Прикладная математика и механика. Том 38, 1974

УДК 533.6.011.8

О СИЛАХ НА ТЕЛА В ГАЗЕ, ОБУСЛОВЛЕННЫХ БАРНЕТТОВСКИМИ НАПРЯЖЕНИЯМИ

В. С. Галкин, О. Г. Фридлендер

(Москва)

Доказываются некоторые утверждения о силах, действующих на равномерно нагретые тела в газе. Показано, что нагретые до разной температуры тела взаимно отталкиваются, а нагретое и охлажденное тела притягиваются. Указан новый вид термофореза. Эти явления обусловлены барнеттовскими температурными напряжениями. Установлены аналогичные эффекты, вызываемые концентрационными напряжениями в смесях газов.

1. Основные соотношения. При описании медленных (характерное число Рейнольдса $R \approx 1$, число $M \ll 1$) течений газа в существенно неоднородном температурном поле, т. е. при характерных относительных перепадах температуры $\tau_* \approx 1$, необходимо учитывать барнеттовские температурные напряжения

$$p_{ij}^{(T)} = \alpha_1 \left[\frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j}\right] + \alpha_2 \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j}\right] \tag{1.1}$$

$$\Omega = \int \eta \, dT, \ [A_{ij}] = {}^1/_2 (A_{ij} + A_{ji}) - {}^1/_3 \delta_{ij} A_{kk}, \quad \alpha_{1,2} = \alpha_{1,2}(T)$$

ибо они — основного порядка величины [1-4]. Формула (1.1) и приводимые ниже уравнения сохранения для таких течений записаны в следующих безразмерных переменных: температура, коэффициенты теплопроводности и вязкости, плотность, декартовы координаты, температурные напряжения, скорость, давление, действующие на тело сила и момент сил равны соответственно

$$T_* T, \ \eta_* \eta(T), \quad \mu_* \mu(T), \quad \rho_* \rho \tag{1.2}$$

$$L(x_1, x_2, x_3) \equiv L(x, y, z), \qquad \frac{\mu_*^2}{\rho_* L^2} p_{ij}^{(T)}, \quad \frac{\mu_*}{\rho_* L} \mathbf{v}$$

$$1 + \frac{\mu_*}{\rho_* L}\left(\frac{k}{m} T_*\right)^{-1/2} p, \quad \frac{\mu_*^2}{\rho_*} \mathbf{F}, \quad \frac{\mu_*^2 L}{\rho_*} \mathbf{M}$$

Здесь L — характерный размер, k / m — газовая постоянная. Если не делается специальных оговорок, то характерные значения равны соответствующим параметрам газа в невозмущенном потоке ($T_* = T_\infty$ и т. д.). Пусть также $\varkappa$, P — отношение удельных теплоемкостей и число Прандтля при $T = 1$.

Исключая ρ при помощи уравнения состояния $\rho = 1 / T$, аналогично [2] приведем уравнения неразрывности, энергии и импульса для стационарных условий в отсутствие внешних сил к виду

$$\nabla \mathbf{v} = \mathbf{v} \cdot \nabla \ln T \tag{1.3}$$

$$E\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T = \Delta\Omega, \qquad E = {}^5/_2 (\varkappa - 1)\, P / \varkappa \tag{1.4}$$

$$\begin{gathered} T^{-1} (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} + \nabla \Pi = \\ = \Pi^{(1)} + Y_T (\nabla T)^2 \nabla T + E (\alpha_1^{\cdot} - \alpha_2 / \eta) (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) \nabla T \\ \Pi_i^{(1)} = \frac{\partial}{\partial x_j} \mu \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right), \qquad A^{\cdot} = \frac{dA}{dT} \end{gathered} \tag{1.5}$$

$$\Pi = p + X_T (\nabla T)^2 + {}^2/_3 (E\alpha_1 + \mu) (\mathbf{v} \cdot \nabla \ln T) \tag{1.6}$$

$$X_T = {}^1/_2\, \alpha_1^{\cdot} \eta + {}^1/_6\, \alpha_2, \qquad Y_T = {}^1/_2 (\alpha_1^{\cdot\cdot} \eta > \alpha_2^{\cdot} > \alpha_1^{\cdot} \eta^{\cdot} + 2\alpha_2 \eta^{\cdot} / \eta) \tag{1.7}$$

