Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.529

КОНТИНУАЛЬНАЯ МЕХАНИКА МОНОДИСПЕРСНЫХ СУСПЕНЗИЙ. О СВОЙСТВАХ СУСПЕНЗИИ СФЕРИЧЕСКИХ ДИПОЛЕЙ ВО ВНЕШНЕМ ПОЛЕ

Ю. А. Буевич

(Москва)

Записана система уравнений сохранения, определяющих макроскопическое движение умеренно концентрированной суспензии твердых сферических частиц при наличии моментов, действующих на частицы со стороны внешнего поля. Вычислены реологические параметры, характеризующие квазистационарное поведение такой суспензии при независящей от движения суспензии напряженности внешнего поля.

Примерами дисперсных систем, содержащих частицы с дипольными моментами, могут служить суспензии «нагруженных» частиц, центр тяжести которых не совпадает с геометрическим центром, в гравитационном или центробежном поле и суспензии намагниченных частиц или частиц, несущих электрические диполи, в электромагнитном поле. Как показали исследования разбавленных суспензий такого типа (см., например, [1–6]), наличие внешних силовых пар, действующих на взвешенные частицы, приводит к существенному изменению реологических свойств суспензии и возникновению качественно новых эффектов. В частности, появляется отличная от нуля антисимметричная составляющая тензора средних напряжений в потоке, зависящая от взаимной ориентации векторов напряженности внешнего поля и ротора средней скорости суспензии и относительных величин модулей этого ротора и внешней пары. Последнее приводит к нарушению ньютоновского характера потока и формированию неньютоновских реологических свойств суспензии. Эти выводы теории подтверждаются имеющимися экспериментами по вискозиметрии суспензий намагниченных частиц, получивших в последнее время весьма широкое распространение [7, 8].

Представляет значительный интерес обобщение результатов [1–6] на высококонцентрированные суспензии дипольных частиц, в потоках которых указанные антисимметричные и неньютоновские свойства проявляются особенно ярко. Для этой цели можно использовать континуальную модель суспензий, развитую в [9, 10]. Такое обобщение теории разбавленных суспензий сферических диполей [1, 2] на суспензии умеренной концентрации предлагается ниже.

1. Рассмотрим суспензию твердых сфер радиуса a, обладающих дипольным моментом $\mathbf{D} = D\mathbf{T}$, где $\mathbf{T}$ — единичный вектор, вмороженный в частицу, а величина D одинакова для всех частиц. Суспензия находится во внешнем поле с напряженностью $\mathbf{g}$, таком, что на частицы действует момент

$$\mathbf{L} = \mathbf{D} \times \mathbf{g} = D(\mathbf{T} \times \mathbf{g}) \tag{1.1}$$

Кроме того, имеется внешнее массовое поле с потенциалом Φ. Если речь идет о нагруженных сферах, центр тяжести которых расположен на расстоянии $\mathbf{x}$ от геометрического центра, то

$$\mathbf{T} = \mathbf{x} / x, \quad D = {}^4/_3\, \pi a^3 d_1 x, \quad \mathbf{g} = -\nabla\Phi \tag{1.2}$$

где d_1 — средняя плотность материала частиц, а вектор g можно рассматривать как априорную величину, независящую от состояния суспензии. В частном случае g представляет собой ускорение силы тяжести.

Если же имеются в виду частицы с электрическими (магнитными) дипольными моментами, ситуация резко усложняется. Действительно, в этом случае вектор g в (1.1) описывает локальную напряженность электрического (магнитного) поля вблизи частицы, отличную, вообще говоря, от средней напряженности и зависящую от конфигурации соседних частиц. Более того, средняя напряженность представляет решение уравнений Максвелла в области, занятой суспензией, и существенно зависит от распределения эффективных электрической и магнитной проницаемостей суспензии в этой области. Последние величины определяются не только значениями соответствующих проницаемостей материала частиц и непрерывной фазы суспензии, но и средними объемной концентрацией и ориентацией частиц. Таким образом, традиционные уравнения сохранения массы, импульса и момента импульса фаз суспензии оказываются связанными с системой уравнений Максвелла в материальной среде, и возникает дополнительная весьма сложная задача вывода последних уравнений в явной форме. Подчеркнем, что указанная «физическая» нелинейность и принципиальное различие между системами нагруженных частиц и частиц с электрическими или магнитными дипольными моментами не были отмечены в [1-6], что повлекло за собой ошибочный вывод о существовании полной аналогии между этими системами, сделанный, в частности, в [2]. Как следует из экспериментов [7,8], влияние суспензии на внешнее электромагнитное поле может быть значительным, например для суспензий ферромагнитных частиц.

Таким влиянием можно приближенно пренебречь лишь при выполнении двух условий. Во-первых, электрические и магнитные проницаемости обеих фаз должны весьма слабо отличаться от проницаемостей в пустоте. Во-вторых, дипольный момент единицы объема суспензии, определяющий эффективный вектор диэлектрической поляризации (намагниченности) суспензии, обусловленный дипольными моментами ее частиц, должен быть мал по сравнению с напряженностью внешнего поля. Для упрощения считаем оба эти условия выполненными. Тогда вектор в (1.1) можно приближенно рассматривать как величину, независящую от состояния и поведения суспензии и определяемую путем решения уравнений Максвелла в пустоте.

