Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 532.72

О НЕОБХОДИМЫХ УСЛОВИЯХ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ЗАДАЧАХ УПРАВЛЕНИЯ ПРОЦЕССАМИ ПЕРЕНОСА

Ю. А. Кузнецов, С. Ф. Морозов

(Горький)

Методом, изложенным в работе [1], устанавливаются необходимые условия оптимальности (в форме принципа минимума) для управляемого нестационарного процесса переноса частиц, описываемого общим интегро-дифференциальным кинетическим уравнением. Функции управления входят в начальные условия процесса, в неоднородный член уравнения (источник) или в коэффициент поглощения.

Задачи об уравнении системами с распределенными параметрами, связанными с интегро-дифференциальными уравнениями, имеют значение в математической теории [2] и в приложениях, например в теории управления ядерными реакторами [3].

1. Рассмотрим управляемый процесс переноса частиц, связанный со смешанной задачей для нестационарного интегро-дифференциального уравнения переноса

$$\begin{aligned}
(1.1)\qquad & \frac{\partial}{\partial t}\psi(X,v,t)+(v,\nabla_x)\psi(X,v,t)+|v|\Sigma(X,v,t)\psi(X,v,t)=\\
&=\int\limits_V |v'|\{\Sigma_f(X,v',t)\nu_f(X,v')K_f(X,v',v)+\\
&+\Sigma_s(X,v',t)K_s(X,v',v)\}\psi(X,v',t)\,dv'+q(X,v,t)\\
&\psi(X,v,t)\,|_{t=+0}=g(X,v,u(X,v))\\
&\psi(X,v,t)\,|_{x\in S}=0,\quad (v\cdot n(X))<0,\quad t\in[0,T]\\
&X=\{x_1,x_2,x_3\}\in G,\\
&v=\{v_1,v_2,v_3\}\in V,\ |v|>\alpha=\text{const}>0
\end{aligned}$$

Здесь G — выпуклая область в $E_3\{x_1, x_2, x_3\}$, ограниченная гладкой поверхностью S, $n = n(X)$ — внешняя нормаль в точке $X \in S$, V — ограниченная область из $E_3\{v_1, v_2, v_3\}$, $u(X, v)$, $(X, v) \in G \times V$ — управляющая вектор-функция, измеримая и ограниченная в указанной области, принимающая значения из $\Omega \subset E_m$ (такие управления называются допустимыми).

В дальнейшем оператор $\partial / \partial t + (v, \nabla_x)$ обозначается как $\partial / \partial l$, где $\partial / \partial l$ — производная вдоль характеристики этого оператора.

Для задачи (1.1) поставим следующую оптимальную задачу: среди допустимых управлений $u(X, v)$, удовлетворяющих ограничению

$$\begin{aligned}
(1.2)\qquad & L(u)=\int\limits_D L(X,v,t,u(X,v),\psi_u(X,v,t))\,dD\leqslant 0\\
& D=G\times V\times[0,T],\qquad dD=dX\,dv\,dt
\end{aligned}$$

найти управление $u(X, v)$, минимизирующее функционал (T — фиксированный момент времени)

$$\Phi(u) = \int_G\int_V \Phi(X, v, u(X, v), \psi_u(X, v, T))\, dX\, dv \tag{1.3}$$

Будем предполагать, что функции

$$q(X, u, t),\ g(X, v, u),\ \Sigma(X, v, t),\ K_f(X, w, v),\ K_s(X, w, v)$$

измеримы по переменным (X, v, w, t), а $g(X, v, u)$ непрерывна по u в соответствующих областях определения и, кроме того, каково бы ни было допустимое управление $u(X, v)$, выполнены следующие условия ограниченности и суммируемости (C_1 — C_5 — постоянные):

$$\begin{gathered}
0 \leqslant |v|\, \Sigma(X, v, t) \leqslant C_1, \qquad 0 \leqslant \nu_f(X, v) \leqslant C_2 \\
\max_G \int_V \left\{\int_V |K_s(X, v', v)|^q\, dv'\right\}^{p/q} dv \leqslant C_3 \\
\max_G \int_V \left\{\int_V |K_f(X, v', v)|^q\, dv'\right\}^{p/q} dv \leqslant C_4 \\
\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1, \quad p > 1; \quad \|q(X, v, t)\|_{L_p(D)} \leqslant C_5 \\
|g(X, v, u(X, v))| \leqslant A(X, v), \qquad A(X, v) \in L_p(G \times V)
\end{gathered} \tag{1.4}$$

В функционалах (1.2), (1.3) $L(X, v, t, u, z)$ и $\Phi(X, v, u, z)$ считаем измеримыми по X, v, t, непрерывными по u, дважды непрерывно-дифференцируемыми по z в соответствующих областях определения, а также удовлетворяющими следующим порядкам роста по z (M_1 — M_3 — постоянные числа):

$$\begin{gathered}
|L|, |\Phi| \leqslant M_1 z^p; \quad |L_z'|, |\Phi_z'| \leqslant M_2 z^{p-1} \\
|L_{zz}''|, |\Phi_{zz}''| \leqslant M_3 z^{p-2}
\end{gathered} \tag{1.5}$$

Эти условия используются при выводе вариаций функционалов.

