Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

МЕТОД ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ В ПЛОСКИХ АНТИСИММЕТРИЧНЫХ СМЕШАННЫХ ЗАДАЧАХ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ С ДВУМЯ УЧАСТКАМИ КОНТАКТА

В. А. Кучеров

(Ростов-на-Дону)

Показана возможность применения метода ортогональных полиномов для решения некоторых интегральных уравнений специального вида, если неизвестны собственные функции интегрального оператора, соответствующего главной (сингулярной) части ядра. В этом случае применение классической схемы [1-3] невозможно. Однако с помощью видоизмененных полиномов Чебышева удалось свести интегральное уравнение вида

$$\int_k^1 \varphi(\xi) \ln\left|\frac{\xi+x}{\xi-x}\right| d\xi = \pi f(x) - \int_k^1 \varphi(\xi) G(\xi, x, \lambda)\, d\xi \tag{0.1}$$

$$G(\xi, x, \lambda) = \xi x G_*(\xi, x, \lambda), \quad k \leqslant x \leqslant 1, \quad \lambda \in (0, \infty), \quad k \in (0, 1)$$

к удобной для приближенного решения бесконечной алгебраической системе первого рода. Здесь λ, k — безразмерные параметры, G_* — непрерывная, четная и симметричная относительно ξ, x функция. К уравнениям типа (0.1) сводятся нечетные по x, плоские антисимметричные смешанные задачи теории упругости с двумя участками контакта. Нечетная функция $f(x)$ описывает измененную под действием штампов форму границы слоя на участках контакта $k \leqslant |x| \leqslant 1$.

В качестве примера рассмотрена задача о вдавливании двух плоских штампов в полосу.

1. Представляя функцию $f(x) = f_0(x) + \beta \operatorname{sgn} x$, решение $\varphi(\xi)$ уравнения (0.1) ищем в виде

$$\varphi(\xi) = \varphi_0(\xi) + \varphi_1(\xi) \tag{1.1}$$

$$\int_k^1 \varphi_0(\xi) \ln\left|\frac{\xi+x}{\xi-x}\right| d\xi = \pi f_0(x) \qquad (k \leqslant x \leqslant 1) \tag{1.2}$$

Здесь $\varphi_0(\xi)$ — решение интегрального уравнения (1.2) — дано формулами работы [4], в которых положено $x / a = x$, $\xi / a = \xi$, $b / a = k$, $a = 1$. Имеем

$$\varphi_0(x) = \frac{2 \operatorname{sgn} x}{\pi g(x)} \left[M_0 - \int_k^1 \frac{g(\xi) f_0'(\xi) \xi}{\xi^2 - x^2}\, d\xi\right] \tag{1.3}$$

$$M_0 = \int_k^1 \varphi_0(x)\, x dx = \int_k^1 \left[\frac{E(k)}{K(k)} - 1 + x^2\right] \frac{f_0(x)}{g(x)}\, dx$$

$$P_0 = \int_k^1 \varphi_0(x)\, dx = \frac{1}{K(k)} \int_k^1 \frac{f_0(x)}{g(x)}\, dx, \quad g(x) = \sqrt{(1-x^2)(x^2-k^2)}$$

Здесь $K(k)$, $E(k)$ — полные эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно. Тогда функция $\varphi_1(x)$ найдется из уравнения (0.1), в котором вместо $f(x)$ нужно взять

$$\psi(x) = \beta\,\mathrm{sgn}\,x - \frac{1}{\pi}\int_k^1 \varphi_0(\xi)\,G(\xi, x, \lambda)\,d\xi \tag{1.4}$$

Решение интегрального уравнения (0.1) имеет особенность типа $g^{-1}(x)$, а для интегрального оператора в левой части (0.1) удалось отыскать лишь одну собственную функцию $\Phi_0(x) = \mathrm{sgn}\,x$ с весом $[\pi g(x)]^{-1}$ и собственным числом $K(k)$. Решение $\varphi_1(x)$ ищем в виде

$$\varphi_1(x) = \Phi(x)\,[|x|\,g(x)]^{-1} \tag{1.5}$$

Непрерывную со всеми производными при $x \in [k, 1]$ функцию $\Phi(x)$ ищем в виде ряда по видоизмененным полиномам Чебышева первого рода $T_i^*(x)$, образующим ортонормированную на отрезке $[k, 1]$ систему с весом $[\pi x g(x)]^{-1}$

$$\Phi(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T_i^*(x), \qquad T_i^*(x) = x T_{2i}\left(\sqrt{\frac{x^2 - k^2}{1 - k^2}}\right) \tag{1.6}$$