Кроме того, пренебрежем влиянием вращательного броуновского движения взвешенных частиц. В аналитической форме принятые здесь условия, а также условия квазистационарности течения суспензии, налагаемые ниже, записаны в конце работы.

Считаем справедливыми также допущения, сделанные при построении континуальной модели суспензий в [9, 10]. А именно, считаем число Рейнольдса, характеризующее обтекание отдельных частиц, малым, а пространственное распределение частиц — случайным и пренебрегаем эффектом неперекрываемости сферических частиц, что можно сделать, если концентрация частиц не слишком велика. Подробное обсуждение этих предположений и вносимых ими ограничений содержится в [10]. Кроме того, считаем линейный масштаб переменных, характеризующих макроскопическое наблюдаемое течение суспензии, большим по сравнению с масштабом микроструктуры суспензии, совпадающим по порядку величины со средним расстоянием между соседними взвешенными частицами. Последнее представляет собой непременное условие законности усреднения по малому физическому объему суспензии и рассмотрения ее фаз как взаимопроникающих взаимодействующих континуумов [9].

2. Дословно повторяя рассуждения работы [9], после объемного усреднения получим уравнения сохранения массы, импульса и момента импульса фаз, отличающиеся от уравнений в [9] лишь наличием дополнительного члена

$$n\mathbf{l} = \frac{1}{b}\sum_j \mathbf{L}^{(j)} = D\left(\frac{1}{b}\sum_j \mathbf{T}^{(j)}\right)\times\mathbf{g} = nD(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{g}) \tag{2.1}$$

описывающего полный момент, действующий на частицы в единице объема со стороны поля $\mathbf{g}$, в правой части уравнения сохранения момента импульса дисперсной фазы. Суммирование в (2.1) проводится по частицам в пределах малого физического объема b, содержащего достаточное для усреднения число частиц, индекс (j) отмечает номер частицы, n — счетная концентрация частиц, а $\mathbf{l}$ и $\boldsymbol{\tau}$ представляют собой усредненные по большому числу частиц, находящихся в идентичных условиях, значения внешнего момента $\mathbf{L}$ и вектора $\mathbf{T}$. Подчеркнем, что модуль вектора $\boldsymbol{\tau}$ меньше единицы и равен ей лишь в предельном случае одинаковой ориентации всех частиц.

Входящие в уравнения сохранения средние сила и момент межфазового взаимодействия, симметричная часть тензора средних напряжений и псевдотензор моментных напряжений, фигурирующий в уравнении сохранения момента импульса непрерывной фазы, выражаются через средние напряжения на поверхности отдельной частицы точно таким же образом, что и в [9]. Единственное отличие состоит в том, что в данном случае появляется также антисимметричная составляющая тензора средних напряжений

$$\boldsymbol{\sigma}^{(a)} = {}^1/_2 n\boldsymbol{\varepsilon}\,\mathbf{l} \tag{2.2}$$

где $\boldsymbol{\varepsilon}$ — альтернирующий антисимметричный тензор Леви — Чивиты. Формула (2.2) совпадает с аналогичной формулой для разбавленных суспензий [2–4]. Знак в (2.2) выбран в соответствии с условием, что дивергенция $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$, входящая в уравнения, вычисляется дифференцированием по второму индексу.

Для вычисления средних напряжений, действующих на поверхности отдельной частицы, используем схему, разработанную в [10]. А именно, проводим усреднение по условной функции распределения ансамбля всех частиц за исключением некоторой выделенной (пробной) частицы, центр которой расположен в точке $\mathbf{r}$, а ориентационный вектор есть $\mathbf{T}$. Не входя в детали, укажем, что единственное отличие используемых здесь ансамблевых функций распределения от аналогичных функций в [10] заключается в появлении ориентационных векторов частиц в качестве дополнительных аргументов этих функций. В результате прежним путем получим задачу об обтекании пробной частицы, вращающейся с угловой скоростью $\mathbf{\Lambda}^*$, зависящей от $\mathbf{T}$, потоком фиктивной гомогенной среды. Как и в [10], свойства этой среды определяются влиянием всех частиц, кроме пробной, и не зависят, в частности, от вектора $\mathbf{T}$. Учитывая дополнительно, что линейный масштаб средних величин n и $\mathbf{l}$ по условию значительно превосходит радиус a, определяющий масштаб возмущений, вносимых пробной частицей в течение фиктивной среды, видим, что величиной (2.2) при исследовании обтекания пробной частицы нужно, в соответствии с общим методом в [10], пренебречь. Поэтому свойства фиктивной среды в рассматриваемом случае тождественно совпадают со свойствами среды, исследованной в [10], а задача об обтекании пробной частицы отличается от рассмотренной в [10] только тем, что вместо истинной средней угловой скорости $\boldsymbol{\lambda}$ в ней фигурирует скорость $\mathbf{\Lambda}^*$. Ясно, что

$$\boldsymbol{\lambda} = \int \mathbf{\Lambda}^*(\mathbf{T})\,\varphi(\mathbf{T})\,d\mathbf{T} \tag{2.3}$$

где $\varphi(\mathbf{T})$ — функция распределения направлений $\mathbf{T}$, нормированная на единицу.

