Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 539.3

ПЛОСКАЯ ЗАДАЧА О КОНТАКТЕ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОЙ БАЛКИ С УПРУГИМ КЛИНОМ

Г. Я. Попов, Л. Я. Тихоненко

(Одесса)

Предлагается метод построения точного решения плоской задачи об изгибе полубесконечной балки, опирающейся на одну из граней упругого клина ($0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant r < \infty$), основанный на сведении контактной проблемы к краевой задаче Карлемана для аналитических функций с последующим ее точным решением.

Дано обоснование метода и исследованы свойства полученного решения для трех практически наиболее интересных случаев: $\alpha = {}^1/_2\,\pi$ (контакт балки с четвертьплоскостью), $\alpha = {}^3/_2\,\pi$ (изгиб балки, лежащей на дне котлована), $\alpha = \pi$ (контакт балки с полуплоскостью). Для всех трех случаев выявлен характер особенности контактного напряжения у конца балки (совпадающего с острием клина). При этом в первом случае оно ограничено, а в двух других справедливы соответственно асимптотики: $O(r^{-2/3})$ и $O(r^{-1/2})$, $r \to 0$.

Исследование ведется без учета касательного контактного напряжения и для случая плоской деформации в клине и в балке (цилиндрический изгиб пластинки). Переход к плоскому напряженному состоянию осуществляется известной заменой упругих постоянных.

1. Постановка задачи. На границе $\theta = \alpha$ упругого клина ($0 \leqslant \theta \leqslant \alpha < 2\pi$, $0 \leqslant r < \infty$) лежит балка с жесткостью D, к концу которой приложена сила P и момент M. Считается, что другая грань клина свободна и касательное контактное напряжение между балкой и клином равно нулю. Требуется найти распределение напряжений в клине и прогибы балки.

Краевые условия и условия равновесия балки имеют вид

$$\sigma_\theta,\ \tau_{r\theta}(r, 0) = \tau_{r\theta}(r, \alpha) = 0, \qquad D\frac{d^4}{dr^4} v(r, \alpha) = -\sigma_\theta(r, \alpha) \tag{1.1}$$

$$\int_0^\infty \sigma_\theta(r, \alpha)\, dr = P, \qquad \int_0^\infty \sigma_\theta(r, \alpha)\, r\, dr = M \tag{1.2}$$

Используя приемы работы [1], в результате реализации первого краевого условия получим

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_L f_1(p, \theta) B(p) r^{-p-1} dp, \qquad 2Gv = \frac{1}{2\pi i}\int_L f_2(p, \theta) B(p) r^{-p} dp \tag{1.3}$$

$$f_1(p, \theta) = (p^2 - p)\{\delta(p)[\cos(p+1)\theta - \cos(p-1)\theta] + \sin(p+1)\theta\} - (p^2 + p)\sin(p-1)\theta$$

$$f_2(p, \theta) = -\delta(p)[(p-1)\sin(p-1)\theta + (\varkappa - p)\sin(p+1)\theta] + (p+1)\cos(p-1)\theta + (\varkappa - p)\cos(p+1)\theta$$

$$\delta(p) = (p+1)[\cos(p-1)\alpha - \cos(p+1)\alpha][(p-1)\sin(p-1)\alpha - (p+1)\sin(p+1)\alpha]^{-1}$$

Здесь G — модуль сдвига, $\varkappa = 3 - 4\nu$, ν — коэффициент Пуассона, а $B(p)$ — неизвестная функция, подлежащая определению.

При выборе контура интегрирования в формулах (1.3) следует учесть, что искомое напряжение σ_θ может иметь не более чем интегрируемую особенность при $r \to 0$, а при $r \to \infty$ должно убывать не медленней, чем r^{-1}. Эти требования, во-первых, необходимы для существования интегралов (1.2), а во-вторых, они следуют из теоремы единственности [1] для первой основной задачи теории упругости для клина. Учитывая еще, что должна быть справедливой формула обращения Меллина, приходим к выводу [2], что контур интегрирования следует брать в виде $L = (c - i\infty, c + i\infty)$, причем $c_0 < c < 0$. Здесь c_0 — действительная часть полюса подынтегральной функции в формуле (1.3), которым определяется поведение σ_θ при $r \to 0$.

