

О ДИНАМИЧЕСКОЙ КОНТАКТНОЙ ЗАДАЧЕ ДЛЯ ПОЛУПЛОСКОСТИ, УСИЛЕННОЙ УПРУГОЙ НАКЛАДКОЙ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ

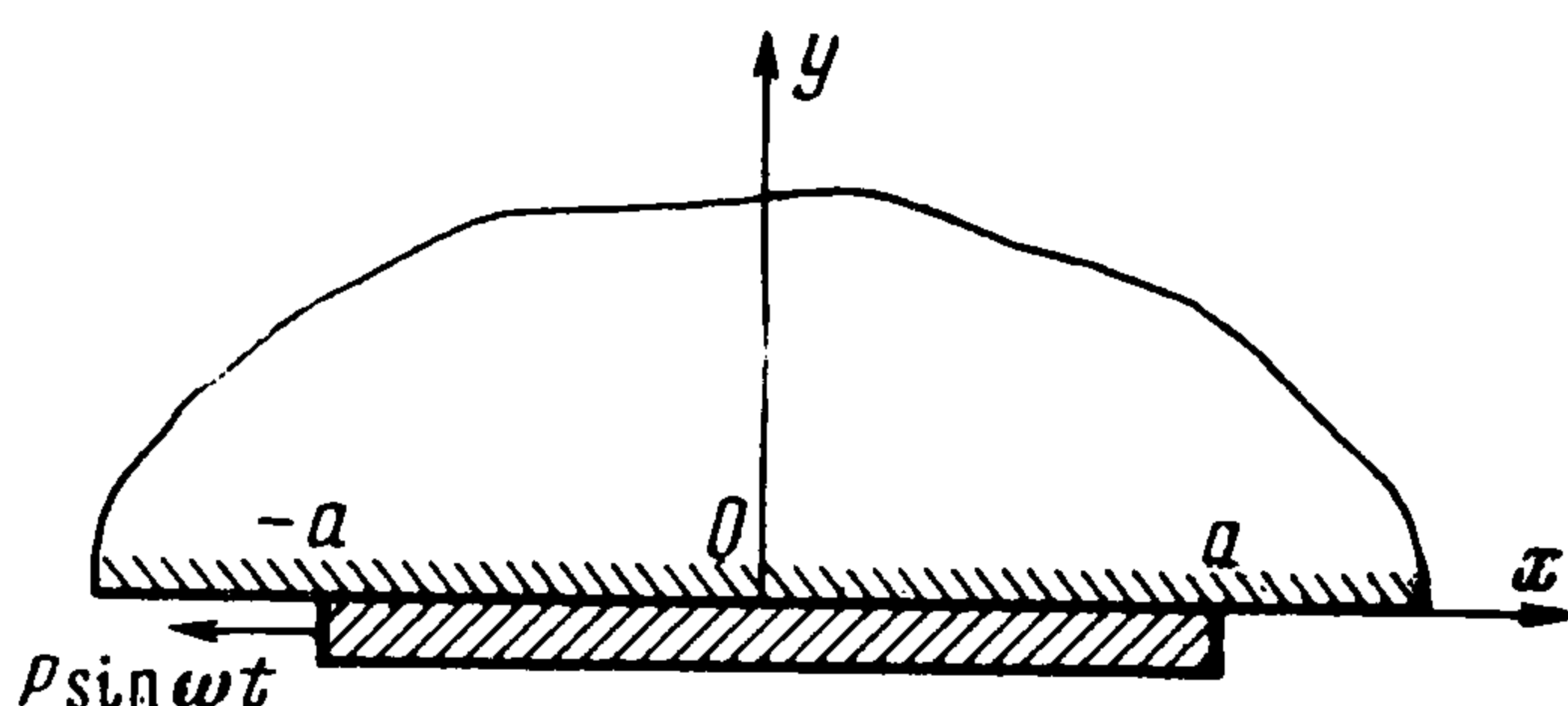
Э. Х. Григорян

(Ереван)

Рассматривается динамическая контактная задача для полуплоскости, усиленной на своей границе упругой накладкой конечной длины. Решение задачи сводится к решению интегрального уравнения первого рода, а затем при помощи многочленов Чебышева — к бесконечной системе линейных уравнений. Доказывается, что эта бесконечная система уравнений квази-вполне регулярна. Кроме того, для ядра интегрального уравнения получено простое аналитическое выражение, вполне допустимое для практических приложений и сколь угодно мало отличающееся от истинного. В этом случае, помимо квазиполной регулярности при определенных значениях некоторого физического параметра, доказана также полная регулярность соответствующей бесконечной системы уравнений, и получены числовые результаты для закона изменения амплитуды тангенциальных контактных напряжений под накладкой.

Рассматриваемая задача связана с важными для инженерной практики задачами о передаче нагрузок от стрингеров к упругим телам. Случай наклейки бесконечной или полубесконечной длины был рассмотрен ранее [1].