Подействуем оператором L_-

$$L_-(\varphi) = \frac{1}{\pi}\int_k^1 \varphi(\xi) \ln\left|\frac{\xi + x}{\xi - x}\right| \frac{d\xi}{\xi g(\xi)} \tag{1.7}$$

на функцию $T_n^*(\xi)$. Интегрируя, получим равенство (C_n, C_{ni} — некоторые постоянные)

$$L_-(T_n^*) = C_n\,\mathrm{sgn}\,x + \sum_{i=0}^{n-1} C_{ni} T_i^*(x) \tag{1.8}$$

Функцию $G(\xi, x, \lambda)$ разложим в двойной ряд по полиномам $T_i^*(x)$

$$G(\xi, x, \lambda) = \sum_{i, j=0}^{\infty} \alpha_{ij} e_{ij} T_i^*(x)\,T_j^*(\xi) \tag{1.9}$$

$$\alpha_{00} = 1, \quad \alpha_{i0} = \alpha_{0j} = 2, \quad \alpha_{ij} = 4$$

Подставляя (1.9) в (1.4) и интегрируя, получим

$$\psi(x) = \beta\,\mathrm{sgn}\,x + \sum_{i=0}^{\infty} \beta_i b_i T_i^*(x) \quad \left(\beta_0 = \frac{1}{2}, \;\; \beta_i = 1\right) \tag{1.10}$$

Воспользовавшись свойством ортогональности полиномов $T_i^*(x)$, заменой переменных

$$x = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 y}, \quad \xi = \sqrt{1 - k'^2 \sin^2 \eta}, \quad k' = \sqrt{1 - k^2}$$

получим выражения для определения коэффициентов b_i и e_{ij} (предполагается, что коэффициент β известен)

$$(1.11)\qquad b_i = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \frac{\psi^*(y)\cos 2iy}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 y}}\,dy$$

$$e_{ij} = \frac{1}{\pi^2}\int_0^{\pi}\int_0^{\pi} \frac{G^*(\eta, y, \lambda)\cos 2iy\cos 2j\eta}{\sqrt{(1-k'^2\sin^2 y)(1-k'^2\sin^2\eta)}}\,dy\,d\eta$$

$$\psi^*(y) = \psi(\sqrt{1-k'^2\sin^2 y}) - \beta$$

$$G^*(\eta, y, \lambda) = G(\sqrt{1-k'^2\sin^2\eta},\quad \sqrt{1-k'^2\sin^2 y}, \lambda)$$

Используя разложение (1.6), подставим выражения (1.5), (1.9), (1.10) в интегральное уравнение для $\varphi_1(x)$; после выполнения всех необходимых операций, приравнивая коэффициенты при $\operatorname{sgn} x$ и полиномах $T_i^*(x)$ одинакового порядка, получим бесконечную систему алгебраических уравнений относительно коэффициентов a_i

$$(1.12)\qquad \sum_{j=0}^{\infty} C_j a_j = \beta$$

$$\sum_{j=0}^{\infty} e_{ij}a_j + \gamma_i \sum_{j=i+1}^{\infty} C_{ji}a_j = b_i \qquad (\gamma_0 = 2,\ \gamma_i = 1,\ i = 0, 1, 2, \ldots)$$

2. В систему (1.12) входят коэффициенты C_n и C_{ni}, которые находятся для каждого n по формуле (1.8), что довольно трудоемко. Формул, прямо выражающих C_n и C_{ni} через k при произвольном n, найти не удалось.