Для отыскания функции $B(p)$ используем оставшееся краевое условие с учетом формул (1.3). В результате получим соотношение

(1.4)
$$\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} (-\lambda) B_1(p) r^{-p-4} dp = \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f_1(p, \alpha) f_2^{-1}(p, \alpha) \prod_{k=0}^{3} (k+p)^{-1} B_1(p) r^{-p-1} dp$$

$$\left(\lambda = D(\varkappa + 1)(4G)^{-1}, \quad B_1(p) = B(p) f_2(p, \alpha) \prod_{k=0}^{3} (k+p)\right)$$

Предположим, функция $B(p)$ такова, что $\Phi(z) = B_1(c + iz)$ удовлетворяет всем условиям теоремы Коши в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 3$. Это позволяет передвинуть в левом интеграле контур интегрирования влево на три. В результате приходим к краевой задаче Карлемана для полосы

(1.5)
$$\Phi(t) = -K(t)\Phi(t + 3i), \quad -\infty < t < \infty$$
$$K(t) = \lambda f_2(c + it, \alpha) f_1^{-1}(c + it, \alpha) \prod_{k=0}^{3} (k + c + it), \quad c = \operatorname{Re} p$$

Следуя результатам работы [3], приведем задачу Карлемана (1.5) к следующей задаче Римана на полуоси:

(1.6)
$$\omega^+(\xi) = K(3\ln\xi / 2\pi)\,\omega^-(\xi), \quad \xi > 0$$

При этом $\omega^+(\xi)$ и $\omega^-(\xi)$ — предельные значения неизвестной аналитической функции

$$\omega(\zeta) = \frac{1}{\sqrt{\zeta}} \Phi\left(\frac{3\ln\zeta}{2\pi}\right)$$

соответственно на верхнем и нижнем берегу разреза, проведенного вдоль луча $\arg\zeta = 0$.

Краевая задача Римана достаточно хорошо изучена [4], ее точное решение построено в квадратурах и вид его, главным образом, зависит от индекса. Найдя индекс задачи (1.6), построим ее точное решение. Тем самым неизвестная функция $B(p)$ будет определена и, следовательно, построено точное решение исходной задачи.

Это решение ниже будет выписано и строго обосновано для наиболее интересных частных значений угла α. Оказывается, что в каждом из них индекс задачи (1.6) равен двум. Поэтому точное решение исходной задачи содержит две произвольные постоянные, которые определяются из условий равновесия (1.2). Если учесть формулу обращения Меллина для $\sigma_\theta(r, \alpha)$, то их можно записать в следующем виде:

$$B(0) = Pf_1^{-1}(0, \alpha), \qquad B(1) = Mf_1^{-1}(1, \alpha) \tag{1.7}$$

2. Случай $\alpha = {}^1/_2\pi$. Вместо (1.4) здесь имеем

$$\int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} (-\lambda) B_1(p) r^{-p-4} dp = \int\limits_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{(p^2-1)\operatorname{tg}{}^1/_2\pi p + p^2 \operatorname{ctg}{}^1/_2\pi p}{(1+p)(2+p)(3+p)} B_1(p) r^{-p-1} dp \tag{2.1}$$

$$(B_1(p) = (1+p)(2+p)(3+p) B(p) \sin{}^1/_2\pi p)$$

Предположим, функция $B(p)$ такова, что функция $\Phi(z) = B_1(c + iz)$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 3$, ограничена и непрерывна в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 3$. Кроме того, равномерно относительно $0 \leqslant s \leqslant 3$

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\Phi(t + is)|^2 dt < \text{const} \tag{2.2}$$

Последнее условие обеспечивает, во-первых, возможность использования результатов работы [3], во-вторых [2], — стремление к нулю $\Phi(z)$ при $|z| \to \infty$ в замкнутой полосе $0 \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant 3$. Как будет показано, построенная ниже функция $B(p)$ действительно обладает перечисленными свойствами.