Если $\mu = \eta = T^s$, то [2]

$$\begin{gathered} \alpha_1 = \omega_1 T^s, \ \alpha_2 = - \omega_3 T^{2s-1}, \ \omega_1 > 0, \ \omega_3 > 0 \\ X_T = {}^1/_2 (\omega_1 s - \omega_3 / 3)\ T^{2s-1}, \quad Y_T = -{}^1/_2 (\omega_1 s + \omega_3)\ T^{2s-2} \end{gathered} \tag{1.8}$$

Именно для этого случая известна структура барнеттовских коэффициентов [5]. В первом приближении по полиномам Сонина $\omega_1 = 3$, $\omega_3 = 0$, что является точным для максвелловских молекул ($s = 1$). Это приближение дает очень хорошие результаты для μ, η простого газа, однако для барнеттовских коэффициентов оно недостаточно; в случае молекул — упругих сфер ($s = {}^1/_2$) приходится использовать четыре приближения по полиномам Сонина, тогда $\omega_1 = 2.418$, $\omega_3 = 0.990$. При $\tau_* \ll 1$ скорости термострессовой конвекции [2] $v \sim Y_T \tau_*^3$. Отношение значений Y_T для упругих сфер, рассчитанных в первом и четвертом приближении по полиномам Сонина

$$Y_T^{(1)} / Y_T^{(4)} = {}^3/_2 / ({}^1/_2 \cdot 2.418 + 0.990) = 0.68$$

Следовательно, первое приближение по полиномам Сонина — и эквивалентные ему результаты метода Грэда — может давать большие ошибки, особенно в случае смеси газов.

Граничные условия для системы (1.3) — (1.7) отличаются от обычно используемых при решении уравнений Навье — Стокса только условием для касательной составляющей скорости на теле $v_\tau = \beta\mu\partial T_w / \partial x_\tau$, где коэффициент $\beta = \mathrm{const}$ для данного газа и материала стенки, v_τ называют скоростью температурного скольжения.

Ниже в основном рассматривается случай «равномерно нагретого» тела, когда температура поверхности тела всюду одинакова ($T_w = \mathrm{const}$). Тогда на поверхности тела S имеем $\mathbf{v} = 0$, $\Delta\mathbf{v} = 0$, $T = T_w$

$$\Delta\Omega = 0 \tag{1.9}$$

а полный тензор напряжений на S, т. е. тензор местных напряжений

$$P_{ij} = p\delta_{ij} - 2\mu_w \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) + \alpha_{1w} \frac{\partial^2 \Omega}{\partial x_i \partial x_j} + \alpha_{2w} \left[\frac{\partial T}{\partial x_i} \frac{\partial T}{\partial x_j} \right] \tag{1.10}$$

Здесь $\mu_w = \mu(T_w)$ и т. д.

Интегралы по S от P_{ij} дают $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$. Обозначим соответствующие интегралы от местных температурных напряжений, т. е. от последних двух членов выражения (1.10), через $\mathbf{F}^{(T)}$, $\mathbf{M}^{(T)}$. Пусть также $\mathbf{n}$ — внешняя нормаль, $\mathbf{r}$ — радиус-вектор, $\mathbf{e}_x$ — единичный вектор вдоль произвольно выбранной оси x.

Лемма 1. При $T_w = \text{const}$ имеем

$$F_x^{(T)} = -\frac{2}{3}\alpha_{2w}\int (\nabla T)^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS \tag{1.11}$$

$$M_x^{(T)} = -\frac{2}{3}\alpha_{2w}\int (\nabla T)^2 [y(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_z) - z(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_y)]\, dS \tag{1.12}$$

Действительно

$$F_x^{(T)} = -\int\limits_S p_{kx}^{(T)} (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\, dS = \frac{1}{3}\alpha_{2w}\int (\nabla T)^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS - \tag{1.13}$$
$$- \alpha_{1w} I_1 - \alpha_{2w} I_2$$