Выведем формулы, выражающие взаимосвязь коэффициентов C_n и C_{ni}. С этой целью берем для уравнения (1.2) функцию $f(x)$ в виде правой части равенства (1.8), используя формулы (1.3), находим решение $\varphi_0(x)$ уравнения (1.2) для этого случая и приравниваем выражение $|x|\, g(x)\cdot\varphi_0(x)$ полиному $T_n^*(x)$. При этом используем соотношения (T_{2n} — полиномы Чебышева в виде суммы [5])

$$T_{2n}(u) = \sum_{i=0}^{n} \frac{(-1)^i n}{2n-i}\binom{2n-i}{i}(2u)^{2n-2i}$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{1-v^2}}{u^2-v^2}\,dv = \frac{\pi}{2} \qquad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

Используя замену переменных $x = \sqrt{k^2 + k'^2 u}$, получаем после преобразований равенство

(2.1)

$$T_{2n}(\sqrt{u}) = k'^2 \sum_{i=0}^{n-1} C_{ni}\left\{\sum_{j=0}^{i} \frac{(-1)^j i 4^{i-j}}{2i-j}\binom{2i-j}{j}\left[u^{i-j+1} - \frac{1}{2}u^{i-j} - S_{1j}(u)\right] -\right.$$

$$-4i\sum_{j=1}^{i}(-1)^j 4^{i-j}\binom{2i-j}{j-1}\left[u^{i-j+2}+\left(\frac{1}{k'^2}-\frac{3}{2}\right)u^{i-j+1}-\frac{1}{2}\left(\frac{k}{k'}\right)^2 u^{i-j}-\right.$$

$$\left.\left.-\left(\frac{k}{k'}\right)^2 S_{1j}(u)-S_{2j}(u)\right]\right\}+\left[\frac{E(k)}{K(k)}-\frac{k'^2}{2}\right]C_{n0}+\frac{k'^2}{4}C_{n1}+\frac{C_n}{K(k)}$$

$$S_{1j}=\sum_{m=1}^{i-j}\sum_{s=0}^{m-1}(-1)^s\binom{i-j}{m}\binom{m-1}{s}a_{ms}u^{i-j-m+s}$$

$$S_{2j}=\sum_{m=0}^{i-j}\sum_{s=0}^{m}(-1)^s\binom{i-j+1}{m+1}\binom{m}{s}b_{ms}u^{i-j-m+s}$$

$$a_{ms}=\frac{(2m-2s-1)!!}{(2m-2s+2)!!},\qquad b_{ms}=\frac{(2m-2s+1)!!}{(2m-2s+4)!!}$$

Для упрощения (2.1) понадобится равенство

$$\sum_{m=1}^{n}(-1)^m m^s\binom{n}{m}=\begin{cases}-1, & s=0\\ 0, & s\geqslant 1,\quad n\geqslant s+1\end{cases}\tag{2.2}$$

которое для $s=0$ и $s=1$ известно [5], а для $s\geqslant 2$ легко доказывается методом индукции. С помощью (2.2) доказывается равенство [5]

$$\sum_{m=s}^{n-1}(-1)^m\binom{n}{m+1}\binom{m}{s}=(-1)^s\tag{2.3}$$

Меняем в выражениях (2.1) для S_{1j}, S_{2j} порядок суммирования и после несложных преобразований применяем (2.3) к внутренним суммам. Получаем равенства

$$S_{1j}=\sum_{s=1}^{i-j}\frac{(2s-1)!!}{(2s+2)!!}u^{i-j-s},\qquad S_{2j}=\sum_{s=0}^{i-j}\frac{(2s+1)!!}{(2s+4)!!}u^{i-j-s}\tag{2.4}$$

Подставляя выражения (2.4) в (2.1), опять меняя порядок суммирования в оставшихся двойных суммах, с помощью равенств

$$\sum_{j=s}^{i}\frac{(-4)^j i}{i+j}\binom{i+j}{2j}a_{js}=(-1)^s 4^{s-1}\binom{i+s-2}{2s-2}\frac{2i-1}{2s-1}\tag{2.5}$$

$$\sum_{j=s}^{i-1}(-1)^j 4^{j+1}\binom{i+j}{2j}b_{js}=(-1)^s 2^{2s-1}\binom{i+s-2}{2s-1}$$

$$\sum_{j=s}^{i-1}(-1)^j 4^{j+1}\binom{i+j}{2j+1}a_{js}=(-1)^s 2^{2s+1}\binom{i+s-1}{2s}$$