Для преобразования соотношения (2.1) сделаем в нем замену $p = c + it$. После чего, воспользовавшись оговоренными выше свойствами функции $\Phi(z)$, передвинем с помощью теоремы Коши в левом интеграле контур интегрирования влево на три. В результате приходим к задаче Карлемана для полосы (1.5). При этом искомая функция $\Phi(z)$ аналитична в полосе $0 < \operatorname{Im} z < 3$ и удовлетворяет условию (2.2), а коэффициент задачи определяется следующей формулой:

$$K(t) = \lambda \prod_{k=1}^{3} (k + c + it) F^{-1}(t) \tag{2.3}$$

$$F(t) = [(c+it)^2 - 1] \operatorname{tg}{}^1/_2\pi(c+it) + (c+it)^2 \operatorname{ctg}{}^1/_2\pi(c+it)$$

Как показывает соответствующий анализ, в случае $\alpha = {}^1/_2\pi - c_0 = -1$. Коэффициент полученной задачи при $-1 < c < 0$ не имеет особенностей на любой конечной части вещественной оси и удовлетворяет там условию Гельдера ($K(t) \in H$), а на бесконечности справедлива асимптотика $F(t) = \mp i$, $K(t) = \pm\lambda t^3$ при $t \to \pm\infty$. Кроме того, функция $F(t)$ при $-1 < c < 0$ непрерывна по c равномерно относительно t и не обращается в нуль.

Согласно сказанному в п. 1, от задачи Карлемана переходим к задаче Римана (1.6). Коэффициент полученной задачи является функцией, удовлетворяющей условию Гельдера на любой закрытой части вещественной полуоси, не содержащей концов, и не обращается там в нуль. Вблизи концов $\xi = 0$, $\xi = \infty$ коэффициент обращается в бесконечность логарифмического порядка.

В работе [5] изучены краевые задачи с такого рода особенностями для случая, когда контур, на котором задано краевое условие, конечен. Чтобы воспользоваться результатами работы [5] в данном случае, необходимо либо обобщить ее результаты на полубесконечный контур, либо (что оказалось предпочтительней) задачу (1.6) посредством преобразования $\xi = i(1-u)(1+u)^{-1}$ привести к задаче Римана на верхней полуокружности (Г) с концами $u = 1$ (начало) и $u = -1$ (конец). В результате приходим к следующей краевой задаче:

$$\omega_1^+(u) = K_1(u)\omega_1^-(u), \qquad u \in \Gamma \tag{2.4}$$

$$\left(\omega_1^\pm(u) = (1+u)^{-1}\omega^\pm\left(i\frac{1-u}{1+u}\right) \in L_2(\Gamma),\ K_1(u) = K\left[\frac{3}{2\pi}\ln\left(i\frac{1-u}{1+u}\right)\right]\right)$$

Наибольшую трудность представляет вычисление индекса задачи (2.4), который, согласно работе [5], определяется формулой

$$\varkappa = \varkappa_+ + \varkappa_-, \quad \varkappa_+ = -\left[\frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}\arg G_+(1)\right], \quad \varkappa_- = \frac{3}{2} + \frac{1}{2\pi}\arg G_-(-1) \tag{2.5}$$

Здесь функции $G_\pm(u)$ входят в представление коэффициента задачи (2.4) в окрестности концов,

$$K_1(u) = G_+(u)\ln^3(1-u), \quad u \to 1 \tag{2.6}$$
$$K_1(u) = G_-(u)\ln^3(1+u)\ u \to -1$$