Учитывая (1.9), предполагая выполненными необходимые условия непрерывности и интегрируемости функций, получим

$$I_1 = \int \frac{\partial^2\Omega}{\partial x_k \partial x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\, dS = \int \frac{\partial^2\Omega}{\partial x^2} dy\, dz + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\, \partial y} dx\, dz + \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\, \partial z} dx\, dy = \tag{1.14}$$
$$= \int\left(-\frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} - \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2}\right) dy\, dz + \int\limits_{z_1}^{z_2}\left(\oint \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\, \partial y} dx\right) dz + \int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\oint \frac{\partial^2\Omega}{\partial x\, \partial z} dx\right) dy =$$
$$= -\int\limits_{z_1}^{z_2}\left(\oint \frac{\partial^2\Omega}{\partial y^2} dy\right) dz - \int\limits_{y_1}^{y_2}\left(\oint \frac{\partial^2\Omega}{\partial z^2} dz\right) dy = 0$$

$$I_2 = \int \frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial T}{\partial x}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\, dS = \int \left(\frac{\partial T}{\partial x}\right)^2 dy\, dz + \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial y} dx\, dz + \tag{1.15}$$
$$+ \frac{\partial T}{\partial x}\frac{\partial T}{\partial z} dx\, dy = \int (\nabla T)^2 dy\, dz - \int \left[\left(\frac{\partial T}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial T}{\partial z}\right)^2\right] dy\, dz +$$
$$+ \int \left(\frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial T}{\partial y} - T_w \frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial y}\right) dx\, dz + \int \left(\frac{\partial}{\partial x} T \frac{\partial T}{\partial z} - T_w \frac{\partial^2 T}{\partial x\, \partial z}\right) dx\, dy$$

Аналогично (1.14) показываем, что все интегралы в (1.15) равны нулю, кроме первого, т. е.

$$I_2 = \int (\nabla T)^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS \tag{1.16}$$

Используя (1.14), (1.16) в (1.13), найдем искомое выражение (1.11). Теперь

$$M_x^{(T)} = -\int [y p_{zk}^{(T)} - z p_{yk}^{(T)}] (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_k)\, dS \tag{1.17}$$

Проводя операции, аналогичные использованным при выводе (1.11), а также интегрирование по частям, получим (1.12).

Заметим, что в случае максвелловских молекул $\alpha_2 = 0$, т. е. в этом случае местные температурные напряжения вклада в силу и момент не дают.

Подчеркнем также, что лемма 1 справедлива для произвольной конечной системы тел.

В дальнейшем под единичным телом будем понимать тело конечных размеров, помещенное в бесконечный объем газа, в котором отсутствуют другие тела.

Лемма 2. Пусть в окружающем единичное тело газе

$$\partial P_{ij} / \partial x_j = 0; \quad P_{ij} = o(r^{-2}), \quad r \to \infty \tag{1.18}$$

Тогда $\mathbf{F} = 0$.

Действительно, применяя теорему Гаусса — Остроградского, имеем

$$F_x = -\int P_{xj}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_j)\,dS = \int\limits_V \frac{\partial P_{xj}}{\partial x_j}\,dV - \int\limits_\Sigma P_{xj}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_j)\,d\Sigma$$

где Σ — сферическая поверхность радиуса R. Первый интеграл здесь равен нулю в силу первого условия (1.18), второй стремится к нулю при $R \to \infty$ в силу второго условия (1.18). Так как ось x произвольна, то $\mathbf{F} = 0$.

2. Первое приближение по τ_*. Пусть $\tau_* \ll 1$. Если набегающий поток отсутствует, а $T_w = \mathrm{const}$, то около тела в общем случае возникает термострессовая конвекция, обусловленная температурными напряжениями [1–3]. При этом $v \sim \tau_*^3$, изменения давления $p \sim \tau_*^2$, т. е. в первом приближении по τ_* газ покоится, $p = 0$. Если же движение вызвано другими причинами, то характерное значение скорости будет другим. Именно, $v \sim \tau_*$, если $v_\infty \sim \tau_*$ или перепад температуры по телу порядка τ_* (слабое температурное скольжение), тогда барнеттовские члены уравнения импульса пренебрежимо малы. Однако во всех перечисленных случаях местные температурные напряжения основного порядка величины, т. е.

$$p_{ij}^{(T)} = \alpha_1 \eta \frac{\partial^2 T}{\partial x_i \partial x_j} \sim \tau_* \tag{2.1}$$

причем

$$\Delta T = 0 \tag{2.2}$$

и они могли бы давать вклад в $\mathbf{F}$ и $\mathbf{M}$.