Для искомых напряжений на поверхности частицы получаем те же представления, что и в [10], в которых $\boldsymbol{\lambda}$ заменена на $\mathbf{\Lambda}^*$, так что для окончательного определения средних напряжений на поверхности частицы нужно провести дополнительное усреднение по $\varphi(\mathbf{T})$. При этом средняя сила межфазового взаимодействия, симметричные составляющие средних напряжений в суспензии и средние моментные напряжения вообще не зависят от $\boldsymbol{\lambda}$ или $\mathbf{\Lambda}^*$ и потому совпадают с вычисленными в [10]. Средний гидродинамический момент $\mathbf{M}^*$, действующий на пробную частицу со стороны окружающей среды, определяется соотношением

$$\mathbf{M}^* = 8\pi a^3\mu_0\left(M^{(1)}\mathbf{v} - M^{(2)}\mathbf{\Lambda}^*\right), \qquad \mathbf{v} = {}^1/_2\operatorname{rot}\mathbf{c} \tag{2.4}$$

Здесь $\mathbf{c}$ — средняя скорость суспензии, а величины $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$, зависящие только от объемной концентрации частиц ρ и обращающиеся в единицу при $\rho \to 0$, вычислены в [10]. Отметим, что (2.4) справедливо в случае, когда характерная частота ω течения намного меньше частоты $\omega_0 = \mu_0(d_0a^2)^{-1}$, где d_0 и μ_0 — плотность и вязкость непрерывной фазы. Проводя усреднение $\mathbf{M}^*$ из (2.4) по направлениям $\mathbf{T}$, получим прежнее выражение для среднего момента межфазового взаимодействия.

Таким образом, при $\omega \ll \omega_0$ на основании результатов [9,10] имеем следующие уравнения для макроскопического движения рассматриваемой суспензии:

$$\partial\varepsilon / \partial t + \nabla(\varepsilon\mathbf{v}) = 0, \quad \partial\rho / \partial t + \nabla(\rho\mathbf{w}) = 0, \quad \varepsilon = 1 - \rho \tag{2.5}$$

$$\begin{gathered} d_0\varepsilon(\partial / \partial t + \mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{v} = -\nabla p + 2\nabla(\mu\mathbf{e}) + \nabla\sigma^{(a)} - \mathbf{f} - d_0\nabla\Phi \\ d_1\rho(\partial / \partial t + \mathbf{w}\nabla)\,\mathbf{w} = \mathbf{f} - (d_1 - d_0)\,\rho\nabla\Phi \end{gathered} \tag{2.6}$$

$$\begin{gathered} d_0\varepsilon(\partial / \partial t + \mathbf{v}\nabla)\,\mathbf{K}_0 = 2\nabla(\eta\mathbf{y}) - {}^1/_5 a^2\nabla(\varepsilon\mathbf{f}) + \mathbf{h} - \mathbf{m} \\ d_1\rho(\partial / \partial t + \mathbf{w}\nabla)\,\mathbf{K}_1 = \mathbf{m} + n\mathbf{l}, \quad \mathbf{h} = \|\varepsilon_{ijk}\sigma_{ik}{}^{(a)}\|, \quad \mathbf{K}_1 = \mathbf{K}_1(\boldsymbol{\lambda}) \end{gathered} \tag{2.7}$$

Здесь $\mathbf{v}$, $\mathbf{w}$ — средние скорости непрерывной и дисперсной фаз, p — среднее давление в непрерывной фазе, $\mathbf{K}_0$ и $\mathbf{K}_1$ — средние внутренние моменты импульса фаз на единицы их объема, определенные в [9]. Конкретные представления для вязкости μ, моментной вязкости η, средних силы $\mathbf{f}$ и момента $\mathbf{m}$ межфазового взаимодействия, отнесенных к единице объема суспензии, записаны в [10]. Тензоры $\mathbf{e}$ и $\mathbf{y}$ определяются при помощи равенств

$$\mathbf{e} = \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial c_i}{\partial r_j} + \frac{\partial c_j}{\partial r_i} \right\|, \quad \mathbf{y} = \frac{1}{2}\left\| \frac{\partial (\mathrm{rot}\, \mathbf{c})_i}{\partial r_j} + \frac{\partial (\mathrm{rot}\, \mathbf{c})_j}{\partial r_i} \right\| \tag{2.8}$$

Отметим, что дивергенции тензоров в (2.6) и (2.7) должны вычисляться дифференцированием по второму индексу.

Таким образом, задача определения реологических уравнений состояния суспензии сводится фактически к вычислению величины $\mathbf{l}$ из (2.1), после чего нетрудно найти тензор $\sigma^{(a)}$ в соответствии с (2.2).