Отметим, что вид канонического решения задачи (2.4) зависит от величин $\varkappa_\pm$. Займемся теперь вычислением указанных величин, для чего в первую очередь найдем значения $\arg G_+(1) = \theta_1$ и $\arg G_-(-1) = \theta_2$. Установим связь между ними. С этой целью выразим значения θ_1 и θ_2 через $\arg K_1(\pm 1)$. В точке $u = 1$ функция K_1 обращается в бесконечность, поэтому значение $\arg K_1(1)$ неопределено. Для его определения возьмем точку $u \in \Gamma$, достаточно близкую к точке $u = 1$. Для нее справедливо равенство $\arg K_1(u) = \arg G_+(u) + 3\arg\ln(1-u)$. В этом равенстве перейдем к пределу при $u \to 1$. Учитывая [5], что $\lim \arg\ln(u_0 - u) = \pi$ при $u \to u_0$, получим $\arg K_1(1) = \theta_1 + 3\pi$. Аналогичным образом найдем, что $\arg K_1(-1) = \theta_2 + 3\pi$. По определению $\arg K_1(1) + \Delta = \arg K_1(-1)$, где $\Delta = [\arg K_1(u)]_\Gamma$. Следовательно, значения θ_1 и θ_2 связаны формулой $\theta_1 + \Delta = \theta_2$.

Поскольку $K(t) = -\lambda t^3$ при $t \to -\infty$, то $\arg K_1(1) = 2\pi n$. Выбирая в качестве $\arg K_1(1)$ главную ветвь, получим $\theta_1 = -3\pi$.

Тогда $\theta_2 = -3\pi + \Delta$. При этом можно убедиться [4], что $\Delta = [\arg K(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 3\pi - \Delta_1$, где $\Delta_1 = [\arg F(t)]_{-\infty}^{+\infty}$. Поскольку $F(t) = \mp i$ при $t \to \pm\infty$, то $\Delta_1 = k\pi$, причем k — целое и нечетное. В силу свойств функции $F(t)$, $\arg F(t)$ при $-1 < c < 0$ — функция, непрерывная по c равномерно относительно t. Пользуясь этим, можно доказать методом от противного, что k будет одним и тем же для всех $-1 < c < 0$. Поэтому, найдя k при фиксированном c, тем самым найдем его для любого $-1 < c < 0$. Имея в виду последнее, полагаем в формуле (2.3) $c = -{}^1/_2$. В результате получаем

$$F(t) = U(t) + iV(t)$$
$$U(t) = ({}^1/_2 + 2t^2)\,\mathrm{ch}^{-1}\pi t, \quad V(t) = (t - \mathrm{sh}\,\pi t)\,\mathrm{ch}^{-1}\pi t$$

Если рассматривать U, V как декартовы координаты, то $U = U(t)$, $V = V(t)$ представляет собой параметрическое уравнение некоторой кривой Ω. При ее построении следует учесть, что $U(-\infty) = U(+\infty) = 0$, $U(t) > 0$ для любого конечного t, а $V(-\infty) = 1$, $V(+\infty) = -1$, причем $V(t)$ имеет единственный нуль при $t = 0$. Из вида кривой Ω следует, что $k = -1$ и, следовательно, $\Delta_1 = -\pi$.

Реализуя формулу (2.5), получим, что $\varkappa_+ = 0$, $\varkappa_- = 2$, а индекс задачи — $\varkappa = 2$. Учитывая это и используя формулы работы [5] (после перехода от Γ к действительной оси), получим решение задачи Карлемана (1.5) в виде

$$\Phi(z) = R(z)\exp[I(z)], \qquad R(z) = A_1 e^{{}^1/_3\pi z} + A_2 e^{\pi z} \tag{2.7}$$

$$I(z) = (e^{{}^2/_3\pi z} + i)\frac{1}{3i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}[(e^{{}^2/_3\pi\tau} + i)(1 - e^{{}^2/_3\pi(z-\tau)})]^{-1}\ln K(\tau)\,d\tau$$

$$\Phi(t) = R(t)\exp[{}^1/_2\ln K(t) + I(t)]$$
$$\Phi(t + 3i) = -R(t)\exp[-{}^1/_2\ln K(t) + I(t)]$$