2. Пусть $u^0(X, v)$ — оптимальное управление, а $\psi_0(X, v, t)$ — соответствующее ему L_p-решение задачи (1.1). Построим импульсную варианту $u^\varepsilon(X, v)$ управления $u^0(X, v)$. Возьмем конечный набор попарно различных точек $(X_i, v_i) \in G \times V$. Для каждого набора неотрицательных чисел γ^{ik} найдется $\varepsilon_\gamma > 0$ такое, что при $0 < \varepsilon < \varepsilon_\gamma$ прямоугольники

$$\begin{aligned}
\Pi_{ik}^\varepsilon \equiv \Pi_{ik}^\varepsilon(X_i, v_i) = \Big\{(X, v)\colon\ & x_{i1} - \varepsilon \sum_{l=1}^{k} \gamma^{il} < x_1 \leqslant \\
\leqslant x_{i1} - \varepsilon \sum_{l=1}^{k-1} \gamma^{il},\quad & x_{is} - \varepsilon k < x_s \leqslant x_{is} - \varepsilon(k-1),\ s = 2, 3; \\
v_{in} - \varepsilon k < v_n \leqslant v_{in} - \varepsilon(k-1),\quad & n = 1, 2, 3\Big\} \qquad (|\Pi_{ik}^\varepsilon| = \varepsilon^6 \gamma^{ik})
\end{aligned}$$

попарно не пересекаются. Пусть $u = \{u_{ik}\}$ — конечный набор векторов из Ω. Варианту $u^\varepsilon(X, v)$, параметрами которой являются $\{(X_i, v_i)\}$,

$u = \{u_{ik}\}$, $\gamma = \{\gamma^{ik}\}$ определим следующим образом:

$$u^{\varepsilon}(X, v) = \begin{cases} u_{ik}, & (X, v) \in \Pi_{ik}^{\varepsilon} \\ u^0(X, v), & (X, v) \in G \times V \setminus \bigcup\limits_{i,k} \Pi_{ik}^{\varepsilon} \end{cases}$$

Заметим, что смешанная задача (1.1) при условиях (1.4) обладает свойством устойчивости по возмущению управления. (Аналогичные варианты строятся и в тех случаях, когда управление входит в $q(X, v, t)$ и $\Sigma(X, v, t)$.) Сформулируем это в виде теоремы.

Теорема. Для любой варианты $u^{\varepsilon}(X, v)$ существует такое положительное число $\varepsilon^* \leqslant \varepsilon_{\gamma}$, что каждому управлению $u^{\varepsilon}(X, v)$, $0 \leqslant \varepsilon \leqslant \varepsilon^*$, при условиях (1.4), отвечает единственное в D L_p-решение $\psi_{\varepsilon}(X, v, t)$ задачи (1.1). Для него справедливо неравенство

$$\|\psi_{\varepsilon}(X, v, t) - \psi_0(X, v, t)\|_{L_p(D)} + \left\|\frac{\partial\psi_{\varepsilon}}{\partial l} - \frac{\partial\psi_0}{\partial l}\right\|_{L_p(D)} \leqslant$$
$$\leqslant C\|g(X, v, u^{\varepsilon}(X, v)) - g(X, v, u^0(X, v))\|_{L_p(G\times V)}$$

из которого следует, что при $\varepsilon \to 0$

$$\|\psi_{\varepsilon}(X, v, t) - \psi_0(X, v, t)\|_{L_p(D)} + \left\|\frac{\partial\psi_{\varepsilon}}{\partial l} - \frac{\partial\psi_0}{\partial l}\right\|_{L_p(D)} \to 0$$

Данная теорема есть следствие теорем, установленных в работе [4].

3. Для нахождения первых вариаций Φ и L надо построить интегральные представления приращений $\Delta_{\varepsilon}L = L(u^{\varepsilon}) - L(u^0)$ и $\Delta_{\varepsilon}\Phi = \Phi(u^{\varepsilon}) - \Phi(u^0)$. Рассмотрим приращение $\Delta_{\varepsilon}L$

$$\Delta_{\varepsilon}L = \left\{\int\limits_D \frac{\partial L(\eta_{\varepsilon})}{\partial z}[\psi_{\varepsilon}(X, v, t) - \psi_0(X, v, t)]\,dD\right\} +$$
$$+ \int\limits_D \Big\{L(X, v, t, u^{\varepsilon}(X, v), \psi_0(X, v, t)) - L(X, v, t, u^0(X, v), \psi_0(X, v, t))\Big\}dD \equiv$$
$$\equiv \{\Delta_{\varepsilon}{}^1 L\} + \int\limits_D \Delta_u L(X, v, t, u^{\varepsilon}, u^0, \psi_0)\,dD$$

$$\eta_{\varepsilon} = (X, v, t, u^{\varepsilon}(X, v), \psi_0(X, v, t) + \vartheta(\psi_{\varepsilon} - \psi_0)), \quad \varepsilon \geqslant 0, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 1$$

Обозначим $A\psi$ — линейный интегро-дифференциальный оператор вида

$$A\psi = \frac{\partial\psi}{\partial l} + |v|\,\Sigma(X, v, t)\psi - \int\limits_V |v'|\,\{\Sigma_s(X, v', t)K_s(X, v', v) +$$
$$+ \Sigma_f(X, v', t)\nu_f(X, v')K_f(X, v', v)\}\,\psi(X, v', t)\,dv'$$

Введем связанное с A линейное нормированное пространство $L_p{}^A(D)$, состоящее из функций $\psi(X, v, t) \in L_p(D)$ с обобщенной производной $\partial\psi/\partial l \in L_p(D)$, обладающих ограниченной нормой вида

$$\|\psi(X, v, t)\|_{L_p{}^A} = \|\psi(X, v, t)\|_{L_p(D)} + \left\|\frac{\partial\psi(X, v, t)}{\partial l}\right\|_{L_p(D)}$$

и таких, что

$$\psi(X, v, t)\,|_{t=+0} = \varphi(X, v), \quad \psi(x, v, t) = 0, \quad X \in S \quad (v\cdot n) < 0$$

Уравнение $A\psi = \theta$ в силу теоремы 1 единственным образом разрешимо в пространстве $L_p{}^A(D)$ при любой функции $\varphi(X, v) \in L_p(G \times V)$ и справедлива оценка

$$\|\psi(X, v, t)\|_{L_p{}^A(D)} \leqslant C\|\varphi(X, v)\|_{L_p(G\times V)} \tag{3.1}$$