3. Считаем ниже характерную частоту ω малой по сравнению с величиной $\omega_1 = \mu_0 (d_1 a^2)^{-1}$. Тогда можно пренебречь инерцией пробной частицы и записать уравнение ее вращения в виде

$$\mathbf{M}^* + D\,(\mathbf{T} \times \mathbf{g}) = 0 \tag{3.1}$$

так что угловая скорость пробной частицы выражается из (2.4) и (3.1) в форме

$$\mathbf{\Lambda}^* = \frac{M^{(1)}}{M^{(2)}}\,\mathbf{v} + \frac{D}{8\pi a^3 \mu_0 M^{(2)}}\,(\mathbf{T} \times \mathbf{g}) \tag{3.2}$$

Используя (3.2) в очевидном уравнении

$$d\mathbf{T}\,/\,dt = \mathbf{\Lambda}^* \times \mathbf{T} \tag{3.3}$$

описывающем вращение вмороженного вектора $\mathbf{T}$, получаем уравнение

$$d\mathbf{T}\,/\,dt = \alpha\,[\mathbf{v}^\circ \times \mathbf{T} + \beta\,(\mathbf{g}^\circ - \mathbf{T}\,(\mathbf{g}^\circ \mathbf{T}))] \tag{3.4}$$

совпадающее по форме с уравнением, исследованным в [1,2]. Здесь $\mathbf{v}^\circ$ и $\mathbf{g}^\circ$ — единичные векторы вдоль направлений $\mathbf{v}$ и $\mathbf{g}$ и введены параметры

$$\alpha = \frac{\nu M^{(1)}}{M^{(2)}}, \quad \beta = \frac{Dg}{8\pi a^3 \mu_0 \nu M^{(1)}} \tag{3.5}$$

Решение уравнения (3.4) определяет траектории, описываемые векторами $\mathbf{T}$, и, тем самым, функцию распределения $\varphi\,(\mathbf{T})$.

В общем случае решение (3.4) представляет значительные трудности. Здесь, следуя [1,2], рассмотрим лишь асимптотическое состояние, формально достигаемое при $t \to \infty$, так что нижеследующие результаты будут применимы, строго говоря, лишь при анализе квазистационарных течений. Характерное время релаксации $\mathbf{T}$ равно, согласно (3.4), α^{-1}. Поэтому для характерной частоты течения условие квазистационарности можно записать в виде $\omega \ll \alpha$.

Как следует из анализа Холла и Бюзенберга [1] и Бреннера [2], имеется два качественно различных типа асимптотических решений уравнений типа (3.4), реализация которых зависит от значений параметра β из (3.5) и угла γ между направлениями $\mathbf{v}^\circ$ и $\mathbf{g}^\circ$. Если $\beta \gg 1$ или если β лежит в интервале [0, 1), но γ отличен от $^1/_2\pi$, то при $t \to \infty$ вектор **T** приходит во вполне определенное положение $\boldsymbol{\tau}$, не зависящее далее от времени и описывающее предельную ориентацию частиц. Как было показано в [1] с использованием теоремы устойчивости Пуанкаре — Бендиксона, эта предельная ориентация не зависит от начального положения вектора **T**, единственна и устойчива по отношению к возмущениям $\boldsymbol{\tau}$ произвольной амплитуды и направления. Вектор $\boldsymbol{\tau}$ получается при этом из решения стационарного аналога уравнения (3.4). Это решение имеет вид [1,2]

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{v}^\circ \cos\psi_1 \sin^2\psi_2 + \mathbf{g}^\circ \frac{\sin\psi_1\cos\psi_2}{\sin\gamma} + (\mathbf{v}^\circ\times\mathbf{g}^\circ)\frac{\sin\psi_1\sin\psi_2}{\sin\gamma} \tag{3.6}$$

где углы ψ_1 и ψ_2 определены соотношениями

$$\sin\psi_1 = \{^1/_2(1+\beta^2) - [^1/_4(1+\beta^2)^2 - \beta^2\sin^2\gamma]^{1/2}\}^{1/2} \tag{3.7}$$

$$\sin\psi_2 = (\beta\sin\gamma)^{-1}\sin\psi_1, \quad \sin\gamma = +[1-(\mathbf{v}^\circ\mathbf{g}^\circ)^2]^{1/2}$$

Выбор знака при определении $\sin\gamma$ очевиден; знак выражения для $\sin\psi_1$ в (3.7) выбирается таким образом, чтобы угол ψ_1, образованный векторами $\boldsymbol{\tau}$ и $\mathbf{v}^\circ$ лежал в том же квадранте, что и γ.

Ясно, что асимптотическая функция распределения $\varphi(\mathbf{T})$ представляет в данном случае дельта-функцию, так что усреднение по $\varphi(\mathbf{T})$ сводится фактически к замене **T** на $\boldsymbol{\tau}$.