Однако в первом приближении по τ_* $\mathbf{F}^{(T)}$ и $\mathbf{M}^{(T)}$ равны нулю. Это утверждение следует из леммы 1, если учесть, что в рассматриваемом приближении вместо условия на S (1.9) всюду в газе выполняется уравнение (2.2).

Итак, при $T_w = \mathrm{const}$ в первом приближении по τ_* сила и момент сил, действующие на отдельное тело конечных размеров из конечной системы таких тел, равны нулю. Сформулированное положение можно назвать обобщенной теоремой Максвелла.

В самом деле, вопрос о влиянии температурных напряжений в покоящемся газе впервые рассматривался Максвеллом. В его работе [6] имеется утверждение о силе, аналогичное только что доказанному. Эпштейн [7] доказал его для единичного тела [1]. Это ограничение понадобилось, чтобы использовать теорему Гаусса — Остроградского и перейти к рассмотрению асимптотики p_{ij}^T при $r \to \infty$. Здесь доказательство упроще- о, распространено на момент сил и обобщено на случай системы тел.

н **3. Электростатическая аналогия.** При $T_w = \mathrm{const}$ во втором приближении по τ_* газ покоится, но

$$p = -X_T (\nabla\tau)^2, \qquad \tau = T - 1 \tag{3.1}$$

---

[1] Работа [7] была неизвестна авторам, и в статье [1] было приведено доказательство, повторяющее доказательство Эпштейна. Однако было доказано аналогичное утверждение о моменте сил, отсутствующее в [7].

с относительной погрешностью τ_*, причем для τ имеем

(3.2) $$\Delta\tau = 0, \quad \tau\,|_{S_i} = \tau_i, \quad \tau\,(r \to \infty) \to 0$$

где S_i — поверхность i-го тела из конечной системы тел.

Выражение (3.1) следует из соотношений (1.5), (1.6). Учитывая (3.1) и (1.11), найдем

(3.3) $$F_x = k_T \int\limits_S (\nabla\tau)^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS, \quad k_T = X_{Tw} - \frac{2}{3}\alpha_{2w}$$

и аналогичное выражение для M_x.

При $\mu = \eta = T^s$ имеем $k_T = {}^1/_2\,(s\omega_1 + \omega_3) > 0$.

Важно заметить, что соотношения (3.2) совпадают с таковыми для потенциала электростатического поля в вакууме вне проводников и что (3.3) пропорциональна пондеромоторной силе, действующей на проводник в электростатическом поле (см., например, [8]).

Таким образом, установлена электростатическая аналогия: между равномерно нагретыми (охлажденными) телами с $\tau_i \neq 0$ действуют силы, которые могут быть рассчитаны обычными для электростатики методами.

Так, между двумя сферическими частицами с относительными температурами τ_1, τ_2 действует сила, асимптотически ($R \to \infty$) равная

$$F = k_T 8\pi\tau_1\tau_2 r_1 r_2 R^{-2}$$

Здесь r_1, r_2 — радиусы частиц, а R — расстояние между ними. Если $\operatorname{sign}\tau_1 = \operatorname{sign}\tau_2$, частицы отталкиваются, если $\operatorname{sign}\tau_1 = -\operatorname{sign}\tau_2$, они притягиваются одна к другой (закон Кулона в электростатике). В частности, тело, температура которого не равна температуре плоского экрана, осаждается на него.

В приближении τ_*^2 на единичное тело не действует никакая сила. Это следует как из аналогии, так и из леммы 2 и соотношений (3.2).