Каждой $\varphi(X, v) \in L_p(G \times V)$ ставится в соответствие единственная $\psi(X, v, t) \in L_p{}^A(D)$, поэтому существует оператор B, $\psi(X, v, t) = B\varphi(X, v)$, действующий из $L_p(G\times V)$ в $L_p{}^A(D)$, являющийся в силу (3.1) ограниченным, т. е.

$$\|B\|_{L_p(G\times V)\to L_p{}^A(D)} \leqslant C$$

Ясно, что B^* действует из $L_p{}^A(D)^*$ в $L_p(G \times V)^*$. Заметим, что

$$\Delta_\varepsilon\psi = \psi_\varepsilon(X, v, t) - \psi_0(X, v, t) \in L_p{}^A(D)$$

и можно записать

$$A(\Delta_\varepsilon\psi) = 0, \qquad \Delta_\varepsilon\psi = B\,\Delta_u g$$

$$\Delta_u g = g(X, v, u^\varepsilon(X, v)) - g(X, v, u^0(X, v)) \tag{3.2}$$

Определим теперь при каждом $\varepsilon \geqslant 0$ интегральной формулой

$$T_\varepsilon(\psi) = \int_D \frac{\partial L(\eta_\varepsilon)}{\partial z}\psi(X, v, t)\,dD$$

на функциях $\psi(X, v, t) \in L_p{}^A(D)$ линейный ограниченный функционал $T_\varepsilon = T_\varepsilon(\psi)$, который, очевидно, удовлетворяет условию

$$T_\varepsilon(\Delta_\varepsilon\psi) = \Delta_\varepsilon{}^1 L \tag{3.3}$$

Каждый функционал T_ε, $\varepsilon \geqslant 0$, как элемент пространства $L_p{}^A(D)^*$, переводится оператором B^* в некоторый элемент пространства $L_p(G \times V)^*$.

В силу (3.2) и (3.3) и теоремы Рисса о представлении линейного функционала, по которой каждому функционалу Q_ε на $L_p(G \times V)$ соответствует единственная функция χ_ε из $L_q(G \times V)$, $1/p + 1/q = 1$, так что

$$Q_\varepsilon(z) = \int_{G\times V} \chi_\varepsilon(X, v)\,z(X, v)\,dX\,dv, \qquad z(X, v) \in L_p(G\times V)$$

имеем

$$\Delta_\varepsilon{}^1 L = T_\varepsilon(\Delta_\varepsilon\psi) = (\tau_\varepsilon, \Delta_\varepsilon\psi) = (\tau_\varepsilon, B\Delta_u g) =$$
$$= (B^*\tau_\varepsilon, \Delta_u g) = Q_\varepsilon(\Delta_u g) = \int_{G\times V} \chi_\varepsilon(X, \Delta_u g(X, v, u^\varepsilon, u^0)\,dX\,dv$$

Отсюда получаем интегральное представление для $\Delta_\varepsilon L$ в виде

$$\Delta_\varepsilon L = \int_{G\times V} \chi_\varepsilon(X, v)\,\Delta_u g(X, v, u^\varepsilon, u^0)\,dX\,dv + \tag{3.4}$$
$$+ \int_D \Delta_u L(X, v, t, u^\varepsilon, u^0, \psi_0)\,dD$$

$$\chi_\varepsilon(X, v) = B^*\tau_\varepsilon, \quad T_\varepsilon(\psi) = (\tau_\varepsilon, \psi)$$

Аналогично находится приращение $\Delta_\varepsilon \Phi$

$$\Delta_\varepsilon \Phi = \int\limits_{G\times V} \nu_\varepsilon (X, v)\, \Delta_u g (X, v, u^\varepsilon, u^0)\, dX\, dv + \tag{3.5}$$

$$+ \int\limits_{G\times V} \Delta_u \Phi (X, v, u^\varepsilon, u^0, \psi_0)\, dX\, dv$$

$$\nu_\varepsilon (X, v) = B^*{}_T \rho_\varepsilon, \qquad R_\varepsilon (\psi) = (\rho_\varepsilon, \psi)$$

4. Интегральные представления (3.4) и (3.5) позволяют вывести первые вариации функционалов L и Φ на любой импульсной варианте $u^\varepsilon (X, v)$, определенной соответствующими наборами

$$\{(X_i, v_i)\},\ \{u_{ik}\},\ \{\gamma^{ik}\}, \quad 1 \leqslant i \leqslant N, \quad 1 \leqslant k \leqslant M \tag{4.1}$$

Найдем сначала вариацию δL

$$\delta L = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon^6} \Delta_\varepsilon L = \lim_{\varepsilon\to 0} \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant k\leqslant M}} \gamma^{ik} \left\{ \frac{1}{|\Pi_{ik}{}^\varepsilon|} \int\limits_{\Pi_{ik}{}^\varepsilon (X_i, v_i)} \chi_\varepsilon (X, v) \right.$$

$$\Delta_u g (X, v, u^\varepsilon, u^0)\, dX\, dv +$$

$$\left. + \frac{1}{|\Pi_{ik}{}^\varepsilon|} \int\limits_{\Pi_{ik}{}^\varepsilon (X_i, v_i)} \int\limits_0^T \Delta_u L (X, v, t, u^\varepsilon, u^0, \psi_0)\, dD \right\} =$$

$$= \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant k\leqslant M}} \gamma^{ik} \lim_{\varepsilon\to 0} \{\lambda_{ik}{}^\varepsilon (X_i, v_i) + \mu_{ik}{}^\varepsilon (X_i, v_i, T)\}$$

Можно доказать, что почти всюду в $G \times V$ осуществляются следующие предельные переходы:

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \lambda_{ik}{}^\varepsilon (X, v) = \lambda_{ik}{}^0 (X, v) = \chi_0 (X, v)\, \Delta_u g (X, v, u_{ik}, u^0)$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \mu_{ik}{}^\varepsilon (X, v, T) = \mu_{ik}{}^0 (X, v, T) = \int\limits_0^T \Delta_u L (X, v, t, u_{ik}, u^0, \psi_0)\, dt \tag{4.2}$$