Из (2.3) и (3.3) для асимптотической угловой скорости вращения частицы имеем

$$\boldsymbol{\Lambda}^* \equiv \boldsymbol{\lambda} = \lambda\boldsymbol{\tau} \tag{3.8}$$

т. е. частицы вращаются относительно осей, параллельных $\boldsymbol{\tau}$. Отсюда и из (2.4), (3.1) для внешнего момента $\mathbf{L}^*$, действующего на пробную частицу со стороны внешнего поля, получаем

$$\mathbf{L}^* \equiv \mathbf{l} = D(\boldsymbol{\tau}\times\mathbf{g}) = 8\pi a^3\mu_0(M^{(1)}\lambda\boldsymbol{\tau} - M^{(2)}\mathbf{v}) \tag{3.9}$$

Умножая (3.9) скалярно на $\boldsymbol{\tau}$ и используя (3.8) и определение угла ψ_1, имеем далее

$$\lambda = (M^{(1)}/M^{(2)})\mathbf{v}\boldsymbol{\tau} = \alpha\cos\psi_1 \tag{3.10}$$

Отсюда и из (2.1), (2.2), (3.8) и (3.9) следует

$$n\mathbf{l} = 6\rho M^{(1)}\mu_0 v(\boldsymbol{\tau}\cos\psi_1 - \mathbf{v}^\circ) \tag{3.11}$$

$$\boldsymbol{\sigma}^{(a)} = 3\rho M^{(1)}\mu_0 v\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{\tau}\cos\psi_1 - \mathbf{v}^\circ)$$

что окончательно замыкает систему уравнений сохранения (2.5) — (2.7). В (3.11) счетная концентрация частиц n была выражена через объемную концентрацию ρ. Аналогичный результат для разбавленных суспензий [1,2] следует из (3.11) при $\rho \to 0$, когда $M^{(1)} \to 1$. Отметим, что величине $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ в (3.11) приписан знак, обратный знаку $\boldsymbol{\sigma}^{(a)}$ в [1,2], что связано с различием в определении дивергенции этого тензора в уравнении сохранения импульса непрерывной фазы.

Дипольный момент единицы объема суспензии выражается через сумму моментов частиц, т. е.

$$\mathbf{d} = nD\boldsymbol{\tau} = (3\rho D/4\pi a^3)\boldsymbol{\tau} \tag{3.12}$$

Поскольку, как следует из (3.6), вектор $\boldsymbol{\tau}$ имеет компоненты, нормальные направлению внешнего поля $\mathbf{g}^\circ$, суспензия анизотропна в том смысле, что ее вектор диэлектрической поляризации или намагниченности пропорционален $\mathbf{d}$ из (3.12) и расположен под углом к $\mathbf{g}^\circ$.

В особом случае, когда $\gamma = {}^1/_2\pi$ и $0 \leqslant \beta < 1$, пробная частица вращается вокруг некоторой оси, лежащей в плоскости, нормальной $\mathbf{g}^\circ$, причем асимптотическая ориентация этой оси в указанной плоскости определяется начальной ориентацией частицы [1,2]. В этом случае вектор $\mathbf{T}$ совершает периодическое вращение, располагаясь в любой момент времени вдоль образующей некоторого круглого прямого конуса, угол раствора которого зависит от начального направления $\mathbf{T}$. Вид функции распределения $\varphi(\mathbf{T})$ также зависит от начального распределения ориентаций частиц, относительно которого могут быть сделаны более или менее правдоподобные гипотезы.

Первой гипотезой такого типа было предположение об однородности начального распределения ориентаций в [1]. Однако такое распределение в действительности не может реализоваться, так как оно не удовлетворяет стационарному уравнению Лиувилля [3]. Вместо него в [3] было предложено использовать одно из решений этого уравнения, но аргументов в пользу того, что осуществляется именно это решение, приведено не было.

Попытка получить квазистационарное распределение $\varphi(\mathbf{T})$ при $\gamma = {}^1/_2\pi$ из рассмотрения пределов распределений, соответствующих $\gamma = {}^1/_2\pi + \delta$, при $\delta \to 0$ была сделана в [2]. При малых δ из (3.7) имеем

$$\sin\psi_1 \approx \beta, \qquad \sin\psi_2 \approx 1 \tag{3.13}$$

так что указанные пределы запишутся в терминах $n\mathbf{l}$, $\sigma^{(a)}$ в виде

$$n\mathbf{l} = -6\rho M^{(1)}\mu_0\nu\beta\,[\beta\boldsymbol{\nu}^\circ \pm (1-\beta^2)^{1/2}(\boldsymbol{\nu}^\circ \times \mathbf{g}^\circ)] \tag{3.14}$$
$$\sigma^{(a)} = -3\rho M^{(1)}\mu_0\nu\beta\varepsilon\,[\beta\boldsymbol{\nu}^\circ \pm (1-\beta^2)^{1/2}(\boldsymbol{\nu}^\circ \times \mathbf{g}^\circ)]$$

причем положительным и отрицательным δ отвечают верхний и нижний знаки в (3.14). Видно, что эти пределы существенно различны (особенно при малых β); предполагая, что значению $\gamma = {}^1/_2\pi$ соответствуют средние этих пределов, имеем

$$n\mathbf{l} = -6\rho M^{(1)}\mu_0\beta^2\boldsymbol{\nu}, \quad \sigma^{(a)} = -3\rho M^{(1)}\mu_0\beta^2\boldsymbol{\varepsilon}\boldsymbol{\nu} \tag{3.15}$$

Вывод (3.15) основан на представлении, что в реальных ситуациях величина δ представляет собой случайную функцию, характеризующую разброс углов γ в окрестности разных частиц, возникающий в результате слабых локальных неоднородностей потока, и на том факте, что вектор $\mathbf{T}$ занимает положение $\boldsymbol{\tau}$, определенное в (3.6), каким бы малым ни был угол δ.