1. Постановка задачи. Вывод разрешающего уравнения. Пусть полуплоскость на конечном отрезке $[-a, a]$ своей границы усилена приваренной к ней упругой накладкой постоянной достаточно малой толщины h . Цель работы — определение закона распределения контактных напряжений вдоль отрезка соединения упругой наклейки с полуплоскостью, когда к одному из концов наклейки приложена сосредоточенная горизонтальная гармоническая сила $P \sin \omega t$ (фиг. 1). Для простоты выкладок в дальнейшем эту силу [возьмем в виде $Pe^{-i\omega t}$ (очевидно, надо затем взять мнимую часть решения с обратным знаком)]. Как и в работах [2, 3], будем предполагать, что вследствие малости толщины h жесткость наклейки на изгиб пренебрежимо мала и поэтому можно пренебречь нормальным давлением наклейки на полуплоскость (модель одномерного упругого континуума наклейки). Это позволяет считать, что под накладкой действуют только тангенциальные контактные напряжения, т. е. наклейка находится в одноосном напряженном состоянии.



Фиг. 1

Уравнение колебания накладки при указанных предположениях имеет вид [1]

$$\frac{\partial^2 u^{(1)}(x, t)}{\partial x^2} - \frac{\rho_1}{E_1} \frac{\partial^2 u^{(1)}(x, t)}{\partial t^2} = - \frac{1}{E_1 h} \tau(x, t), \quad -a < x < a$$

Здесь $u^{(1)}(x, t)$ — горизонтальные перемещения точек накладки, ρ_1 — плотность материала накладки, $\tau(x, t)$ — неизвестные контактные напряжения в точке x в момент времени t , действующие на накладку вдоль линии соединения ее с полуплоскостью, E_1 — модуль упругости накладки.

Рассматривая установившиеся колебания накладки, положим

$$u^{(1)}(x, t) = u_*(x) e^{-i\omega t}, \quad \tau(x, t) = \tau_*(x) e^{-i\omega t}$$

Далее, приняв во внимание значения осевого напряжения на концах накладки, для определения амплитуды перемещений получим граничную задачу, решение которого после перехода от отрезка $[-a, a]$ к отрезку $[-1, 1]$, с которым и будем иметь дело в дальнейшем, представляется формулой

$$(1.1) \quad u_*^{(1)}(ax) = - \frac{a^2}{E_1 h} \int_{-1}^1 G(kax, kas) \tau_*(as) ds + \frac{P}{E_1 h} \frac{\cos ka(x-1)}{k \sin 2ka}$$

$$-1 \leq x \leq 1, \quad k = \omega \sqrt{\rho_1 / E_1}$$

$$G(kax, kas) = \begin{cases} - \frac{1}{ak \sin 2ka} \cos [ka(x-1)] \cos [ka(s+1)], & x \leq s \\ - \frac{1}{ak \sin 2ka} \cos [ka(s-1)] \cos [ka(x+1)], & -1 \leq x, s \leq 1 \\ - \frac{1}{ak \sin 2ka} \cos [ka(s-1)] \cos [ka(x+1)], & x \geq s \end{cases}$$

Здесь $aG(kax, kas)$ — функция Грина для той же задачи, но с нулевыми граничными условиями [4].

С другой стороны, амплитуда горизонтальных перемещений граничных точек упругой полуплоскости от горизонтальной гармонической силы амплитуды $\tau_*(x)$ дается формулой [1]

$$(1.2) \quad u_*^{(2)}(ax) = \frac{a}{\mu_2} \int_{-1}^1 K(k_2 a |x-s|) \tau_*(as) ds, \quad k_2 = \omega \sqrt{\rho_2 / \mu_2}$$

$$K(z) = \frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{\infty} k(s) e^{-isz} ds, \quad k(s) = \frac{\sqrt{s^2-1}}{(2s^2-1)^2 - 4s^2 \sqrt{(s^2-1)(s^2-\varepsilon^2)}}$$

$$\varepsilon = \sqrt{\frac{\mu_2}{\lambda_2 + 2\mu_2}} = \sqrt{\frac{1-2\nu}{2(1-\nu)}}$$

Здесь λ_2, μ_2 — параметры Ламе, ρ_2 — плотность, ν — коэффициент Пуассона материала полуплоскости.

Отметим, что последний интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши, так как подынтегральное выражение на вещественной оси имеет полюсы первого порядка [1,5].

Далее, на отрезке соединения накладки с полуплоскостью должно выполняться условие $u_*^{(1)}(ax) = u_*^{(2)}(ax)$, $-1 \leq x \leq 1$, которое в сочетании с уравнениями (1.1) и (1.2) задачу определения амплитуды тангенциальных контактных напряжений сводит к решению интегрального

уравнения первого рода

$$(1.3) \quad \int_{-1}^1 [K(k_2^* |x-s|) + \lambda^* G(k^*x, k^*s)] \varphi(s) ds = \frac{\cos[k^*(x-1)]}{k^* \sin 2k^*}$$

$$\varphi(s) = \frac{\tau^*(as) a}{\lambda^* P}, \quad \lambda^* = \frac{\mu_2 a}{E_1 h}, \quad k_2^* = ak_2, \quad k^* = ak$$