Таким образом, для любой пары чисел N и M и любого набора

$$u = \{u_{ik}\}, \ 1 \leqslant i \leqslant N, \ 1 \leqslant k \leqslant M$$

существует множество E_u^{NM}, $E_u^{NM} \subset G \times V$, имеющее полную меру в $G \times V$, и последовательность $\varepsilon_s^{uNM} \to 0$, $s \to \infty$ такие, что на произвольном наборе $\{(X_i, v_i\}$ из E_u^{NM} осуществимы предельные переходы (4.2). Поэтому, если некоторая варианта $u^\varepsilon (X, v)$ имеет определяющие наборы (4.1) и $\{(X_i, v_i)\} \subset E_u^{NM}$, то вариация δL на этой варианте имеет вид

$$\delta L = \sum_{\substack{1\leqslant i\leqslant N\\ 1\leqslant k\leqslant M}} \gamma^{ik} \left\{ \chi_0 (X_i, v_i)\, \Delta_u g (X_i, v_i, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i)) + \right.$$

$$\left. + \int\limits_0^T \Delta_u L (X_i, v_i, t, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i), \psi_0 (X_i, v_i, t))\, dt \right\}$$

Проводя обычно принятые рассуждения, можно вывести вариацию на более широком классе вариант, определяемом конечными наборами

$$\{(X_i, v_i)\}, \ u = \{u_{ik}\}, \ \gamma = \{\gamma^{ik}\}, \ u_{ik} \in \Omega_1, \ \gamma^{ik} \geqslant 0 \tag{4.3}$$

при $(X_i, v_i) \in E_L$ (Ω_1 — счетная, всюду плотная в Ω сеть векторов); получим вариацию в виде

$$(4.4) \qquad \delta L = \sum_{i,k} \gamma^{ik} \Big\{ \chi_0 (X_i, v_i) \Delta_u g (X_i, v_i, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i)) + + \int_0^T \Delta_u L (X_i, v_i, t, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i), \psi_0 (X_i, v_i, t)) \, dt \Big\}$$

Аналогично, для функционала $\Phi(u)$ можно ввести множество $E_\Phi \subset \subset G \times V$, $\operatorname{mes} E_\Phi = \operatorname{mes} (G \times V)$, такое, что на произвольной варианте $u^\varepsilon (X, v)$, определяемой конечными наборами (4.3) при $(X_i, v_i) \subset E_\Phi$, первая вариация $\delta\Phi$ имеет вид

$$(4.5) \qquad \delta\Phi = \sum_{i,k} \gamma^{ik} \{ \nu_0 (X_i, v_i) \Delta_u g (X_i, v_i, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i)) + + \Delta_u \Phi (X_i, v_i, u_{ik}, u^0 (X_i, v_i), \psi_0 (X_i, v_i, T)) \}$$

5. Получим с помощью формул (4.4) и (4.5) необходимые условия оптимальности в виде принципа минимума. Каждому набору параметров (4.3) при $(X_i, v_i) \in E = E_L \cap E_\Phi$ отвечает, в соответствии с (4.4), (4.5), определенная пара вариаций δL, $\delta\Phi$, которую можно рассматривать как вектор пространства E_2. Всей совокупности таких наборов отвечает множество K векторов $\{\delta L, \delta\Phi\}$. Исследование структуры множества $K \subset \subset E_2$ показывает, что K — выпуклый конус в E_2 с вершиной в начале координат, не пересекающийся с открытым отрицательным квадрантом $R = \{x_1, x_2 \colon x_1 < 0, x_2 < 0\}$. Отсюда следует, что выпуклые непересекающиеся конуса K и R разделяются в E_2 на некоторой прямой, определяемой вектором нормали $\mu = \{\mu_1, \mu_2\} \in E_2$, направленным в сторону конуса K, и скалярное произведение μ на любой вектор из K будет неотрицательным

$$(5.1) \qquad \mu_1 \delta L + \mu_2 \delta\Phi \geqslant 0$$

Это соотношение вместе с (4.4) и (4.5) дает возможность получить необходимые условия оптимальности в форме принципа минимума. Для этого необходимо создать конкретный набор параметров

$$(X_1, v_1), \ \{u_{11}\}, \ \{\gamma^{11} = 1\}$$
$$u_{11} \in \Omega_1, \quad (X_1, v_1) \in E, \quad E \subset G \times V$$

Вычисляя соответствующий набор вариаций и используя (5.1), получим необходимое условие оптимальности в форме принципа минимума.

Принцип минимума. Если $u^0 (X, v)$ — оптимальное управление, а $\Psi_0 (X, v, t)$ — соответствующее ему L_p-решение задачи (1.1), то существуют функции $\chi_0 (X, v)$ и $\nu_0 (X, v)$ из $L_q (G \times V)$, определяемые единственным образом операторными соотношениями

$$(5.2) \qquad \chi_0 (X, v) = B^* \tau_0, \qquad \nu_0 (X, v) = B_T^* \rho_0$$

и неотрицательные числа μ_1, μ_2 $(\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0)$ такие, что почти всюду в $G \times V$ выполняется соотношение

$$(5.3)\qquad \Lambda(X, v, t, u^0(X, v)) \equiv$$
$$\equiv \mu_1 \left\{\chi_0(X, v) g(X, v, u^0) + \int_0^T L(X, v, t, u^0, \Psi_0(X, v, t))\, dt\right\} +$$
$$+ \mu_2 \{\nu_0(X, v) g(X, v, u^0) + \Phi(X, v, u^0, \Psi_0(X, v, T))\} =$$
$$= \inf_{u \in \Omega} \Lambda(X, v, t, u(X, t))$$