Однако при малых $|\delta|$ устойчивость стационарной ориентации нарушается в том смысле, что сравнительно малого возмущения достаточно для вынужденного перехода γ через значение ${}^1/_2\pi$, сопровождающегося существенным качественным изменением характера асимптотического поведения частицы. В частности, каким бы слабым ни было влияние вращательного броуновского движения на формирование реологических свойств потока с $\gamma \neq {}^1/_2\pi$ (см., например, [6, 11]), в области $\gamma \approx {}^1/_2\pi$ это влияние становится определяющим [12]. При этом из физических соображений очевидно, что в этой области броуновское движение должно приводить к установлению некоторого вполне определенного установившегося распределения, независящего от начального состояния суспензии.

Анализ влияния броуновского движения не входит в задачи этой работы; поэтому ограничимся здесь лишь вычислением величин (2.1) и (2.2) в пределе исчезающе слабого броуновского движения при $\gamma = {}^1/_2\pi$. Это вычисление легко провести, используя предельную функцию распределения $\varphi(\mathbf{T})$, полученную Хинчем и Лилом [12] для разбавленных суспензий. Нетрудно показать, используя метод [12], что вид этой функции сохраняется и для рассматриваемых здесь суспензий умеренной концентрации. Окончательный результат имеет форму

$$n\mathbf{l} = -6\rho M^{(1)}\mu_0 F(\beta)\,\mathbf{v}, \qquad \sigma^{(a)} = -3\rho M^{(1)}\mu_0 F(\beta)\,\varepsilon\mathbf{v} \tag{3.16}$$

$$F(\beta) = 1 - \frac{1-\beta^2}{\sqrt{3}}\,\frac{\ln[(\sqrt{2+\beta^2}+\beta\sqrt{3})(\sqrt{2+\beta^2}-\beta\sqrt{3})^{-1}]}{\ln[(\sqrt{2+\beta^2}+\beta)(\sqrt{2+\beta^2}-\beta)^{-1}]} \tag{3.17}$$

При $\beta < 1$ величины (3.16) существенно отличаются от величин в (3.14), что вызвано отмеченным выше влиянием броуновского движения на изменение характера вращения частиц. Условие реализации (3.14) может быть получено совершенно аналогично таковому в [12]. Имеем

$$\frac{D_{Br}}{\nu M^{(1)}} \ll |\delta|(1-\beta)^{-1/2}, \qquad D_{Br} = \frac{kT}{8\pi a^3\mu_0 M^{(2)}} \tag{3.18}$$

где D_{Br} — коэффициент вращательной броуновской диффузии, выраженный в (3.18) через температуру в энергетических единицах в соответствии с формулой Эйнштейна. При замене неравенства (3.18) на обратное сильное неравенство справедливы формулы (3.16). Формулы для промежуточных значений $|\delta|$ могут быть в принципе получены путем применения к уравнению для $d\mathbf{T}/dt$, содержащему диффузионный член, метода сращиваемых асимптотических разложений.

Таким образом, при переходе через значение $\gamma = {}^1/_2\,\pi$ реологические параметры суспензии, связанные с наличием дипольного взаимодействия с внешним полем, претерпевают резкое изменение в области

$$\Delta\gamma \sim |\delta| \sim D_{Br}(\nu M^{(1)})^{-1}(1-\beta)^{1/2} \tag{3.19}$$

С точки зрения теории, в которой броуновское движение не учитывается, такое резкое изменение параметров воспринимается как нарушение их непрерывной зависимости от γ, т. е. от ориентации течения по отношению к внешнему полю. Аналогичный вывод для разбавленных суспензий был сделан в [2, 11].

Отметим еще, что для концентрированных суспензий ограничение (3.18) менее ограничительно, чем для разбавленных, так как $M^{(1)}$ и $M^{(2)}$ представляют собой быстро возрастающие функции концентрации [10].