записываем после перегруппировки членов окончательный вид упрощенного равенства (2.1)

$$T_{2n}(\sqrt{u}) = \frac{C_n}{K(k)} + \left[k'^2(u-1) + \frac{E(k)}{K(k)}\right] C_{n0} + \sum_{j=1}^{n-1} \left[2^{2j-1}(2j+1) \times \right. \tag{2.6}$$

$$\left. \times\, k'^2 u^{j+1} - \sum_{i=1}^{j} \frac{(-1)^{j-i} 4^{i-1} (j+i-2)!}{(2i-1)!\,(j-i)!}\, p_j(k)\, u^i + (-1)^j 2jk^2\right] C_{nj}$$

$$p_j(k) = (4ij^2 + i - 1)(j - i + 1)^{-1} k'^2 - 4j^2 i^{-1}(j + i - 1)\, k^2$$

Приравнивая в (2.6) члены одинаковой степени u, получаем систему $n+1$ уравнений относительно коэффициентов C_n, C_{ni}

$$(2n-1)\, k'^2 C_{nn-1} = 4 \tag{2.7}$$

$$(2i-1)\, k'^2 C_{ni-1} + \frac{2(-1)^i}{(2i-1)!} \sum_{j=i}^{n-1} \frac{(-1)^j (j+i-2)!}{(j-i)!}\, p_j(k)\, C_{nj} =$$

$$= (-1)^{n-i} \binom{n+i}{2i} \frac{8n}{n+i} \qquad (i = n-1,\ n-2, \ldots, 2)$$

$$2k'^2 C_{n0} + 8 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j j\,(k'^2 - j^2 k^2)\, C_{nj} = (-1)^{n-1} 4n^2$$

$$\frac{8C_n}{K(k)} + 8\left[\frac{E(k)}{K(k)} - k'^2\right] C_{n0} + 16k^2 \sum_{j=1}^{n-1} (-1)^j j C_{nj} = 8(-1)^n$$

Матрица коэффициентов системы (2.7) имеет треугольную форму. Неизвестные C_{ni} без труда находятся один за другим, начиная с C_{nn-1}. Однако систему (2.7) можно значительно упростить. Умножая обе части уравнений (2.7) на

$$\binom{2i}{i-m}$$

складываем первые $n - m + 1$ уравнений. Тогда с помощью тождеств

$$\sum_{i=m}^{j} \frac{d_{jm}}{(j-i)!} = \sum_{j=m}^{j-1} \frac{d_{jm}}{(j-i-1)!} = 0, \quad d_{jm} = \frac{(-1)^i (j+i-3)!}{(i-m)!\,(i+m)!} \tag{2.8}$$

$$(0 \leqslant m \leqslant j-3)$$

$$\sum_{i=m}^{n} \frac{(-1)^i}{n+i} \binom{n+i}{2i} \binom{2i}{i-m} = 0 \qquad (0 \leqslant m \leqslant n-1)$$

(справедливость которых, как и равенств (2.5), доказывается методом индукции) можно показать, что коэффициенты при C_{ni} для $i \geqslant m+2$ и $0 \leqslant m \leqslant n-3$, а также свободные члены для $0 \leqslant m \leqslant n-1$ равны нулю. Последовательно складывая два первых уравнения системы (2.7) ($m = n-1$), три уравнения ($m = n-2$) и т. д., получим следующие рекуррентные формулы для C_n, C_{ni} ($C_{ni} = 0$ при $i \geqslant n$):

$$(2.9)\qquad \begin{aligned} &(2n-1)\,k'^2C_{nn-1}=4, \qquad 4C_n+2q_{01}(C_{ni})=k'^2K(k)\,C_{n1}\\ &q_i(C_{ni})=-C_{n0}\,(i=1), \quad q_i(C_{ni})=0 \qquad (i=2,3,\ldots,n-1)\\ &q_{01}(C_{ni})=[2E(k)-k'^2K(k)]\,C_{n0}+k'^2\,K(k)\,C_{n1}\\ &q_i(C_{ni})=(2i-1)\,k'^2C_{ni-1}+4i\,(1+k^2)\,C_{ni}+(2i+1)\,k'^2C_{ni+1}\end{aligned}$$