Для исследования структуры функции $K(z)$ заметим, что ее преобразование Фурье, равное $k(s)$, в окрестности бесконечно удаленной точки имеет разложение

$$k(s) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{|s|} - \frac{1}{8} \frac{1+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2} \frac{1}{s^2 |s|} +$$

$$+ \frac{\varepsilon^8 - 2(\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2) - 3}{32(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{s^4 |s|} + k_1(s)$$

$$k_1(s) = k(s) + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{|s|} + \frac{1}{8} \frac{1+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2} \frac{1}{s^2 |s|} - \frac{\varepsilon^8 - 2(\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2) - 3}{32(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{s^4 |s|}$$

Очевидно, что функция $k_1(s)$ в нулевой точке имеет неинтегрируемую особенность. Однако, функция

$$k_*(s) = \int_{-\infty}^s \int_{-\infty}^{\tau} \int_{-\infty}^{\sigma} k_1(\tau) d\tau$$

вследствие известных формул [6] интегрируема в той же точке. Ввиду того, что $k_*(s) \sim \text{const} / s |s|$ при $|s| \rightarrow \infty$, $k_*(s)$ будет интегрируемой на всей вещественной оси. Кроме того, имеет место формула

$$F(k_1(s)) = iz^5 F^{-1}(k_*(s))$$

где F — преобразование Фурье в смысле теории обобщенных функций, а F^{-1} — обратное преобразование [6,7]. Учитывая последнюю формулу, получим следующее представление (C — пока неизвестная постоянная):

$$(1.4) \quad K(k_2^*x) = -\frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|k_2^*x|} - \frac{C}{2(1-\varepsilon^2)} - \frac{1}{16} \frac{1+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2} (k_2^*x)^2 \times$$

$$\times \left(\frac{1}{\pi} \ln |k_2^*x| + C \right) + \frac{3}{32\pi} \frac{1+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2} (k_2^*x)^2 + \frac{\varepsilon^8 - 2(\varepsilon^6 + \varepsilon^4 + \varepsilon^2) - 3}{768(1-\varepsilon^2)} \times$$

$$\times (k_2^*x)^4 \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|k_2^*x|} + C + \frac{25}{12\pi} \right) + \frac{i(k_2^*x)^5}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} k_*(s) e^{-isk_2^*x} ds$$

Следует отметить, что вместо представления (1.4) вполне аналогичным образом можно получить другое представление функции $K(k_2^*x)$ той же структуры, но содержащее любое конечное число членов по четным степеням аргумента k_2^*x .

Приступив к определению значения постоянной C , заметим, что функцию $K(k_2^*, x)$ можно представить также в виде $(\text{ci}(k_2^*x) - \text{интегральный косинус})$

$$K(k_2^*x) = \frac{1}{\pi} \int_0^1 k(s) \cos(k_2^*xs) ds + \int_1^{\infty} \left[k(s) + \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{s} \right] \times$$

$$\times \cos(k_2^*xs) ds + \frac{\text{ci}(k_2^*x)}{2(1-\varepsilon^2)}$$

Из этих двух представлений функции $K(k_2^*x)$ следует, что до сих пор не известная постоянная C выражается формулой

$$(1.5) \quad C = -2(1 - \varepsilon^2) \lim_{x \rightarrow 0} \left[K(k_2^*x) - \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)\pi} \ln |k_2^*x| \right] = \\ = -\frac{1}{\pi} \ln \gamma - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\pi} \int_0^1 k(s) ds - \frac{2(1 - \varepsilon^2)}{\pi} \int_1^\infty \left[k(s) + \frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \frac{1}{s} \right] ds$$

Таким образом, на основании (1.4) имеем следующее представление:

$$K(k_2^*x) = -\frac{1}{2(1 - \varepsilon^2)} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|k_2^*x|} + R(k_2^*x)$$

где функция $R(k_2^*x)$ обладает тем свойством, что ее вторая производная квадратично суммируема на отрезке $[-1, 1]$. В этой формуле функция $K(k_2^*x)$ представлена в виде суммы своей главной и регулярной частей.

Далее, имеем ($\theta(x)$ — функция Хевисайда)

$$(1.6) \quad \frac{\partial G(k^*x, k^*s)}{\partial x} = G^*(k^*x, k^*s) + \theta(x - s) \\ G^*(k^*x, k^*s) = \begin{cases} \frac{1}{\sin 2k^*} \sin [k^*(x - 1)] \cos [k^*(s + 1)], & x \leq s \\ \frac{1}{\sin 2k^*} \cos [k^*(s - 1)] \sin [k^*(x + 1)] - 1, & x \geq s \end{cases}$$

Последняя функция непрерывна в квадрате $-1 \leq x, s \leq 1$ и имеет по переменным x и s непрерывные в том же квадрате частные производные.