4. Используя уравнения сохранения (2.5)—(2.7) и результаты работы [10] и п. 3 данной работы, нетрудно рассмотреть простейшие, в том числе вискозиметрические те-

чения, подобно тому как это было сделано для разбавленных суспензий в [2]. Здесь в качестве примера рассмотрим только течение Куэтта при условии, что концентрация суспензии постоянна. Для целей этого раздела достаточно рассмотреть частный случай такого течения, когда скорости $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ фаз совпадают со скоростью суспензии, задаваемой в виде $\mathbf{c} = Gx\mathbf{y}^\circ$, где G — скорость сдвига, принимая

$$\mathbf{g}^\circ = \mathbf{x}^\circ \sin\gamma \cos\theta + \mathbf{y}^\circ \sin\gamma \sin\theta + \mathbf{z}^\circ \cos\gamma \tag{4.1}$$

где $\mathbf{x}^\circ$, $\mathbf{y}^\circ$ и $\mathbf{z}^\circ$ — единичные векторы координатных осей, а θ — некоторый угол, определяющий направление проекции $\mathbf{g}^\circ$ в плоскости (x, y). Как легко показать при помощи уравнений сохранения п. 2, такое течение может быть осуществлено при равных плотностях частиц и жидкости или в отсутствие внешнего массового поля. Учитывая, что $\mathbf{v} = {}^1\!/_2 G\mathbf{z}^\circ$, после вычислений, основанных на результатах п. 2 и 3, для компонент тензора средних напряжений в течении получаем следующие выражения;

$$\begin{aligned}
&\sigma_{xx}' = \sigma_{yy}' = \sigma_{zz}' = 0 \qquad (\sigma_{ij}' = \sigma_{ij} + p\delta_{ij}) \\
&\sigma_{xy}' = \mu_0 G\,(1 + {}^5\!/_2\rho S - {}^3\!/_2\rho M \sin^2\psi_1) \\
&\sigma_{yx}' = \mu_0 G\,(1 + {}^5\!/_2\,\rho S + {}^3\!/_2\,\rho M \sin^2\psi_1) \\
&\sigma_{xz}' = -\,\sigma_{zx}' = -\,{}^3\!/_2\rho M \mu_0 G \sin\psi_1 \cos\psi_1 \sin(\psi_2 + \theta) \\
&\sigma_{yz}' = -\,\sigma_{zy}' = {}^3\!/_2\,\rho M \mu_0 G \sin\psi_1 \cos\psi_1 \cos(\psi_2 + \theta)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Здесь обозначено $M = M^{(1)}$ и введена функция $S = S\,(\rho)$ в соответствии с представлением

$$\mu = \mu_0\,(1 + {}^5\!/_2\,\rho S) \tag{4.3}$$

где μ — эффективная вязкость суспензии в отсутствие внешнего поля или дипольных моментов частиц, вычисленная в [10]. Функции $M\,(\rho)$ и $S\,(\rho)$ равны единице при $\rho = 0$ и быстро возрастают с ρ. Вязкость течения Куэтта μ', определяемую в экспериментах, можно вычислить как отношение тангенциальной компоненты силы в направлении $\mathbf{y}^\circ$, действующей на единичной площадке плоскости (y, z), т. е. величины σ_{yx}', к скорости сдвига G. Удобнее рассматривать приведенную вязкость

$$[\mu] = \frac{\mu' - \mu_0}{\mu_0 \rho} \tag{4.4}$$

В частных случаях, когда внешнее поле параллельно ($\gamma = 0$ или π) и перпендикулярно ($\gamma = {}^1\!/_2\,\pi$) вектору вихря, из (4.4) получаем соответственно

$$[\mu] = {}^5\!/_2 S, \quad [\mu] = {}^5\!/_2 S + {}^3\!/_2 \beta^2 M \tag{4.5}$$

Аналогично, при $\beta = 0.1$, ∞ соответственно имеем

$$\begin{aligned}
&[\mu] = {}^5\!/_2 S, \quad [\mu] = {}^5\!/_2 S + {}^3\!/_2\, M\,(1 - |\cos\gamma|) \\
&[\mu] = {}^5\!/_2 S + {}^3\!/_2\, M \sin^2\gamma
\end{aligned} \tag{4.6}$$

Для разбавленных суспензий соотношения (4.4)—(4.6) совпадают с вычисленными в [2]. Нетрудно получить и другие характеристики течения Куэтта, важные для уравнений сохранения. В частности, тензор γ из (2.8) тождественно равен нулю, и моментные напряжения в этом течении не возникают.

Таким образом, как следует из рассмотренного частного примера, суспензия дипольных частиц во внешнем поле оказывается неньютоновской в двух отношениях. Во-первых, эффективные коэффициенты вязкости зависят от скорости сдвига, входящей в определение параметра β в (3.5). Во-вторых, нарушается тензорная пропорциональность между средними напряжениями и скоростями сдвига — в (4.2) появляются напряжения, нормальные к плоскости течения. Суспензия оказывается не только анизотропным диэлектриком или магнетиком, но и анизотропным телом в гидродинамическом отношении. Очевидно, оба эти вывода имеют общий характер.

Поскольку M возрастает с увеличением ρ быстрее, чем S (см. [10]), относительная роль неньютоновских и антисимметричных свойств усиливается с ростом концентрации суспензии.