Здесь A_1 и A_2 — произвольные постоянные, которые, как следует из формул (1.7), определяются условиями $\Phi(ic) = (2\lambda)^{-1}P$, $\Phi[i(c-1)] = (2\lambda)^{-1}M$. При этом искомая функция $B(p)$ связана с $\Phi(z)$ соотношением

$$B(p) = \prod_{k=1}^{3}(k + p)^{-1}\,\Phi[i(c - p)]\csc\frac{1}{2}\pi p \tag{2.8}$$

Рассмотрим свойства найденной функции $\Phi[i(c-p)]$ в плоскости $p = \sigma + it$. Анализируя формулы (2.7), замечаем, что для любого целого k функция $\Phi[i(c-p)]$ аналитична в каждой полосе $c + 3k < \sigma < c + 3(k+1)$, а на каждой прямой $\mathrm{Re}\,p = c + 3k$ она терпит скачок. Найдем связь между предельными значениями этой функции слева ($\Phi_-[i(c-p)]$) и справа ($\Phi_+[i(c-p)]$) на прямой $\mathrm{Re}\,p = c + 3k$. Поскольку $\Phi_-[i(c-p)] = (-1)^k\Phi(t)$ и $\Phi_+[i(c-p)] = (-1)^{k-1}\,\Phi(t+3i)$, а $\Phi(t) = -K(t)\,\Phi(t+3i)$, то предельные значения на этой прямой связаны соотношением

$$\Phi_-[i(c-p)] = K[i(c + 3k - p)]\,\Phi_+[i(c-p)] \tag{2.9}$$

Докажем, что эти предельные значения локально непрерывны, т. е. непрерывны на каждом конечном отрезке $[c + 3k - iA,\ c + 3k + iA]$. Для этого достаточно доказать непрерывность функций $\Phi(t)$ и $\Phi(t+3i)$

на отрезке $[-A, A]$. Докажем, например, что $\Phi(t)$ локально непрерывна. Поскольку $K(t) \in H$ на отрезке $[-A, A]$ и не обращается там в нуль, то функция $\ln K(3 \ln \tau/2\pi) \in H$ на отрезке $[e^{-A}, e^{A}]$. А тогда, в силу свойств интеграла типа Коши [4], $\omega(\zeta) \in H$ на этом отрезке. Переходя к $\Phi(t) = e^{1/3\pi t}\omega^{+}(e^{2/3\pi t})$, получим, что $\Phi(t) \in H$ на отрезке $[-A, A]$ и непрерывность доказана.

Отметим еще, что для функции $\Phi[i(c-p)]$ справедлива асимптотика

$$\Phi[i(c-p)] = O(\sqrt{|p|^3}\, e^{-1/3\pi |p|}), \qquad |p| \to \infty$$

Это следует из результатов работы [5] и формул, дающих связь между функциями $\omega_1(w)$ и $\Phi[i(c-p)]$.

Учитывая формулу (2.8) и свойства функции $\Phi[i(c-p)]$, приходим к выводу, что функция $B(p)$ действительно обладает всеми предположенными ранее свойствами. Поэтому все проделанные ранее операции законны и, следовательно, рассматриваемая контактная задача решена. Например, формула для напряжения σ_θ имеет вид

$$\sigma_\theta = \frac{1}{2\pi i}\int_{c-i\infty}^{c+i\infty} f(p,\theta)\,\Phi_{-}[i(c-p)]\, r^{-p-1}\, dp \qquad (-1<c<0) \tag{2.10}$$

$$f(p,\theta) = \frac{(p^2-1)\operatorname{tg}{}^1/_2\pi p\,[\cos(p-1)\theta - \cos(p+1)\theta] - (p^2+p)\sin(p-1)\theta + (p^2-p)\sin(p+1)\theta}{(1+p)(2+p)(3+p)\sin{}^1/_2\pi p}$$