Заметим, что функции $\nu_0(X, v)$, $\chi_0(X, v)$, определенные в (5.2), являются решениями некоторых сопряженных задач. Пусть $\varphi_1(X, v, t)$ решение следующей смешанной задачи:

$$(5.4)\qquad A^*\varphi_1 \equiv -\frac{\partial}{\partial t}\varphi_1(X, v, t) - (v, \nabla_x)\varphi_1(X, v, t) +$$
$$+ |v|\Sigma(X, v, t)\varphi_1 - \int_V |v| \{\Sigma_f(X, v, t)\nu_f(X, v) K_f(X, v, v') +$$
$$+ \Sigma_s(X, v, t) K_s(X, v, v')\}\varphi_1(X, v', t)\, dv' = \frac{\partial L(\eta_0)}{\partial z}$$
$$\varphi_1(X, v, t)|_{t=T-0} = 0$$
$$\varphi_1(X, v, t)|_{X \in S} = 0, \qquad (n(X)\cdot v) > 0$$

Тогда, как нетрудно видеть, $\chi_0(X, v) = \varphi_1(X, v, 0)$.

Аналогично, если $\varphi_2(X, v, t)$ — решение смешанной задачи

$$(5.5)\qquad A^*\varphi_2(X, v, t) = 0, \quad \varphi_2(X, v, t)|_{t=T-0} = \frac{\partial \Phi(\eta_0)}{\partial z}$$
$$\varphi_2(X, v, t)_{X \in S} = 0, \qquad (n(X)\cdot v) > 0$$

то

$$\nu_0(X, v) = \varphi_2(X, v, 0)$$

Заметим, далее, что $\chi_0(X, v)$ и $\nu_0(X, v)$ можно записать также в виде

$$\chi_0(X, v) = \int_D \frac{\partial L(\eta_0(t, Y, w))}{\partial z} G_0(0, X, v \mid t, Y, w)\, dD$$
$$\nu_0(X, v) = \int_{G\times V} \frac{\partial \Phi(\eta_0(T, Y, w))}{\partial z} G_0(0, X, v \mid T, Y, w)\, dY\, dw$$

Здесь $G_0(s, Y, w \mid t, X, v)$ — функция Грина смешанной задачи, соответствующая оптимальному управлению $u^0(X, v)$ и определенная следующим образом:

$$AG_0(s, Y, w \mid t, X, v) = 0 \quad (\text{по переменным } t, X, v)$$
$$A^*G_0(s, Y, w \mid t, X, v) = 0 \quad (\text{по переменным } s, Y, w)$$

причем $G_0(s, Y, w \mid t, X, v) \to \delta(Y - X)\,\delta(w - v)$ при $(t - s) \downarrow 0$ (считается, что $\Sigma_f(X, v, t)$, $\Sigma_s(X, v, t)$ и $\Sigma(X, v, t)$ тождественно обращаются в нуль вне G).

6. Аналогично рассматривается задача об управлении процессом переноса в случае, когда управляющая вектор-функция $u(X, v, t)$ входит в коэффициент поглощения $\Sigma(X, v, t, u)$ и источник $q(X, v, t, u)$, но не содержится в граничном условии задачи (1.1) (задача A).

Для задачи A поставим следующую оптимальную проблему: среди допустимых управлений $u(X, v, t)$ (т. е. $u(X, v, t)$, $(X, v, t) \in D$ — управляющая вектор-функция, измеримая и ограниченная в указанной области, принимающая значения из ограниченного множества $\Omega \subset E_m$), удовлетворяющих ограничению

$$N(u) = \int_D N(X, v, t, u(X, v, t), \psi_u(X, v, t))\, dD \leqslant 0$$

требуется найти управление, минимизирующее функционал

$$J(u) = \int_D F(X, v, t, u(X, v, t), \psi_u(X, v, t))\, dD$$

Пусть $N(X, v, t, u, z)$ и $F(X, v, t, u, z)$ удовлетворяют тем же условиям, что и $L(X, v, t, u, z)$ (см. п. 1). Пусть выполнены условия (1.4), а также, каково бы ни было допустимое управление $u(X, v, t)$

$$0 \leqslant |v|\, \Sigma(X, v, t, u(X, v, t)) \leqslant C_1$$

$$|q(X, v, t, u(X, v, t))| \leqslant B(X, v, t) \in L_p(D)|$$

Далее, пусть Σ и q непрерывны по u. Тогда имеет место следующий принцип минимума.

Принцип минимума. Если $u^0(X, v, t)$ — оптимальное управление, а $\psi_0(X, v, t)$ — соответствующее ему L_p-решение задачи A, то существуют функции $\alpha_0(X, v, t)$, $\beta_0(X, v, t)$ из $L_q(D)$, определяющиеся единственным образом операторными соотношениями

$$\alpha_0(X, v, t) = (A_0^{-1})^* \tau_0, \qquad \beta_0(X, v, t) = (A_0^{-1})^* \rho_0$$

и неотрицательные числа μ_1, μ_2 ($\mu_1^2 + \mu_2^2 \neq 0$), такие, что почти всюду на D выполняется соотношение

$$\begin{aligned} &\Lambda_A(X, v, t, u^0(X, v, t)) \equiv \mu_1 \{\alpha_0(X, v, t)\, [q(X, v, t, u^0) - \\ &-\Psi_0(X, v, t)\, |v|\, \Sigma(X, v, t, u^0)] + F(X, v, t, u^0, \Psi_0(X, v, t))\} + \\ &+ \mu_2 \{\beta_0(X, v, t)\, [q(X, v, t, u^0) - \psi_0(X, v, t)\, |v|\, \Sigma(X, v, t, u^0)] + \\ &+ N(X, v, t, u^0, \Psi_0(X, v, t))\} = \inf_{u \in \Omega} \Lambda_A(X, v, t, u(x, v, t)) \end{aligned}$$

Здесь τ_0 и ρ_0 — функционалы единственным образом определяемые функционалами I и N и оптимальной парой Ψ_0, u^0.