Приняв во внимание формулы (1.4), (1.6) и дифференцируя обе части уравнения (1.3), относительно неизвестной функции $\varphi(s)$ получим следующее сингулярное интегральное уравнение первого рода:

$$(1.7) \quad \int_{-1}^1 \left\{ \frac{1}{\pi} \frac{1}{s - x} - 2(1 - \varepsilon^2) \frac{\partial R(k_2^*|x - s|)}{\partial x} - 2(1 - \varepsilon^2) \lambda^* G^*(k^*x, k^*s) - \right. \\ \left. - 2(1 - \varepsilon^2) \lambda^* \theta(x - s) \right\} \varphi(s) ds = 2(1 - \varepsilon^2) \frac{\sin [k^*(x - 1)]}{\sin 2k^*}$$

Таким образом, решение динамической контактной задачи для полуплоскости, усиленной на конечной части своей границы упругой накладкой малой толщины, сводится к решению сингулярного интегрального уравнения. Ядро этого уравнения состоит из двух слагаемых, первое из которых представляет собой ядро Коши, а другое — функция, квадратично суммируемая в квадрате $-1 \leq x, s \leq 1$.

2. Сведение уравнения (1.7) к бесконечной системе линейных уравнений. Следуя работе [8], решение уравнения (1.7) ищем в виде

$$(2.1) \quad \varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2}} \left(a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n T_n(x) \right), \quad T_n(x) = \cos(n \arccos x), \quad -1 < x < 1$$

где $T_n(x)$ — многочлены Чебышева первого рода. Подставив выражение $\varphi(x)$ из (2.1) в (1.7) и пользуясь соотношением [9]

$$\frac{1}{\pi} \int_{-1}^1 \frac{T_n(s) ds}{(s-x)\sqrt{1-s^2}} = U_{n-1}(x), \quad U_{n-1}(x) = \frac{\sin(n \arccos x)}{\sin(\arccos x)}$$

$$n = 1, 2, 3, \dots; \quad -1 \leq x \leq 1$$

где $U_{n-1}(x)$ — многочлены Чебышева второго рода, известным способом получим следующую бесконечную систему линейных уравнений относительно коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$(2.2) \quad a_m + \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi} \lambda^* \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} a_n + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n} a_n = a_0 \varphi_m + f_m$$

Здесь

$$K_{m,n} = \begin{cases} \frac{2m[1+(-1)^{n-m}]}{[n^2-(m-1)^2][n^2-(m+1)^2]}, & n \neq m-1, \quad n \neq m+1 \\ 0, & n = m-1, \quad n = m+1 \end{cases}$$

$$R_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{R_1(x,s) T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$R_1(x,s) = -2(1-\varepsilon^2) \frac{\partial R(k^* |x-s|)}{\partial x} - 2(1-\varepsilon^2) \lambda^* G^*(k^*x, k^*s)$$

$$\varphi_m = \frac{4}{\pi} (1-\varepsilon^2) \lambda^* b_m - \frac{2}{\pi} R_{m,0}$$

$$b_m = \frac{\pi^2}{4}, \quad m = 1, \quad b_m = \frac{2m[1-(-1)^m]}{(m^2-1)^2}, \quad m \neq 1$$

$$f_m = \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi \sin 2k^*} \int_{-1}^1 \sin[k^*(x-1)] \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx, \quad m = 1, 2, \dots$$

3. Исследование бесконечной системы (2.2). Исследование бесконечной системы (2.2) в случае только одного ядра $K_{m,n}$ содержится в работе [8]. Добавление к этому ядру ядра $R_{m,n}$ не нарушает регулярности исходной бесконечной системы в смысле ее квазиполной регулярности.

Действительно, на основании указанных выше свойств функции $R_1(x,s)$ можем записать

$$R_{m,n} = \frac{1}{h} h_{m,n}, \quad m, n = 1, 2, \dots$$

$$h_{m,n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 R_0(x,s) \sqrt{1-s^2} \sqrt{1-x^2} U_{n-1}(s) U_{m-1}(x) dx ds, \quad R_0(x,s) = \frac{\partial R_1(x,s)}{\partial s}$$

Тогда

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty} |R_{m,n}| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} |h_{m,n}|, \quad m = 1, 2, \dots$$

Теперь, заметив, что коэффициенты $\{h_{m,n}\}_{m,n=1}^{\infty}$ являются коэффициентами Фурье квадратично суммируемой в квадрате $-1 \leq x, s \leq 1$ функции $R_0(x,s)$ по полной ортогональной системе функций $\{U_{n-1}(s) U_{m-1}(x)\}_{m,n=1}^{\infty}$, на основании неравенства Бес-

сезя можем утверждать, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} |h_{m,n}|^2 < \infty$$

По известной теореме из анализа [10] тогда сходится также ряд

$$\sum_{m=1}^{\infty} C_m, \quad C_m = \sum_{n=1}^{\infty} |h_{m,n}|^2$$

Следовательно, по крайней мере

$$(3.1) \quad C_m = O\left(\frac{1}{m^{1+\delta}}\right) \quad \text{при } m \rightarrow \infty$$

где δ — малое положительное число.