Используя формулы (2.9), можно вообще исключить из уравнений системы (1.12) слагаемые, содержащие C_j и C_{ji}. Умножаем третье уравнение системы (1.12) на $k'^2K(k)$, второе — на $2E(k)=k'^2K(k)$ и складываем их с первым уравнением, умноженным на 4; затем четвертое уравнение умножаем на $3k'^2$, третье — на $4(1+k^2)$ и складываем их со вторым уравнением, умноженным на k'^2 и т. д. В результате система (1.12) с учетом $C_0=K(k)$ принимает канонический вид

$$(2.10)\qquad \begin{aligned} &a_i=\sum_{j=0}^{\infty}A_{ij}a_j+B_i \qquad (i=0,\,1,\,2,\ldots)\\ &A_{0j}=-q_{01}(e_{ij})\,[4K(k)]^{-1}, \qquad B_0=[q_{01}(b_i)+4\beta][4K(k)]^{-1}\\ &A_{ij}=-{}^1/_4q_i(e_{ij}), \quad B_i={}^1/_4q_i(b_i) \qquad (i=1,\,2\,\ldots)\end{aligned}$$

3. Приближенное решение системы (2.10) можно получить методом редукции, описанным, например, в работе [3], который для указанной системы тоже можно обосновать. В интегральном уравнении для $\varphi_1(\xi)$, разлагая функции в ряды, ограничиваемся членами степени не выше $2n+1$. Тогда в левой части уравнения степень переменной x в силу (1.8) будет не более $2n-1$. Поэтому необходимо в разложении (1.9) наложить на i ограничение $i\leqslant n-1$. Полиномы в разложениях функций нечетны, следовательно, можно записать условие для i,j в (1.9) в виде $i+j\leqslant n-$ -1, что эквивалентно первому ограничению. Тогда, если считать $e_{ij}=0$ при $i+j\geqslant n$, редуцированную систему уравнений (2.10) записываем в виде

$$(3.1)\qquad a_i=\sum_{j=0}^{n-i}A_{ij}a_j+B_i \qquad (i=0,\,1,\ldots,\,n)$$

Матрица A_{ij} коэффициентов системы уравнений (3.1) имеет почти треугольную форму.

Представляют интерес интегральные характеристики решения $\varphi_1(x)$. Величина силы P_1 определяется по формулам.

$$(3.2)\qquad \begin{aligned} &P_1=\int_k^1\varphi_1(x)\,dx=\sum_{i=0}^{n}a_iS_i, \qquad S_i=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2ix\,dx}{\sqrt{1-k'^2\sin^2 x}}\\ &S_0=K(k'), \quad S_1=[2E(k')-(1+k^2)\,K(k')]\,(k')^{-2}\\ &q_i(S_i)=0 \qquad (i=1,2,\ldots)\end{aligned}$$

Справедливость рекуррентной формулы в (3.2) очевидна. Для момента M_1 в силу (1.5), (1.6) имеем простое выражение

$$M_1 = \int_k^1 \varphi_1(x)\, x\, dx = \frac{\pi}{2} a_0$$

Остается отметить, что если функция $f(x)$ в уравнении (0.1) представима при $x \in [k, 1]$ быстро сходящимся рядом вида (1.10) или его отрезком, то решение $\varphi(x)$ целесообразно искать не в виде (1.1), а сразу по схеме метода полиномов $T_i^*(x)$.

В качестве примера рассмотрим задачу о контакте двух плоских ($f(x) = \operatorname{sgn} x$) штампов с упругой полосой, лежащей на жестком основании: на границах штампы — полоса — основание имеет место шарнирная заделка. Эта задача не имеет физического смысла, но является важной составной частью задач, в которых $f(x) = f_1(x) + \beta \operatorname{sgn} x$, функция $f_1(x)$ четная.