Пусть $G_0(s, Y, w \mid t, X, v)$ — функция Грина, соответствующая оптимальному управлению $u^0(X, v, t)$. Тогда

$$\alpha_0(X, v, t) = \int_t^T \int_{G \times V} \frac{\partial F(\eta_0(s, Y, w))}{\partial z} G_0(t, X, v \mid s, Y, w)\, dD$$

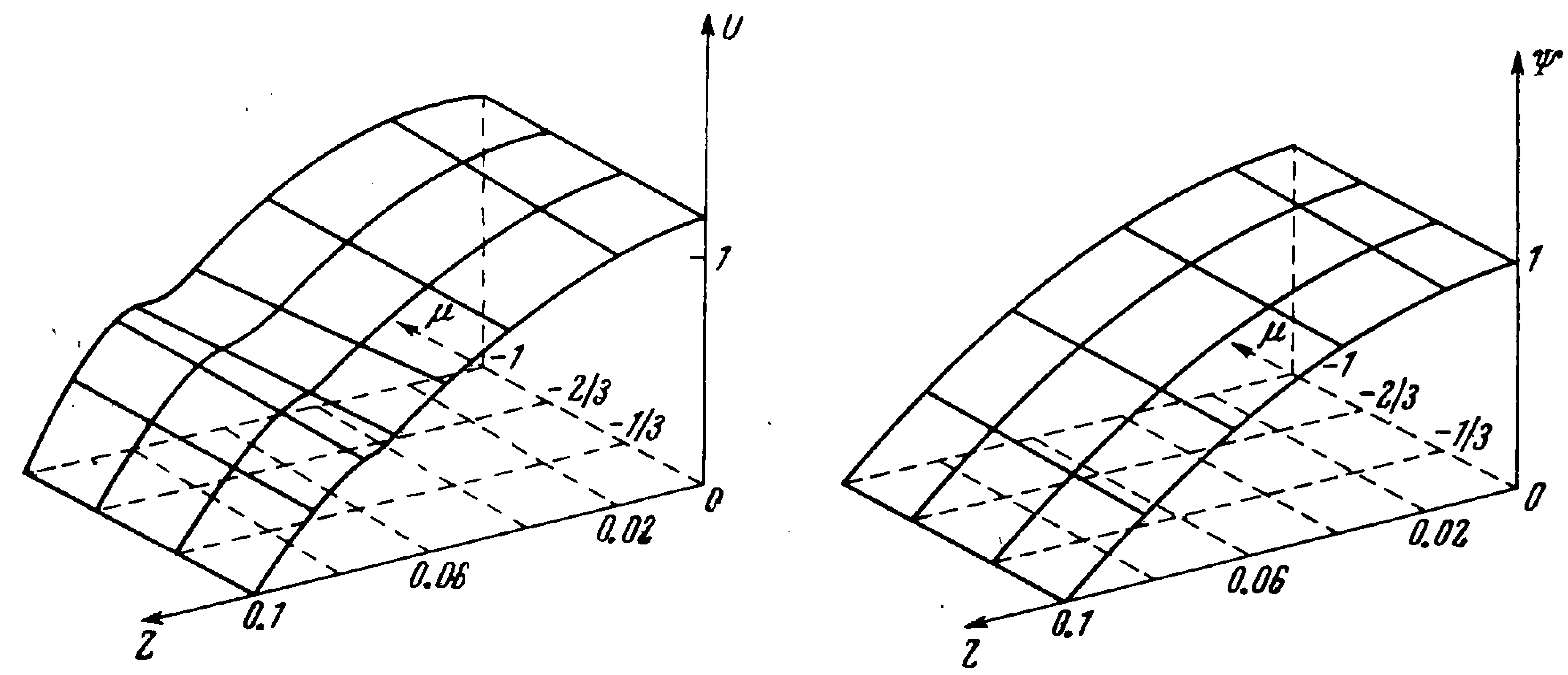
$$\beta_0(X, v, t) = \int_t^T \int_{G \times V} \frac{\partial N(\eta_0(s, Y, w))}{\partial z} G_0(t, X, v \mid s, Y, w)\, dD$$

Заметим, кроме этого, что $\alpha_0(X, v, t)$, $\beta_0(X, v, t)$ — решения сопряженных задач, аналогичных (5.5), (5.4).

Для вычисления функции Грина могут быть использованы методы, близкие к изложенным в [5,6].

Аналогичный принцип минимума можно рассмотреть для стационарных задач теории переноса.

7. Принципы минимума, полученные в п. 5 и 6, сводят задачу о нахождении оптимальных управлений к нахождению минимумов соответствующих функционалов и приближенным методам решения уравнения переноса. С целью решения вычислительных задач можно использовать методы, описанные в [7–11].



Фиг. 1

В качестве примера рассмотрим следующую задачу, связанную с уравнением переноса:

$$\frac{\partial}{\partial t}\psi_u(z,\mu,t)+\mu\frac{\partial}{\partial z}\psi_u(z,\mu,t)+\sigma\psi_u=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}\psi_u(z,\mu',t)\,d\mu' \tag{7.1}$$

$$\psi_u(z,\mu,t)|_{t=+0}=g(z,\mu)\equiv u(z,\mu)$$

$$\psi_u(0,\mu,t)=0,\ \ \mu>0;\ \ \psi_u(a,\mu,t)=0,\ \ \mu<0$$

Пусть задана функция $\chi(z,\mu)\in L_2\{(0,a)\times(-1,1)\}$. Требуется найти такое допустимое управление $u(z,\mu)$, чтобы обобщенное L_2-решение задачи (7.1) минимизировало функционал

$$\Phi(u)=\int_{-1}^{+1}\int_{0}^{a}|\psi_u(z,\mu,T)-\chi(z,\mu)|^2\,dz\,d\mu$$

Используя формулу (5.3), запишем необходимые условия оптимальности управления в форме принципа минимума

$$\nu_0(z,\mu)\,u^0(z,\mu)+\Phi(z,\mu,u^0(z,\mu),\psi_0(z,\mu,T))=$$
$$=\inf_{u\in\Omega}\{\nu_0(z,\mu)\,u+\Phi(z,\mu,u,\psi_0(z,\mu,T))\}$$