4. Термофоретическая сила. Рассмотрим одну из задач в приближении п.3. Пусть в бесконечный объем газа помещена сферическая равномерно нагретая частица, радиус которой $L = 1$. Выберем $T_* = T_w$ и введем τ формулой $T = 1 + \tau$. Предполагаем, что вдоль полярной оси в газе задан градиент температуры

(4.1) $$\tau\,(r \to \infty) \to Br\cos\theta + D$$

на теле $\tau\,(r = 1) = 0$. Здесь B, $D \sim \tau_* \ll 1$. Уравнение $\Delta\tau = 0$ будет иметь решение

(4.2) $$\tau = B\,(r - r^2)\cos\theta + D\,(1 - r^{-1})$$

т. е. на теле $\nabla\tau = 3B\cos\theta + D$ и (3.3) примет вид

(4.3) $$F_x = k_T 8\pi BD$$

Действующая на частицу сила не зависит от размера тела и отлична от нуля, если $D \neq 0$ (если $T_\infty \neq 1$ при $B = 0$). Когда тело нагрето ($D < 0$), сила направлена противоположно заданному ∇T, охлаждено ($D > 0$) — по ∇T.

Пусть $C_F = F_x (\mu_* / L\rho_* a_*)^2$, где a_* — скорость звука. Тогда из (4.3) следует

(4.4) $$C_F \sim \mathrm{Kn}^2 \tau_*^2$$

Рассмотренное явление — новая разновидность термофореза, обусловленная температурными напряжениями в газе при малом, но фиксированном отличии температуры тела от местной температуры газа и числе Кнудсена $\mathrm{Kn} \to 0$.

Явление классического термофореза имеет место в случае частицы с конечным коэффициентом теплопроводности η_b, тогда при наличии $\nabla T|_\infty$ температура $T_w \neq \mathrm{const}$, на стенке возникает температурное скольжение, которое вызывает движение газа; соответствующее значение

(4.5) $$C_F \sim -\mathrm{Kn}^2 B\eta / \eta_b \sim -\mathrm{Kn}^2 \tau_* \eta / \eta_b$$

Для металлических частиц $\eta_b \gg \eta$, и (4.5) может быть даже меньше (4.4), если частица перегрета или переохлаждена.

Другой предельный случай (Kn мало, но фиксировано, $\tau_* \to 0$, $T_w = \mathrm{const}$) рассмотрен в работе [9]. Температурными напряжениями в уравнениях пренебрегалось, однако они учитывались в граничных условиях скольжения второго порядка наряду со скольжением второго порядка из-за скачка температуры. В литературе иногда учитывался второй эффект, но в [9] показано, что определяющим является первый эффект: именно он определяет знак силы

(4.6) $$C_F \sim \mathrm{Kn}^3 B \sim \mathrm{Kn}^3 \tau_*$$

Такой же результат получается для абсолютно теплопроводного тела из работы [10].

Из выражений (4.4) — (4.6) следует, что в зависимости от внешних условий и свойств частиц преобладающими могут быть разные виды термофореза. В ансамблях нагретых (или охлажденных) частиц определяющим может быть эффект п.3.

5. Условия покоя около слабо деформированной сферы. Как показано в п. 3, в приближении τ_*^2 действующая на единичное тело сила равна нулю. Вопрос об этой силе для произвольных τ_* остается открытым. Показать в общем виде, существует она или нет, не удалось. Естественно было попытаться рассмотреть простые предельные случаи. Первый рассмотрен ($\tau_* \ll 1$), перейдем ко второму: слабо деформированная равномерно нагретая сфера, величина τ_* произвольна. Как и выше, будем предполагать, что разложения по малому параметру правомерны, все получающиеся системы уравнений имеют единственные решения, выполняются нужные свойства гладкости функций.

Пусть относительная величина деформации сферы ε мала.

Будем искать решение в сферической системе координат в виде

$$T = T_0(r) + \varepsilon T_1(r, \theta, \varphi) + \ldots, \quad \mathrm{v} = \varepsilon \mathrm{v}_1(r, \theta, \varphi) + \varepsilon^2 \mathrm{v}_2(r, \theta, \varphi) + \ldots$$

$$\Pi = \Pi_0(r) + \varepsilon \Pi_1(r, \theta, \varphi) + \ldots, \quad F = \varepsilon F_1 + \varepsilon^2 F_2 + \ldots$$

Здесь T_0, Π_0 — решения задачи о равномерно нагретой сфере ($\varepsilon = 0$), когда газ покоится, T_0 — решение уравнения Лапласа (1.9), температурные напряжения уравновешиваются давлением, сила отсутствует [1, 2]. Цель данного пункта — показать, что не при всех видах деформации $\mathrm{v}_1 \neq 0$.