Далее

$$S_m \leq \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}} \sqrt{\sum_{n=1}^{\infty} |h_{m,n}|^2} = \frac{\pi}{\sqrt{6}} C_m$$

Приняв во внимание (3.1), имеем

$$S_m = O\left(\frac{1}{m^{\frac{1+\delta}{2}}}\right), \quad m \rightarrow \infty$$

что и доказывает высказанное выше утверждение о квазиполной регулярности бесконечной системы.

Теперь отметим, что для определения a_0 следует в выражении, полученном после подстановки (2.1) в (1.7), подставить $x = -1$. Получим

$$(3.2) \quad \sum_{n=1}^{\infty} d_n a_n = a_0 D - 2(1 - \varepsilon^2)$$

Здесь

$$d_n = n(-1)^n + \int_{-1}^1 \frac{R_1(-1, s) T_n(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds, \quad D = - \int_{-1}^1 \frac{R_1(-1, s)}{\sqrt{1-s^2}} ds$$

После того как определены коэффициенты $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, неизвестный коэффициент a_0 будет определяться из уравнения (3.2).

4. **Случай малого параметра k_2^* .** В этом случае в представлении (1.4), пренебрегая членами порядка $(k_2^*)^4 \ln k_2^*$, имеем

$$(4.1) \quad K(k_2^* x) = - \frac{1}{2(1-\varepsilon^2)} \frac{1}{\pi} \ln \frac{1}{|k_2^* x|} - \frac{C}{2(1-\varepsilon^2)} - \\ - \alpha_0 \left(\frac{k_2^* x}{4}\right)^2 \left(\frac{1}{\pi} \ln |k_2^* x| + C\right) + \frac{3\alpha_0}{32\pi} (k_2^* x)^2, \quad \alpha_0 = \frac{1+\varepsilon^4}{(1-\varepsilon^2)^2}$$

Тогда уравнение (1.7) переходит в следующее:

$$\int_{-1}^1 \left[\frac{1}{\pi} \frac{1}{s-x} + \alpha_1 (x-s) \ln |x-s| + \alpha_2 (x-s) - 2(1-\varepsilon^2) \lambda^* G(x, s) - \right. \\ \left. - 2(1-\varepsilon^2) \lambda^* \theta(x-s) \right] \varphi(s) ds = \frac{2(1-\varepsilon^2)}{\sin 2k^*} \sin [k^* (x-1)]$$

где

$$\alpha_1 = \frac{1}{4\pi} \frac{1+\varepsilon^4}{1-\varepsilon^2} (k_2^*)^2, \quad \alpha_2 = \alpha_1 (\pi C + \ln k_2^* - 1)$$

Вновь представив решение этого уравнения в виде (2.1), аналогичным образом получим следующую бесконечную систему линейных алгебраических уравнений относительно коэффициентов $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$(4.2) \quad a_m + \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi} \lambda^* \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n} a_n + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} K_{m,n}^* a_n + \\ + \frac{4(1-\varepsilon^2) \lambda^* k^*}{\pi \sin 2k^*} \sum_{n=1}^{\infty} R_{m,n}^* a_n = a_0 \varphi_m^* + f_m$$

$$R_{m,n}^* = -\frac{1}{n} \frac{\sin 2k^*}{k^*} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{\partial G^*(x,s)}{\partial s} \sqrt{1-s^2} U_{n-1}(s) ds \sqrt{1-x^2} U_{m-1}(x) dx$$

$$K_{m,n}^* = \left\{ \begin{array}{l} 0, \quad n \neq m, \quad n \neq m+2, \quad n \neq m-2 \\ \frac{\alpha_1 \pi^2}{4} \frac{1}{n^2-1}, \quad n = m \\ -\frac{\alpha_1 \pi^2}{8} \frac{1}{n(n-1)}, \quad n = m+2 \\ -\frac{\alpha_1 \pi^2}{8} \frac{1}{n(n+1)}, \quad n = m-2 \end{array} \right\} \quad n \neq 1$$

$$\left\{ \begin{array}{l} 0, \quad m \neq 1, \quad m \neq 3 \\ \frac{\alpha_1 \pi^2}{4} \ln 2 - (\alpha_1 + \alpha_2) \frac{\pi^2}{4} + \alpha_1 \frac{\pi^2}{16}, \quad m = 1 \\ -\frac{\alpha_1 \pi^2}{16}, \quad m = 3 \end{array} \right\} \quad n = 1$$

$$\varphi_m^* = \frac{4}{\pi} (1-\varepsilon^2) \lambda^* (b_m + q_m) - e_m$$

Здесь

$$e_m = \begin{cases} \frac{\pi}{2} [\alpha_1 (\ln 2 - 1) + \alpha_2], & m = 2 \\ 0, & m \neq 2 \end{cases}$$

$$q_m = \frac{(k^*)^3}{\sin 2k^*} \begin{cases} \gamma_m - \frac{96m [(-1)^m + 1]}{(m^2-9)^2 (m^2-1)^2}, & m \neq 1, \quad m \neq 2, \quad m \neq 3 \\ \gamma_1 - \frac{3\pi^2}{16}, & m = 1 \\ \gamma_2 + \frac{13\pi^2}{16} - \frac{128}{175}, & m = 2 \\ \gamma_3 + \frac{\pi^2}{16}, & m = 3 \end{cases}$$

$$\gamma_m = \frac{m\pi^2 \cos 2k^*}{(k^*)^4} J_m(k^*) \cos \left(k^* + \frac{m\pi}{2} \right) \quad m = 1, 2, \dots$$

$$f_m = \frac{4(1-\varepsilon^2)}{k^* \sin 2k^*} J_m(k^*) \cos \left(k^* + \frac{m\pi}{2} \right)$$

($J_m(x)$ — функция Бесселя первого рода).