Коэффициенты e_{ij} ряда (1.9) подсчитывались на ЭВМ по формуле в (1.11) методом последовательных приближений с использованием квадратурной формулы Гаусса — Эрмита и значений затабулированной в [6] функции $F(t)$, которая является составной частью $G(\xi, x, \lambda)$. В силу свойств функции $G(\xi, x, \lambda)$ последовательные приближения должны сходиться к точному значению интеграла. В табл. 1 приведены значения $e_{ij} \cdot 10^4$ при $\lambda = 2$ и $k = 0.1$, $k = 0.5$, $k = 0.9$.

Приближенные решения $\varphi(x)$ интегрального уравнения (0.1) окончательно представлены в виде

$$\varphi(x) = \frac{\operatorname{sgn} x}{g(x)} P_{2n}(x), \qquad P_{2n}(x) = \sum_{i=0}^{n} d_i x^{2i}$$

Для случая $\lambda = 2$

$$P_{2n} = 0.636 + 0.205x^2 - 0.0650x^4 + 0.00792x^6, \qquad k = 0.1$$

$$P_{2n} = 0.569 + 0.194x^2 - 0.0592x^4 + 0.00512x^6, \qquad k = 0.5$$

$$P_{2n} = 0.383 + 0.136x^2 - 0.0310x^4, \qquad k = 0.9$$

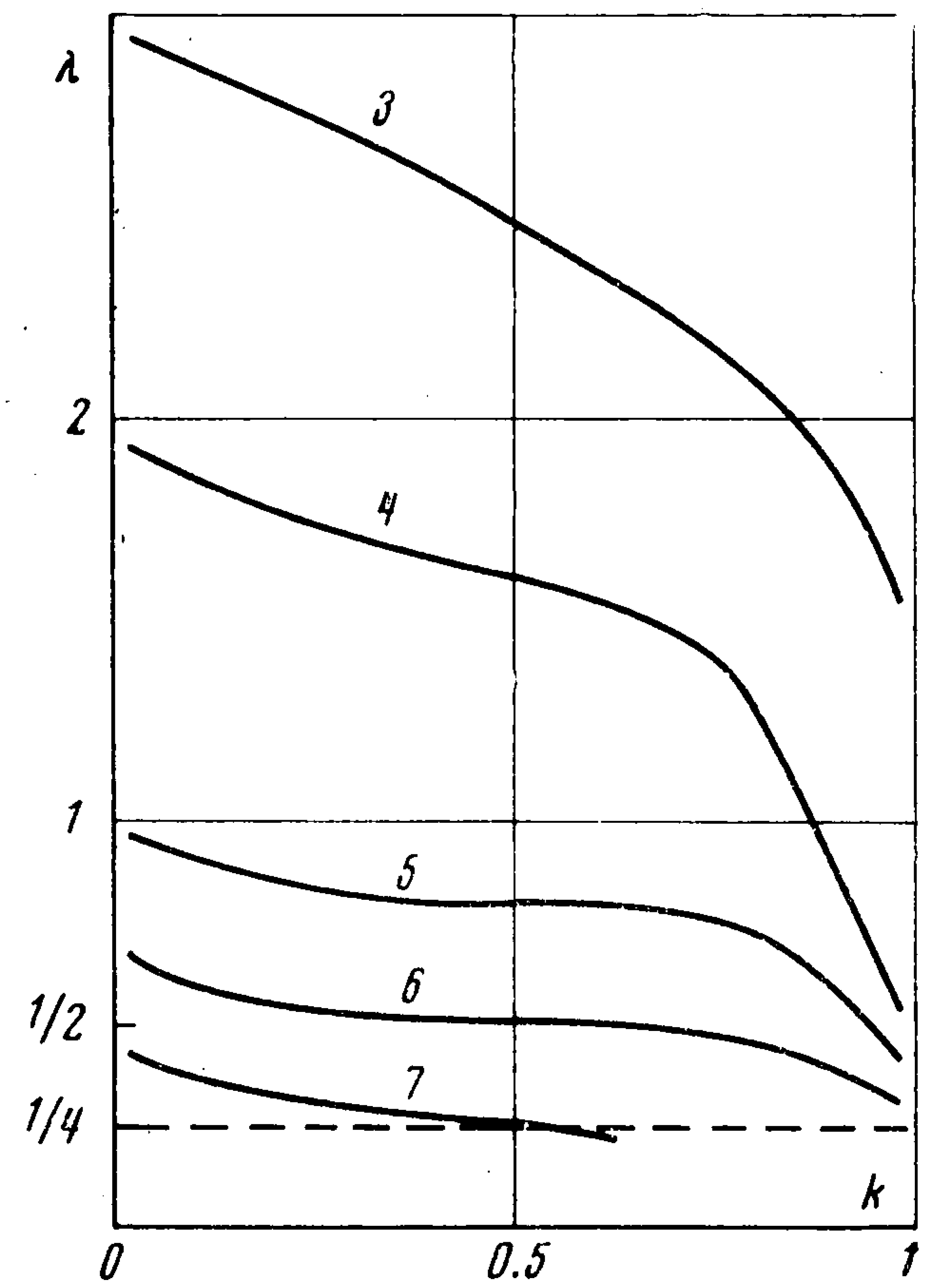
Таблица 1

k	$ij = 00$	$ij = 10$	$ij = 11$	$ij = 20$	$ij = 21$	$ij = 22$	$ij = 30$
0.1	—2307	130.2	—19.17	—2.682	0.006966	0.006650	0.06120
0.5	—2244	93.53	—9.944	—1.409	0.04146	0.0010	0.01580
0.9	—2110	21.00	—0.5120	—0.06120			

Таблица 2

k	$\chi(k)$	$\varphi(1 + k/2)$	$\chi(1)$	P	M
0.1	0.6414	1.533	0.7876	2.520	1.127
	0.6416	1.535	0.7784	2.514	1.123
0.5	0.7094	1.788	0.8210	1.418	1.046
	0.7098	1.786	0.8110	1.414	1.042
0.9	1.085	5.064	1.121	0.7954	0.7555
	1.083	5.038	1.111	0.7912	0.7514

В табл. 2 приведены некоторые характеристики решения $\varphi(x)$ для $\lambda = 2$, при этом введены обозначения



$$\chi(k) = \lim \varphi(x) \sqrt{x^2 - k^2} \quad \text{при } x \to k$$

$$\chi(1) = \lim \varphi(x) \sqrt{1 - x^2} \quad \text{при } x \to 1$$

Для сравнения в нижних строчках помещены значения соответствующих величин, полученные «методом больших λ» работы [4]. Расхождение значений при всех k не превышает 1.5%.