Именно, покажем следующее; $\mathbf{v}_1 \equiv 0$ тогда и только тогда, когда

$$T_1 = \eta_0^{-1}\,[T_{10}^{(0)}(r) + r^{-2}\,Y_1(\theta, \varphi)], \quad \eta_0 = \eta\,(T_0) \tag{5.1}$$

Здесь $T_{10}^{(0)}$ — произвольная функция r, $Y_1(\theta, \varphi)$ — первая сферическая поверхностная гармоника. Назовем это утверждение леммой 3.

Как показано в [1], условием покоя газа около равномерно нагретого тела является

$$\frac{\partial T}{\partial x_i}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k\,\partial x_j} - \frac{\partial T}{\partial x_j}\frac{\partial T}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T}{\partial x_k\,\partial x_i} = 0 \tag{5.2}$$

Это условие в случае односвязных тел конечных размеров выполняется лишь для сферы. Получается оно перекрестным дифференцированием уравнения (1.5) при $\mathbf{v} \equiv 0$. Ясно, что приближенно оно может выполняться и для других тел, если пренебрегать величинами $O(\varepsilon^2)$ и выше. Тогда $\mathbf{v} \leqslant O(\varepsilon^2)$.

Условие покоя в линейном по ε приближении запишется так:

$$\begin{gathered}\frac{\partial T_0}{\partial x_i}\frac{\partial T_0}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_k\,\partial x_j} + \frac{\partial T_0}{\partial x_i}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_k\,\partial x_j} + \frac{\partial T_1}{\partial x_i}\frac{\partial T_0}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_k\,\partial x_j} - \\ - \frac{\partial T_0}{\partial x_j}\frac{\partial T_0}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_1}{\partial x_k\,\partial x_i} - \frac{\partial T_0}{\partial x_j}\frac{\partial T_1}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_k\,\partial x_i} - \frac{\partial T_1}{\partial x_j}\frac{\partial T_0}{\partial x_k}\frac{\partial^2 T_0}{\partial x_k\,\partial x_i} = 0\end{gathered} \tag{5.3}$$

Используя здесь соотношение $x_k\partial / \partial x_k = r\partial / \partial r$

$$T_0 = T_0(r), \quad \eta_0 T_0'' + \eta_0^{\bullet}(T_0')^2 = -(2/r)\,\eta_0 T_0' \tag{5.4}$$

вводя обозначения

$$T_{10} = \eta_0 T_1, \quad (\ \ )' = d(\ \ )/dr \tag{5.5}$$

$$Q_{ij}(u) = x_i\frac{\partial u}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial u}{\partial x_i}$$

причем, как нетрудно проверить

$$x_k\frac{\partial}{\partial x_k}Q_{ij}(T) = x_k\left(x_i\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\,\partial x_k} - x_j\frac{\partial^2 T}{\partial x_j\,\partial x_k}\right) + Q_{ij}(T) \tag{5.6}$$

$$Q_{ij}(\eta_0 T_1) = \eta_0 Q_{ij}(T_1)$$

приведем (5.3) к виду

$$\frac{\partial}{\partial r}Q_{ij}(T_{10}) + \frac{2}{r}Q_{ij}(T_{10}) = 0 \tag{5.7}$$

Интегрируя (5.7), получим

$$Q_{ij}(T_{10}) \equiv x_i\frac{\partial T_{10}}{\partial x_j} - x_j\frac{\partial T_{10}}{\partial x_i} = f_{ij}(\theta, \varphi)\,r^{-2} \tag{5.8}$$

где f_{ij} — произвольные функции θ, φ. Равенства (5.8) существенны только при $i \neq j$ (при $i = j$ условий на T_{10} нет); поэтому (5.8) приводится к

$$\mathbf{r} \times \nabla T_{10} = \mathbf{f}(\theta, \varphi)\,r^{-2} \tag{5.9}$$