Поступив совершенно аналогично сделанному в предыдущем пункте, находим, что рассматриваемая система бесконечных уравнений будет вполне регулярной при условии

$$\frac{12\lambda^*}{\pi} + \frac{4\lambda^* k^*}{\sqrt{6} \sin 2k^*} + r < 1$$

причем

$$r = \frac{\alpha_1 \pi}{2} \max \left\{ \left| \ln 2 + \frac{1}{4} - \ln k_2^* - \pi C \right| + \frac{1}{12}; \frac{2}{5} \right\}$$

Когда накладка становится штампом, т. е. при $E_1 = \infty$, соответствующая бесконечная система линейных уравнений примет вид

$$(4.3) \quad b_{2j} + \frac{2}{\pi} \sum_{i=1}^{\infty} K_{2j, 2i} b_{2i} = b_0 e_{2j}, \quad j = 1, 2, \dots$$

и решение урезанной системы с произвольным числом неизвестных N определяется формулой

$$\text{Здесь} \quad b_{2j} = B_{2j} e_2 b_0, \quad j = 1, 2, \dots, N$$

$$B_{2j} = (-1)^{j+1} \frac{\prod_{\rho=0}^{j-1} K_{2(j-\rho), 2(j-\rho)}^*}{\prod_{n=0}^{j-1} [d_0^{(j-1-n)}; d_1^{(n)}, d_2^{(n)}, \dots, d_{N+n-j}^{(n)}]}, \quad j = 1, 2, \dots, N-1$$

$$B_{2N} = - \frac{K_{2N, 2N-2}^*}{K_{2N, 2N}^*} B_{2N-2}, \quad K_{2, 0}^* = 1$$

$[d_0^{(j-1-n)}; d_1^{(n)}, \dots, d_{N+n-j}^{(n)}]$ — $N + n - j$ -членная цепная дробь

$$d_{1+q} = - \frac{K_{2(j+q-n+1), 2(j+q-n+1)}}{j+q-n+1} \prod_{l=j-n+1}^{j+q-n+1} (K_{2l, 2l-2}^* K_{2l-2, 2l}^*), \quad d_0^{(j-1-n)} = - K_{2(j-n), 2(j-n)}^*$$

$$q = 0, 1, \dots, N-1+n-j; \quad j = 1, 2, \dots, N-1; \quad n = 0, 1, \dots, j-1$$

$$b_0 = \frac{\pi P}{M \omega^2 L} \quad (M \text{ — масса штампа})$$

$$L = \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 \frac{K(k_2^* |x-s|)}{\sqrt{1-s^2}} ds + e_2 \sum_{j=1}^N B_{2j} \int_{-1}^1 K(k_2^* |x-s|) \frac{T_{2j}(s)}{\sqrt{1-s^2}} ds \right] \times \\ \times \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \frac{\pi^2}{M \omega^2}$$

Таким образом, в случае штампа при принятом приближении решение поставленной задачи опять сводится к решению бесконечной системы уравнений (4.3). Однако в отличие от случая накладки решение соответствующей урезанной системы уравнений с произвольным числом неизвестных удается построить в замкнутом виде. Более того, этот результат имеет место и тогда, когда в представлении (1.4) удерживается любое конечное число членов по четным степеням $k_2^* x$.

Отметим, что в представлении (1.4) для простоты вычислений удерживались лишь члены порядка $(k_2^*)^2$, хотя предложенная процедура решения интегрального уравнения (1.7) пригодна и в том случае, когда в этом представлении удерживается любое конечное число членов по степеням параметра k_2^* . В большинстве практических случаев [5] $0 < k_2^* \leq 0.25$, и следовательно, принятое приближение (4.1) мало уклоняется от истинного и достаточно хорошо соответствует действительности.