При уменьшении параметра λ, особенно для близких к нулю k, для выдерживания заданной точности решения $\varphi(x)$ число уравнений в системе (3.1) необходимо увеличивать. Расчеты показали, что метод систем в данном случае эффективен для $\lambda > 1/4$ при всех $0 < k < 1$; при этом для получения решения $\varphi(x)$ с точностью в 2% требуемое число уравнений в системе (3.1) не превышает семи.

На фигуре показаны границы применимости метода больших λ ($\lambda \geqslant 2$), метода систем ($\lambda > 1/4$); кривыми линиями отделены области, в которых необходимо одно и то же число уравнений системы (3.1) для получения решения $\varphi(x)$ с точностью не менее, чем в 2%, числом уравнений помечена каждая кривая.

Следует отметить, что решение уравнения (0.1), найденное в замкнутой форме с помощью специальной аппроксимации ядра [4], отличается от полученного методом систем для рассмотренного случая при $\lambda > 1/4$ не более, чем на 5%.

Автор благодарит В. М. Александрова за внимание к работе и полезные обсуждения.

Поступила 23 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Попов Г. Я.* Об одном приближенном способе решения некоторых плоских контактных задач теории упругости. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1961, т. 14, № 13.
2. *Александров В. М.* О приближенном решении одного класса интегральных уравнений. Изв. АН АрмССР. Сер. физ.-матем. наук, 1964, т. 17, № 2.
3. *Александров В. М., Кучеров В. А.* О методе ортогональных полиномов в плоских смешанных задачах теории упругости. ПММ, 1970, т. 34, вып. 4.
4. *Александров В. М., Кучеров В. А.* Некоторые задачи о действии двух штампов на упругую полосу. Инж. ж. МТТ, 1968, № 4.
5. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1963.
6. *Александров В. М.* О приближенном решении одного типа интегральных уравнений. ПММ, 1962, т. 26, вып. 5.