или

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial T_{10}}{\partial \varphi} = f_1(\theta, \varphi)\,r^{-2}, \qquad \frac{\partial T_{10}}{\partial \theta} = f_2(\theta, \varphi)\,r^{-2} \tag{5.10}$$

Из (5.10) следует, что

$$T_{10} = T_{10}^{(0)}(r) + r^{-2} f(\theta, \varphi) \tag{5.11}$$

Если $\mathbf{v}_1 \equiv 0$, то уравнение энергии для T_{10} примет вид

$$\Delta T_{10} = 0 \tag{5.12}$$

Первый член в (5.11) принадлежит к классу центрально-симметричных температурных полей, не вызывающих движения, и поэтому не представляет интереса. Второй член в силу (5.12) принимает форму (5.1). Таким образом, если возмущенное температурное поле имеет вид (5.1), то линеаризованные условия покоя выполняются и температурные напряжения уравновешиваются давлением, в противном случае возникает движение со скоростями порядка ε. Лемма доказана.

Температурное поле (5.1) получается, если деформация сферы задается первой сферической гармоникой, что в линейном приближении эквивалентно сдвигу сферы в некотором направлении.

6. О силе на деформированную сферу. Докажем следующее: действующая на слабо ($\varepsilon \ll 1$) деформированную равномерно нагретую ($\tau_* \sim 1$) сферу сила $\mathbf{F} \leqslant O(\varepsilon^2)$.

Необходимо показать, что в линейном по ε приближении $\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}_1 = 0$. Линеаризуя уравнения сохранения, выпишем их в нулевом и в первом приближении по ε, опуская индекс снизу у $\mathbf{v}_1$

$$\frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{2v_r}{r} + \frac{v_\theta \operatorname{ctg}\theta}{r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial v_\varphi}{\partial \varphi} = v_r (\ln T_0)' \tag{6.1}$$

$$(r^2\eta_0 T_0')' = 0, \quad \triangle T_{10} = E v_r (\ln T_0)'$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial r} = \mu_0 \sigma_r + 2\mu_0^{\cdot} T_0' \frac{\partial v_r}{\partial r} + 3Y_{T0}(T_0')^2 \frac{\partial T_1}{\partial r} + Y_{T0}^{\cdot}(T_0')^3 T_1 + E\left(\alpha_1^{\cdot} - \frac{\alpha_2}{\eta}\right)_0 (T_0')^2 \frac{v_r}{T_0}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \theta} = r\mu_0\sigma_\theta + \mu_0^{\cdot} T_0' \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\theta}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial \theta}\right) + \eta_0^{-1} Y_{T0} (T_0')^2 \frac{\partial T_{10}}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial \Pi_1}{\partial \varphi} = r\sin\theta\mu_0\sigma_\varphi + \mu_0^{\cdot} T_0' \left(r^2 \sin\theta \frac{\partial}{\partial r}\frac{v_\varphi}{r} + \frac{\partial v_r}{\partial \varphi}\right) + \frac{Y_{T0}}{\eta_0}(T_0')^2 \frac{\partial T_{10}}{\partial \varphi}$$

$$\Pi_1 = p_1 + {}^2/_3 (E\alpha_1 + \mu)_0 v_r (\ln T_0)' + 2X_{T0} T_0' \frac{\partial T_1}{\partial r} + X_{T0}^{\cdot} (T_0')^2 T_1$$

Здесь штрих означает дифференцирование по r. Далее μ_0 и т. п.— функции от T_0, величинами σ_r, σ_θ, σ_φ для краткости обозначены соответствующие члены навье-стоксовского оператора $\Pi^{(1)}$ при $\mu = 1$, они приводятся в учебниках по гидродинамике (см., [11]).

