w)_{\mathrm{S}}$$

Здесь $\mathbf{K}_i$ — непрерывные однородные операторы по переменной ψ из пространства **B** в S; i — степень однородности оператора $\mathbf{K}_i$. Можно показать, что $\mathbf{K}_2$ — вполне непрерывный оператор.

Подставляя выражение функции w из (4.7) в уравнение (4.2) и воспользовавшись еще раз теоремой Рисса, можно прийти к операторному уравнению в пространстве **B**

$$(4.8) \qquad \psi = \mathbf{G}_1 \psi$$

решение которого эквивалентно нахождению обобщенного решения.

Оператор $\mathbf{G}_1$ является суммой двух операторов: $\mathbf{G}_1 = \mathbf{L}_1 + \mathbf{G}_2$, где $\mathbf{G}_2$ — вполне непрерывный оператор (доказательство проводится как в [6]), а линейный непрерывный оператор L_1 задается соотношением

$$(L_1\psi\cdot\delta\psi)_B = -\int_a^b T_{ij}(e_{kl}^{(1)})\,\delta\varphi_{ij}A_1A_2d\beta, \qquad \varphi_{ij} = e_{ij} - \gamma_{ij}$$

$e_{kl}^{(1)}$ получается из e_{kl} заменой $w = K_1\psi$.

Из вида оператора L_1 вытекает следующее неравенство:

$$1 \leqslant \| I - tL_1 \| \leqslant m_{12}, \quad \text{если } 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4.9}$$

Для того, чтобы воспользоваться принципом Лерэя — Шаудера [8] о неподвижных точках операторов, доказываются две леммы.

Лемма 4.2. Если последовательность $\psi_n \to \psi_0$ сходится слабо в пространстве B, последовательность $w_n \to w_0$ сходится слабо в пространстве S и $J_4^*(\psi_n, w_n) \to 0$, то $\psi_0 = 0$. Здесь функционал $J_4^*(\psi, w)$ получается из функционала $J_4(\omega)$ (п. 1) очевидным образом.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1.

Лемма 4.3. Если выполняются условия 1) — 3) (п. 4), то на сферах $S(R)$, $\{\psi \in S(R): \|\psi\|_B = R\}$, достаточно большого радиуса R справедлива оценка

$$\begin{gathered}\Phi(\psi, t) = (\psi - tG_1\psi\cdot\psi)_B \geqslant m_{13}R^2 \\ \psi \in S(R), \quad 0 \leqslant t \leqslant 1, \quad m_{13} > 0\end{gathered} \tag{4.10}$$

Полагая в равенстве (4.3)

$$\delta w = \chi_0 = -\int_a^\beta \psi(\lambda)\,A_2(\lambda)\,d\lambda$$

и учитывая его, выражение $\Phi(\psi, t)$ можно привести к виду

$$\begin{aligned}\Phi(\psi, t) = \|\psi\|_B^2 + 2t\int_a^b \Big\{T_{ij}(\varepsilon_{kl})\,\varepsilon_{ij} - \\ - \frac{1}{2}[T_{11}(\varepsilon_{kl})R_1^{-1} + T_{22}(\varepsilon_{kl})R_2^{-1}]\chi_0\Big\}A_1A_2d\beta - \\ - 2t\int_a^b \Big\{F_2R_2A_2^{-1}w_\beta + F_3w - F_2R_2\psi + \frac{1}{2}F_3\chi_0\Big\}A_1A_2d\beta\end{aligned}$$

Структура функционала $\Phi(\psi, t)$ совпадает со структурой соответствующего функционала $\Phi(w, t)$ в [6], и оценка (4.10) доказывается аналогично [6] с учетом леммы 4.2.

Следующее неравенство очевидно:

$$\Phi(\psi, t) \leqslant \| I - tL_1 \| \, \| \psi - t(I - tL_1)^{-1}G_2\psi \|_B \, \|\psi\|_B \tag{4.11}$$

Из неравенств (4.9) — (4.11) вытекает лемма 4.4.

Лемма 4.4. На сферах $\psi \in S(R)$ достаточно большого радиуса R справедлива оценка

$$\| \psi - t(I - tL_1)^{-1}\;G_2\psi \|_B \geqslant m_{13}m_{12}^{-1}R, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1 \tag{4.12}$$

если выполнены условия 1) — 3) (п. 4).

Оператор $(\mathbf{I} - t\mathbf{L}_1)^{-1}\,\mathbf{G}_2$ при $0 \leqslant t \leqslant 1$, в силу оценки (4.9), вполне непрерывен. Из оценки (4.12) следует, что вполне непрерывное векторное поле $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{G}_2$ на сферах $S\,(R)$ достаточно большого радиуса R гомотопно [8] единичному полю $\mathbf{I}$, откуда вытекает теорема 4.1.

Теорема 4.1. Пусть выполняются условия 1) — 3) (п. 4). В этом случае существует по меньшей мере одно обобщенное в смысле определения 4.3 осесимметричное решение задачи о равновесии упругой непологой оболочки вращения с жестко заделанным краем под действием осесимметричной нагрузки.

Все обобщенные решения ограничены

$$\|\psi\|_{\mathrm{B}} \leqslant R, \qquad \|w\|_{\mathrm{S}} \leqslant m_{14}$$

где R — достаточно большой параметр, определенный в лемме 4.3, причем на сферах $S\,(R_1)$, $R_1 > R$, вращение вполне непрерывного векторного поля $\mathbf{I} - (\mathbf{I} - \mathbf{L}_1)^{-1}\mathbf{G}_2$ равно плюс единице.

Поступила 28 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ворович И. И.* О некоторых прямых методах в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1956, т. 20, вып. 4.
2. *Ворович И. И., Косушкин Г. А.* О разрешимости общей задачи для упругой замкнутой цилиндрической оболочки в нелинейной постановке. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
3. *Косушкин Г. А.* О разрешимости общей задачи для анизотропной слоистой оболочки в рамках теории среднего изгиба. ПММ, 1970, т. 34, вып. 3.
4. *Ворович И. И., Лебедев Л. П.* О существовании решений в нелинейной теории пологих оболочек. ПММ, 1972, т. 36, вып. 4.
5. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. Изд-во, ЛГУ, 1950.
6. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Докл. АН СССР, 1957, т. 117, № 2.
7. *Ворович И. И.* О существовании решений в нелинейной теории оболочек. Изв. АН СССР. Сер. матем., 1956, т. 19, № 4.
8. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М., Гостехиздат, 1956.