Исследуем поведение этого напряжения в вершине клина и на бесконечности. Для исследования σ_θ при $r \to 0$ рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i}\int f(p,\theta)\,\Phi[i(c-p)]\, r^{-p-1}\, dp \tag{2.11}$$

взятый по прямоугольнику с вершинами $c \pm iA$, $-3 + c \pm iA$. Подынтегральная функция, в силу свойств функции $\Phi[i(c-p)]$, непрерывна во всем прямоугольнике, включая границу, аналитична в нем всюду, за исключением точек $p = -1, -2, -3$, где находятся полюсы, причем в точке $p = -1$ полюс простой, а в остальных — кратности два. Кроме того, она стремится к нулю при $|p| \to \infty$ равномерно в полосе $-3 + c \leqslant \operatorname{Re} p \leqslant c$.

Применяя к интегралу (2.11) теорему о вычетах и переходя к пределу при $A \to \infty$, получим

$$\sigma_\theta = a_1(\theta) + a_2(\theta)\, r\ln r + a_3(\theta)\, r^2 \ln r + \frac{1}{2\pi i}\int_{-3+c-i\infty}^{-3+c+i\infty} f(p,\theta)\,\Phi_{+}[i(c-p)]\, r^{-p-1}\, dp \tag{2.12}$$

Коэффициенты этого разложения вычисляются по формуле

$$a_k(\theta) = \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^{n-1}}{\partial p^{n-1}}[(p+k)^n \varphi(p,\theta)]\,|_{p=-k} \tag{2.13}$$

Здесь $\varphi(p,\theta) = f(p,\theta)\Phi[i(c-p)]$, а n — кратность полюса в точке $p = -k$. Для получения следующих членов асимптотики поступим так. С помощью формулы (2.9) заменим предельное значение $\Phi_{+}[i(c-p)]$ на прямой $\operatorname{Re} p = -3 + c$ функции, аналитически продолжимой на полосу $-3 + c < \operatorname{Re} p < c$, на предельное значение $\Phi_-[i(c-p)]$ функции, аналитически продолжимой на полосу $-6 + c < \operatorname{Re} p < -3 + c$. Затем рассмотрим контурный интеграл (2.11), взятый по прямоугольнику с вершинами $-3 + c \pm iA$, $-6 + c \pm iA$. Применяя к нему теорему о вычетах и переходя к пределу при $A \to \infty$, получим

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-3+c-i\infty}^{-3+c+i\infty} f(p,\theta)\,\Phi_+[i(c-p)]\,r^{-p-1}dp = a_4(\theta)\,r^3\ln r + a_5(\theta)\,r^4\ln^2 r +$$

$$+ a_6(\theta)\,r^5\ln^2 r + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-6+c-i\infty}^{-6+c+i\infty} f(p,\theta)\,K^{-1}[i(c-3-p)]\,\Phi_+[i(c-p)]\,r^{-p-1}\,dp$$

Здесь коэффициенты определяются по формуле (2.13), в которой следует положить $\varphi(p,\theta) = f(p,\theta)\,K^{-1}[i(c-3-p)]\,\Phi[i(c-p)]$. Поступая аналогичным образом, можно еще уточнить асимптотику. Из (2.12) следует, что напряжение σ_θ в вершине клина ограничено.

Перейдем к исследованию поведения σ_θ на бесконечности. Здесь важно выяснить поведение контактного напряжения, поскольку от этого зависит существование интегралов (1.2).