Таким образом, необходимо найти управление $u(z,\mu)$, минимизирующее функционал

$$I(u)=\nu_0(z,\mu)\,u(z,\mu)+\Phi(u,\Psi_u(z,\mu,T))$$

При этом $\nu_0(z,\mu)$ — решение некоторой сопряженной задачи, аналогичной задаче (5.5). Именно, если $\varphi_u(z,\mu,t)$ — обобщенное L_2-решение задачи

$$-\frac{\partial\varphi_u(z,\mu,t)}{\partial t}-\mu\frac{\partial\varphi_u(z,\mu,t)}{\partial z}+\sigma\varphi_u=\frac{c}{2}\int_{-1}^{+1}\varphi_u(z,\mu',t)\,d\mu' \tag{7.2}$$

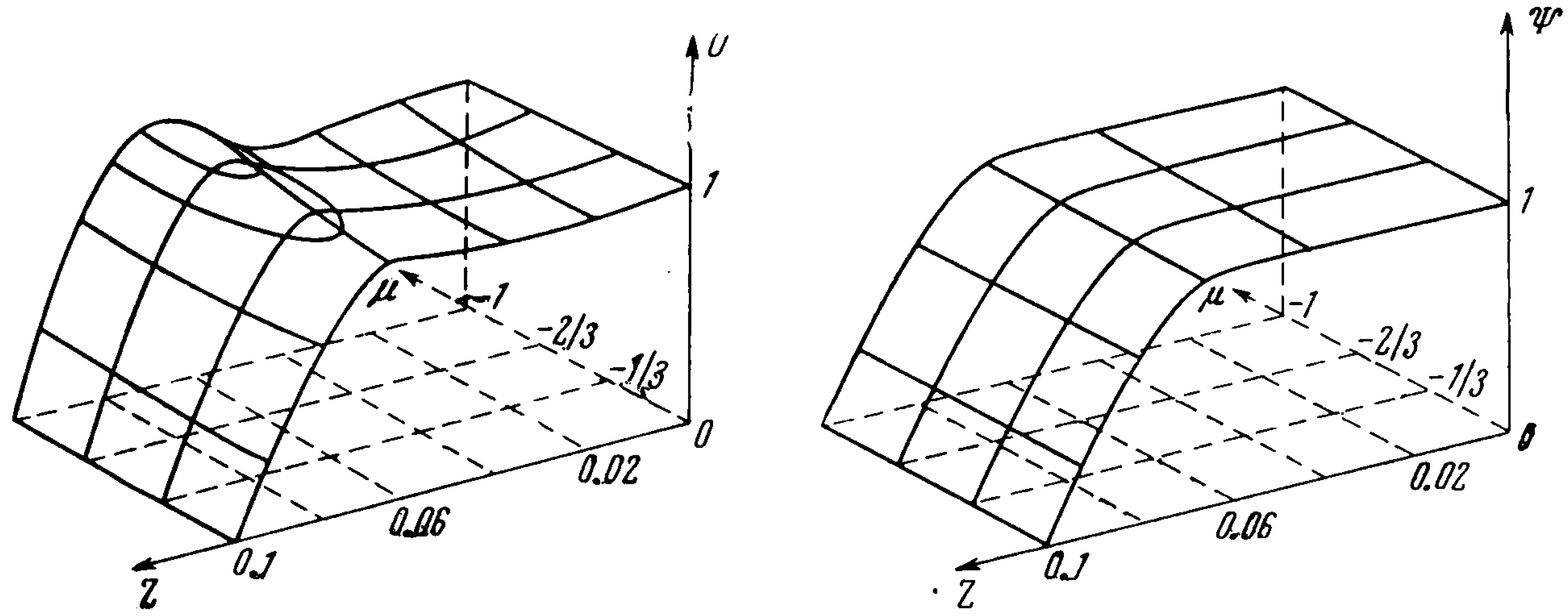
$$\varphi_u(z,\mu,t)|_{t=T-0}=2\{\psi_u(z,\mu,T)-\chi(z,\mu)\}$$