Отметим, что Бэтчелор [4], рассматривая искусственный пример суспензии, на частицы которой действует внешняя пара сил, не зависящая от движения частиц, сделал вывод, что такая суспензия представляет собой «квазиньютоновскую» среду в том смысле, что средние напряжения выражаются через производные скорости по координатам при помощи линейного тензорного соотношения

(4.7) $$\sigma_{ij}' = \mu_{ijkm} \partial c_k / \partial r_m$$

в которое входит тензор коэффициентов вязкости четвертого ранга. Ясно, что в реальных течениях с дипольным взаимодействием частиц с внешним полем этот вывод неверен, ибо, во-первых, коэффициенты вязкости сами зависят от производных скорости, а во-вторых, как следует из (3.6) и (3.11), тензор σ' имеет составляющую, пропорциональную εg°.

5. Выше использовались допущения, принятые при построении континуальной механики суспензий в [9,10]. Эти допущения подробно обсуждены в [9,10] и кратко упомянуты в п. 1. Здесь остановимся только на новых предположениях, специфичных для этой работы.

Прежде всего, условие независимости внешнего электрического или магнитного поля от состояния суспензии требует не только малости отклонений соответствующих проницаемостей от проницаемостей вакуума, но и выполнения неравенства

(5.1) $$4\pi d = 3\rho D a^{-3} \ll g$$

утверждающего малость поляризации (намагниченности) суспензии, обусловленной дипольным моментом (3.12), по сравнению с напряженностью поля.

Условие слабого влияния броуновского движения означает малость обратного числа Пекле P_{Br} для вращательной броуновской диффузии по сравнению с единицей. Это условие можно записать в виде

(5.2) $$\frac{1}{P_{Br}} = \frac{D_{Br}}{\nu M^{(1)}} = \frac{kT}{8\pi M^{(1)} M^{(2)} a^3 \mu_0 \nu} \ll 1$$

Отметим, что это условие нарушается при значениях γ, достаточно близких к $^1/_2\pi$, каким бы малым ни был коэффициент диффузии D_{Br} (см. оценку в (3.18)). Условие (5.2) налагает ограничение снизу на допустимый радиус частиц суспензии a.

Полученные выше результаты справедливы для течений, характерная частота ω которых не слишком велика. Имеем три соответствующих условия квазистационарности

(5.3) $$\omega \ll \omega_0 = \frac{\mu_0}{d_0 a^2}, \quad \omega \ll \omega_1 = \frac{\mu_0}{d_1 a^2}, \quad \omega \ll \frac{\nu M^{(1)}}{M^{(2)}}$$

Учитывая, что малость числа Рейнольдса для обтекания частиц означает выполнение неравенств

(5.4) $$a d_0 u < \mu_0, \quad a^2 d_0 \lambda < \mu_0 \qquad (u = v - w)$$

видим, что в реальных ситуациях первые два условия (5.3) обычно выполняются, и наиболее ограничительным оказывается третье условие квазистационарности. В отличие от (5.2) условия (5.3) и (5.4) налагают ограничения на радиус частиц сверху.

Поступила 28 VI 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Hall W. F., Busenberg S. N.* Viscosity of magnetic suspensions. J. Chem. Phys., 1969, vol. 51, No. 1, p. 137.
2. *Brenner H.* Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field. J. Coll. & Interface Sci., 1970, vol. 32, No. 1, p. 141.
3. *Brenner H.* Rheology of two-phase systems. In: Annual Review of Fluid Mechanics, vol.2, Palo Alto, Calif., 1970, p. 137—176.
4. *Batchelor G. K.* The stress system in a suspension of force-free particles. J. Fluid Mech., 1970, vol. 41, pt. 3, p. 545.
5. *Leal J. G.* On the effect of particle couples on the motion of a dilute suspension of spheroids. J. Fluid Mech., 1971, vol. 46, pt 2, p. 395.
6. *Brenner H.* Suspension rheology in the presence of rotary Brownian motion and external couples: elongation flow of dilute suspensions. Chem. Engng Sci., 1972, vol. 27, No 5, p. 1069.
7. *Rosensweig R. E., Kaiser R., Miskolczy G.* Viscosity of magnetic fluids in a magnetic field. J. Coll. & Jnterface Sci., 1969, vol. 29, No. 4, p. 680.
8. *Mc Tague J. P.* Magnetovicsocity of magnetic colloids. J. Chem. Phys., 1969, vol. 51, No. 1, p. 133.
9. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Интегральные и дифференциальные законы сохранения. ПММ, 1973, т. 37, вып. 5.
10. *Буевич Ю. А., Марков В. Г.* Континуальная механика монодисперсных суспензий. Реологические уравнения состояния для суспензии умеренной концентрации, ПММ 1973, т. 37, вып. 6.
11. *Brenner H., Weissman M. H.* Rheology of a dilute suspension of dipolar spherical particles in an external field. II. Effects of rotary Brownian motion. J. Coll. & Interface Sci., 1972, vol. 41, No. 3, p. 499.
12. *Hinch E. J., Leal L. C.* Note on the rheology of a dilute suspension of dipolar spheres with weak Brownian couples. J. Fluid Mech., 1972, vol. 56, pt. 4, p. 803.