Полагая в интеграле (2.10) $\theta = {}^1/_2\pi$, заменим с помощью формулы (2.9) на прямой $\operatorname{Re} p = c$ $\Phi_-[i(c-p)]$ на $\Phi_+[i(c-p)]$. Применяя затем теорему Коши и используя формулу (2.9) уже на прямой $\operatorname{Re} p = 3 + c$, приходим к выражению

$$\sigma_\theta\left(r, \frac{1}{2}\pi\right) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{3+c-i\infty}^{3+c+i\infty} \frac{2\lambda^2 p\,(p-1)(p-2)\sin\pi(p-3)}{(p-3)^2 - \sin^2{}^1/_2\pi(p-3)}\,\Phi_+[i(c-p)]\,r^{-p-1}\,dp$$

В полосе $3 + c < \operatorname{Re} p < 6 + c$ подынтегральная функция имеет простой полюс в точке $p = 3$ и два комплексно-сопряженных полюса с действительной частью большей трех. Поведение $\sigma_\theta(r, {}^1/_2\pi)$ при $r \to \infty$ определяется полюсом, имеющим наименьшую действительную часть. Следовательно, на бесконечности контактное напряжение убывает как r^{-4}.

3. Случай $\alpha = {}^3/_2\pi$. Здесь коэффициент задачи Карлемана (1.5) имеет вид

$$K(t) = \lambda\prod_{k=1}^{3}(k + c + it)\,F_1^{-1}(t) \tag{3.1}$$

$$F_1(t) = [(c+it)^2 - 1]\operatorname{tg}\frac{3}{2}\pi(c+it) + (c+it)^2\operatorname{ctg}\frac{3}{2}\pi(c+it)$$

Как показывает соответствующий анализ, при $\alpha = {}^3/_2\pi$ — $c_0 = -{}^1/_3$. В случае $-{}^1/_3 < c < 0$ функции $K(t)$ и $F_1(t)$ обладают теми же свойствами, что и функции, определяемые формулой (2.3) при $-1 < c < 0$.

Как и в п. 2, задачу Карлемана (1.5) с коэффициентом (3.1) сведем к задаче Римана (2.4). Индекс ее по-прежнему вычисляется по формулам (2.5). При этом в последней следует положить $\Delta = [\arg K_1, (u)]_\Gamma$, причем $\Delta = [\arg K(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 3\pi - \Delta_2$, где $\Delta_2 = [\arg F_1(t)]_{-\infty}^{+\infty}$.

Путь отыскания Δ_2 тот же, что и в случае $\alpha = {}^1/_2\pi$, только здесь удобно положить $c = -{}^1/_6$. В результате и здесь обнаружим, что $\Delta_2 = -\pi$. Выбирая затем в качестве $\arg G_+(1) = -3\pi$ и реализуя формулу (2.5), находим, что $\varkappa_+ = 0$, $\varkappa_- = 2$ и $\varkappa = 2$.

Как и ранее, решение задачи Карлемана (1.5) с коэффициентом (3.1) определяется формулами (2.7). При этом функции $\Phi(z)$ и $B(p)$ связаны соотношением, аналогичным (2.8) с заменой аргумента ${}^1/_2\pi p$ на ${}^3/_2\pi p$. Ясно, что и здесь функция $\Phi[i(c-p)]$ обладает свойствами, указанными в п. 2.

Напряжение σ_θ определяется формулой (2.10) при $-{}^1/_3 < c < 0$, где в выражении подынтегральной функции аргумент ${}^1/_2\pi p$ заменен на ${}^3/_2\pi p$. Исследуя, как и в случае $\alpha = {}^1/_2\pi$, поведение напряжения σ_θ в вершине клина с помощью контурного интеграла (2.11), приходим к следующему разложению:

$$\sigma_\theta = \sum_{k=1}^{8}{}' a_k(\theta) r^{{}^1/_3 k-1} + [a_6(\theta) r + a_9(\theta) r^2] \ln r + \tag{3.2}$$
$$+ \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-3+c-i\infty}^{-3+c+i\infty} f(p,\theta) \Phi_+[i(c-p)] r^{-p-1} dp$$

Знак $\sum'$ обозначает сумму, в которой $a_6(\theta) \equiv 0$. Коэффициенты разложения (3.2) определяются формулой (2.13), в которой следует заменить k на ${}^1/_3k$. Для получения следующих членов асимптотики следует использовать формулу (2.9).