$$\varphi_u(0,\mu,t)=0,\ \ \mu<0;\ \ \varphi_u(a,\mu,t)=0,\ \ \mu>0$$

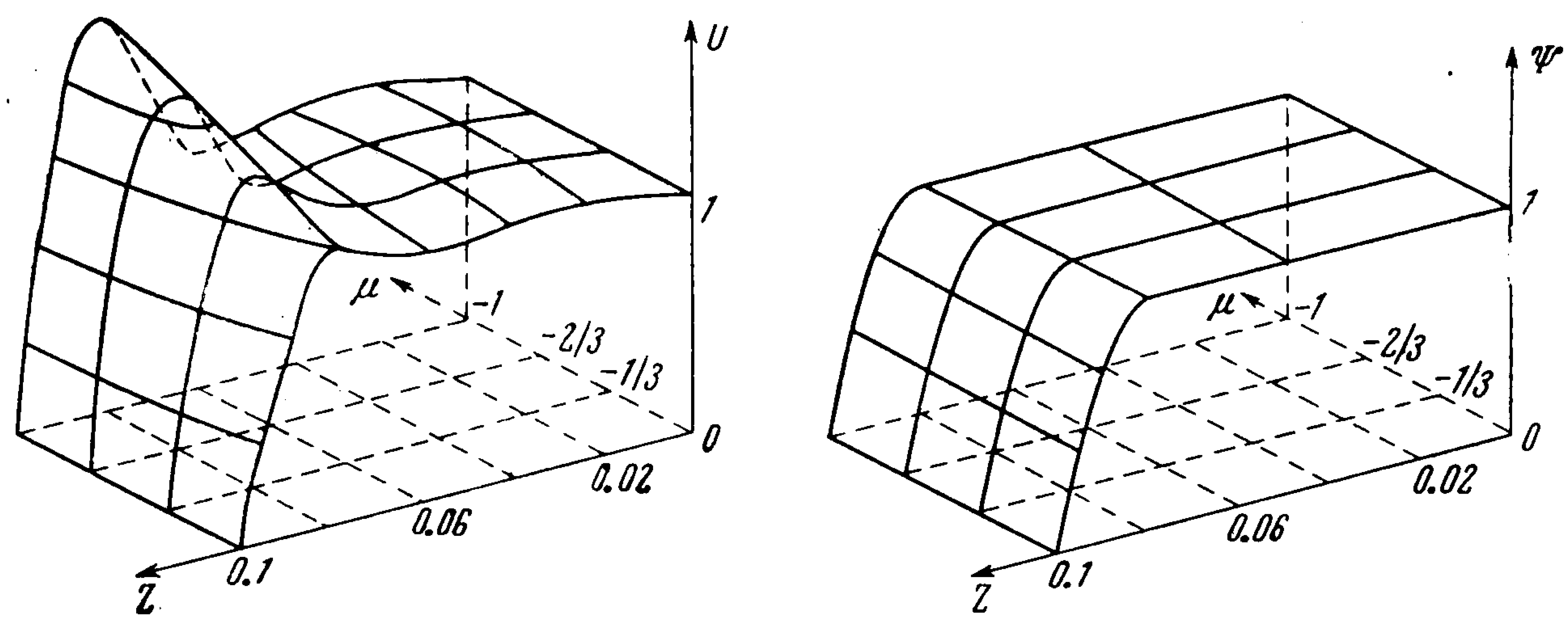
то

$$\nu_0(z, \mu) = \varphi_0(z, \mu, 0)$$

Заметим, что в данном примере управляющая функция $u(z, \mu)$ не подчинена, вообще говоря, никаким ограничениям, $\Phi(u)$ не зависит явно от управления $u(z, \mu)$. Поэтому функционал $I(u)$ — линейная функция управления $u(z, \mu)$ и достигает минимума только для $\nu_0(z, \mu) = 0$ или, что то же самое, $\varphi_0(z, \mu, 0) = 0$. Из последнего с помощью (7.2) находим: $\psi_0(z, \mu, T) = \chi(z, \mu)$. Последнее соотношение и определяет фак-



Фиг. 2



Фиг. 3

тически оптимальное управление $u^0(z, \mu)$; таким управлением может быть любое управление, обладающее тем свойством, что соответствующее ему решение в момент $t = T$ удовлетворяет условию $\psi_u(z, \mu, T) = \chi(z, \mu)$.

На приведенных здесь графиках изображены управления, соответствующие разным эталонам $\chi(z, \mu)$, и решения задачи (7.1) в момент $t = T$, полученные по вычисленным управлениям, что полностью согласуется с приведенными рассуждениями. Фиг. 1—3 соответствуют эталонам

$$\chi_1(z, \mu) = \begin{cases} \cos \dfrac{\pi}{0.2} z, & z \in [0, 0.1], \quad \mu < 0 \\ \sin \dfrac{\pi}{0.2} z, & z \in [0, 0.1], \quad \mu > 0 \end{cases}$$

$$\chi_2(z, \mu) = \begin{cases} 1, & z \in [0, 0.08], \quad \mu < 0 \\ \cos \dfrac{\pi}{0.04}(z - 0.08) & z \in [0.08, 0.1], \quad \mu < 0 \\ 1, & z \in [0.02, 0.1], \quad \mu > 0 \\ \sin \dfrac{\pi}{0.04} z, & z \in [0, 0.02], \quad \mu > 0 \end{cases}$$

$$\chi_3(z,\mu)=\begin{cases} 1, & z\in[0,\,0.09], \quad \mu<0 \\ \cos\frac{\pi}{0.02}(z-0.09) & z\in[0.09,0.1], \quad \mu<0 \\ 1, & z\in[0.01,0.1], \quad \mu>0 \\ \sin\frac{\pi}{0.02}z, & z\in[0,0.01], \quad \mu>0 \end{cases}$$

Уравнение переноса приближенно решалось по методу [10], функционал минимизировался покоординатным спуском [12].

Поступила 16 XI 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. *Плотников В. И.* Необходимые условия оптимальности для управляемых систем общего вида. Докл. АН СССР, 1971, т. 199, № 2.
2. *Латтес Р., Лионс Ж.-Л.* Метод квазиобращения и его приложения. М., «Мир», 1970.
3. *Рудик А. П.* Ядерные реакторы и принцип максимума Понтрягина. М., Атомиздат, 1971.
4. *Кузнецов Ю. А., Морозов С. Ф.* Корректность постановки смешанной задачи для нестационарного уравнения переноса. Дифференциальные уравнения, 1972, т. 8, № 9.
5. *Case K. M., Zelazny R., Kanal M.* Spherically symmetric boundary-value problem in one speed transport theory. J. Math. Phys., 1970, Bd 1, Nr 1.
6. *Kanal M.* Boundary-value problems of linear transport theory — Green's function approach. J. Math. Phys., 1970, Bd 11, Nr 10.
7. *Марчук Г. И.* Численные методы расчета ядерных реакторов. М., Атомиздат, 1958.
8. *Владимиров В. С.* Численное решение кинетического уравнения для сферы. Вычислительная математика. М., Изд-во АН СССР, 1958, стр. 3—33.
9. *Моисеев Н. И.* Численные методы в теории оптимальных систем. М., «Наука», 1971.
10. *Рихтмайер Р., Мортон К.* Разностные методы решения краевых задач. М., «Мир», 1972.
11. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Приближенные методы решения экстремальных задач. Изд-во ЛГУ, 1969.
12. *Ланс Дж. Н.* Численные методы для быстродействующих вычислительных машин. М., Изд-во иностр. лит., 1962.