Перейдем к описанию числовых результатов. Поскольку величина амплитуды тангенциальных контактных напряжений под накладкой существенно зависит от значения

постоянной $C = C_1 + iC_2$, сначала было вычислено значение этой постоянной на ЭВМ «Наири-2» при помощи формулы (1.5). Значения действительной и мнимой частей этой постоянной при разных значениях физического параметра ε , зависящего в свою очередь от коэффициента Пуассона указанным выше образом, приведены ниже $\varepsilon = 0.6416, 0.5774, 0$; $C_1 = 0.0094, 0.1262, 0.2261$; $C_2 = 0.6595, 0.7019, 0.7537$

Для дальнейших вычислений было принято $\rho_1 = \rho_2$ и $k_2^* = 0.25$. Тогда при указанных значениях постоянной C условие полной регулярности бесконечной системы уравнений (4.2) выполняется при изменении параметра k^* в интервале $(0, 0.022)$. Для вычислений брали значение $k^* = 0.02$. Поскольку

$$k^* = \sqrt{\frac{\rho_1}{E_1}} \omega a, \quad k_2^* = \sqrt{\frac{\rho_2}{E_2}} \omega a$$

то при взятых значениях параметров k_2^* и k^* между физическими константами материалов накладки и основания должно иметь место соотношение

$$E_2 / E_1 = 0.0128 (1 + \nu)$$

Отсюда следует, что должно соблюдаться условие $E_1 > E_2$, что и согласуется с принятой моделью накладки [11].

Затем при данных значениях упомянутых параметров и при значениях отношения $h/a = 0.1$ и 0.05 была решена урезанная система уравнений с десятью неизвестными, полученная из бесконечной системы (4.2). При этом для функции $\partial G^*(x, s) / \partial s$ принималось приближенное выражение

$$\frac{\partial G^*(x, s)}{\partial s} = -\frac{(k^*)^3}{\sin 2k^*} \times \begin{cases} xs + (x-s) - 1, & x \leq s \\ xs - (x-s) - 1, & x \geq s \end{cases}$$

Предварительно урезанная система была представлена в виде

$$(4.4) \quad a_m + \frac{4(1-\varepsilon^2)}{\pi} \lambda^* \sum_{n=1}^{10} K_{m,n} a_n + \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{10} K_{m,n}^* a_n + \\ + \frac{4(1-\varepsilon^2) \lambda^* k^*}{\pi \sin 2k^*} \sum_{n=1}^{10} R_{m,n}^* a_n = a_0 \Phi_m^* + f_m, \quad m = 1, 2, \dots$$

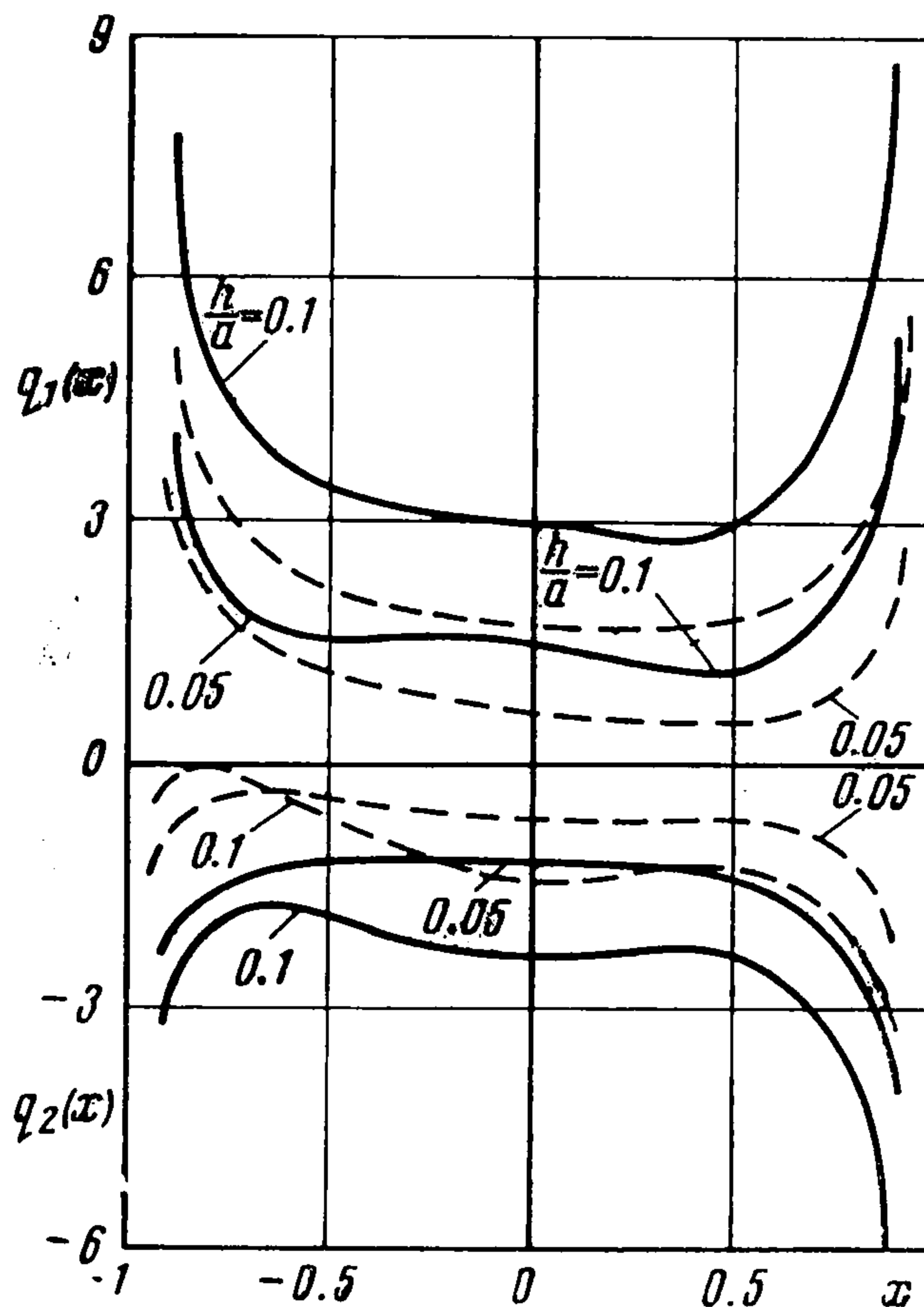
Если $\{a_m^{(1)}\}_{m=1}^{10}$ и $\{a_m^{(2)}\}_{m=1}^{10}$ — решения системы (4.4) при правых частях $\{f_m\}_{m=1}^{10}$ и $\{\Phi_m\}_{m=1}^{10}$ соответственно, то решение исходной системы (4.2) выражается формулой