Анализируя формулу (3.2), обнаружим, что напряжение σ_θ при $r \to 0$ имеет особенность вида $r^{-2/3}$.

Получив разложение контактного напряжения способом, указанным в п. 2, придем к заключению, что $\sigma_\theta(r, {}^3/_2\pi)$ при $r \to \infty$ убывает как r^{-4}. Поведение напряжений σ_r и $\tau_{r\theta}$ совпадает с поведением напряжения σ_θ.

4. Случай $\alpha = \pi$. Здесь коэффициент задачи Карлемана (1.5) имеет вид

$$K(t) = -\lambda \prod_{k=1}^{3} (k + c + it) \operatorname{ctg} \pi(c + it) \tag{4.1}$$

а $c_0 = -{}^1/_2$. В случае $-{}^1/_2 < c < 0$ коэффициент $K(t)$ обладает теми же свойствами, что и функции (2.3) при $-1 < c < 0$. Сведем полученную задачу Карлемана к задаче Римана (2.4). Ее индекс вычисляется по формуле (2.5). Для этого необходимо найти $\Delta = [\arg K(t)]_{-\infty}^{+\infty} = 3\pi - [\arg \operatorname{tg} \pi(c + it)]_{-\infty}^{+\infty}$.

Второе слагаемое перепишем в виде

$$[\arg(-i) \operatorname{tg} \pi(c+it)]_{-\infty}^{+\infty} = [\arg(\operatorname{tg} \pi c + i \operatorname{th} \pi t)]_{-\infty}^{+\infty} - [\arg(\operatorname{tg} \pi c \operatorname{th} \pi t + i)]_{-\infty}^{+\infty}$$

Поскольку $\operatorname{th} \pi t$ изменяется непрерывно от -1 до 1, а $\operatorname{tg} \pi c < 0$ при $-{}^1/_2 < c < 0$, то изменение аргумента легко проследить. При этом обнаружим, что $[\arg \operatorname{tg} \pi(c + it)]_{-\infty}^{+\infty} = -\pi$.

Учитывая это и реализуя формулу (2.5), найдем $\varkappa_+ = 0$, $\varkappa_- = 2$, а индекс задачи — $\varkappa = 2$. Следовательно, решение задачи Карлемана (1.5) определяется формулами (2.7), где функция $K(t)$ задана формулой (4.1). При этом функции $\Phi(z)$ и $B(p)$ связаны соотношением

$$B(p) = \prod_{k=0}^{3} (k+p)^{-1} \Phi [i(c-p)] \sec \pi p$$

а напряжение σ_θ определяется формулой (2.10) при $-1/2 < c < 0$, в которой

$$f(p, \theta) = \frac{(p-1)\sin(p+1)\theta - (p+1)\sin(p-1)\theta}{(1+p)(2+p)(3+p)\cos \pi p}$$

Исследуя поведение напряжения σ_θ в вершине клина и на бесконечности, приходим к выводу, что при $r \to 0$ оно имеет особенность вида $r^{-1/2}$, а при $r \to \infty$ контактное напряжение убывает как r^{-4}. Напряжения σ_r и $\tau_{r\theta}$ имеют сходное поведение. Полученные результаты совпадают с соответствующими результатами, вытекающими из работы [6].

Поступила 12 II 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Уфлянд Я. С.* Интегральные преобразования в задачах теории упругости. Л., «Наука», 1968.
2. *Титчмарш Е.* Введение в теориию интегралов Фурье. М.— Л., Гостехиздат, 1948.
3. *Черский Ю. И.* Нормально разрешимое уравнение плавного перехода. Докл. АН СССР, 1970, т. 190, № 1.
4. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. М., Физматгиз, 1963.
5. *Мельник И. М.* Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана. Уч. зап. Ростовск. ун-та, 1959, т. 43, вып. 6.
6. *Попов Г. Я.* Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.