$$(4.5) \quad a_m = a_m^{(1)} + a_0 a_m^{(2)}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Подставив эти выражения коэффициентов $\{a_m\}_{m=1}^{10}$ в (3.2), находим коэффициент a_0 . После того как нам известен коэффициент a_0 , будут известны также коэффициенты $\{a_m\}_{m=1}^{10}$, которые вычисляются по формуле (4.5).

Очевидно, что относительно действительных и мнимых частей коэффициентов $\{a_m\}_{m=1}^{10}$, $i = 1, 2$, имеем системы алгебраических уравнений с двадцатью неизвестными. Эти системы были решены на ЭВМ «Наири-2».

На основании числовых значений указанных коэффициентов был построен график изменения действительной и мнимой частей функции $\varphi(x) = q_1(x) + iq_2(x)$ в зависи-



Фиг. 2

мости от данных выше значений геометрических и физических констант накладки и основания.

Отметим, что истинный закон распределения тангенциальных контактных напряжений под накладкой дается формулой

$$\tau(x, t) = \frac{\lambda^* P}{a} [q_1(x) \sin \omega t - q_2(x) \cos \omega t]$$

На фиг. 2 показан ход изменения функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$ в зависимости от коэффициента Пуассона ν и отношения h/a (сплошным линиям соответствует $\nu = 0.5$, пунктирным — $\nu = 0.25$). Сопоставление этих графиков показывает, что при фиксированных значениях ν малому значению отношения a/h соответствует большее значение этих функций. В связи с этим отметим, что при взятых значениях параметров k^* и k_2^* $\lambda^* = 0.0064 a/h$. Когда $\lambda^* = 0$, имеем случай штампа, а когда $\lambda^* \neq 0$, имеем случай накладки, и большему значению этого параметра при фиксированной толщине h и длине $2a$ соответствует малое значение модуля упругости материала накладки. Уменьшение модуля упругости накладки можно истолковать как увеличение параметра λ^* . По мере удаления от штампа возрастает параметр λ^* , и под действием одной и той же силы абсолютные величины тангенциальных контактных напряжений имеют тенденцию к убыванию. Эта же тенденция, как следует из сказанного, характерна и для хода изменения амплитудных функций $q_1(x)$ и $q_2(x)$.

Поступила 3 VIII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Григорян Э. Х. О двух динамических контактных задачах для полуплоскости с упругими накладками. Изв. АН СССР. МТТ, 1972, № 5.
2. Melan E. Ein Beitrag zur Theorie geschweisster verbindungen. Ingr-Arch., 1932, Bd 3, Nr 2, S. 123—129.
3. Арутюнян Н. Х. Контактная задача для полуплоскости с упругим креплением. ПММ, 1968, т. 32, вып. 4.
4. Положий Г. Н. Уравнения математической физики. М., «Высшая школа», 1964.
5. Бородачев Н. М. Колебания штампа, лежащего на упругом полупространстве, под действием горизонтальной гармонической силы. Изв. вузов. Строительство и архитектура, 1963, № 9.
6. Lighthill M. I. An introduction to Fourier analysis and generalised function. Cambridge Univ. Press, 1959.
7. Шолов Г. Е. Математический анализ. Второй спецкурс. М., «Наука», 1965.
8. Arutunian N. K., Mkhitarian S. M. Some contact problems for a semi-plane with elastik stiffeners. In: Trends in elasticity and thermoelasticity, withhold. Nowacki Anniversary Volume. Wolters — Noordhoff Publishing, 1971, p. 3—30.
9. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. Изд. 4. М., Физматгиз, 1962.
10. Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н. Курс современного анализа, т. 1. М., Физматгиз, 1963.
11. Арутюнян Н. Х., Мхитарян С. М. Некоторые контактные задачи для полуплоскости с частично скрепленными упругими накладками. Изв. АН АрмССР. Механика, 1972, т. 25, вып. 2.