Установим граничные условия для T_1. Пусть форма тела задается выражением

$$r = 1 + \varepsilon a(\theta, \varphi) \tag{6.2}$$

Тогда на стенке

$$T = T_0(r, \theta, \varphi) + \varepsilon T_1(r, \theta, \varphi) + \ldots =$$
$$= T_0(1, \theta, \varphi) + \varepsilon [a(\theta, \varphi)\, \partial T_0 / \partial r + T_1(r, \theta, \varphi)]_{r=1} + \ldots = T_w$$

Отсюда

$$T_0(1) = T_w, \quad T_1(1, \theta, \varphi) = -a(\theta, \varphi)\, T_0'(1) \tag{6.3}$$

Пусть функция возмущений представима так:

$$a = \sum_{n=1}^{\infty} a_n P_n(\cos\theta) + \sum_{m\leqslant n}^{\infty} Y_{n,m}(\theta, \varphi) \tag{6.4}$$

$$Y_{n,m} = a_{n,m}^{(0)} P_n^{\ m}(\cos\theta)\cos m\varphi + a_{n,m}^{(1)} P_n^{\ m}(\cos\theta)\sin m\varphi$$

Если решение системы уравнений (6.1) искать в виде

$$\eta_0 T_{10} = \Sigma(T_1) + \sum_{n=1}^{\infty} t_n(r) P_n(\cos\theta), \qquad \Pi_1 = \Sigma(\Pi_1) + \sum_{n=1}^{\infty} h_n(r) P_n(\cos\theta) \tag{6.5}$$

$$v_r = \Sigma(v_r) + \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) P_n(\cos\theta), \quad v_\theta = \Sigma(v_\theta) + \sum_{n=1}^{\infty} g_n(r) P_n^{\ 1}(\cos\theta), \quad v_\varphi = \Sigma(v_\varphi)$$

где

$$\Sigma(T_1) = \sum_{m=1}^{\infty} [T_1^{(m,0)}(r, \theta)\cos m\varphi + T_1^{(m,1)}(r, \theta)\sin m\varphi]$$

с граничными условиями при $r = 1$

(6.6) $$v_\alpha^{(m,\beta)} = 0 \qquad (\alpha = r, \theta, \varphi; \beta = 0, 1)$$

$$T_1^{(m,0)} = -\eta_0 T_0' \sum_{n=m}^{\infty} a_{n,m}^{(0)} P_n^{\ m}(\cos\theta)$$

$$T_1^{(m,1)} = -\eta_0 T_0' \sum_{n=m}^{\infty} a_{n,m}^{(1)} P_n^{\ m}(\cos\theta)$$

(6.7) $$f_n = 0, \quad g_n = 0, \quad t_n = -(\eta_0 T_0')_{r=1} a_n$$

и нулевыми граничными условиями при $r \to \infty$, то системы уравнений для переменных с различными индексами m независимы одна от другой, следовательно, m-я составляющая деформации вызывает m-ю составляющую в T_1, $\mathbf{v}$, Π_1 (вследствие громоздкости эти системы уравнений не приводятся).

Выпишем ту часть выражения для силы в произвольном направлении, которая обусловлена возмущенными значениями параметров газа, связав с указанным направлением полярную ось сферической системы координат и учитывая лемму 1

(6.8) $$F_1^{(1)} = -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} (P_{rr}\cos\theta - P_{r\theta}\sin\theta)_{r=1} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi =$$

$$= -\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi} \left\{\left[\Pi_1 - 2X_{T0}T_0' \frac{\partial T_1}{\partial r} - X_{T0}^{\boldsymbol{\cdot}} (T_0')^2 T_1 - 2\mu_0 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{4}{3}\alpha_{20}T_0' \frac{\partial T_1}{\partial r}\right] P_1(\cos\theta) + \mu_0 \frac{\partial v_\theta}{\partial r} P_1^1(\cos\theta)\right\}_{r=1} \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

Вследствие ортогональности системы функций $\{\sin m\varphi, \cos m\varphi\}$ при $m \geqslant 1$ к единице на интервале $(0, 2\pi)$, вклад в $F_1^{(1)}$ могут дать только составляющие с $m = 0$, т. е. f_n, g_n, h_n, t_n. Оказывается, что и здесь уравнения для групп переменных с различными индексами n независимы одно от другого, именно

(6.9) $$f_n' + 2r^{-1}f_n - n(n+1)r^{-1}g_n = f_n(\ln T_0)'$$

$$t_n'' + 2r^{-1}t_n' - n(n+1)r^{-2}t_n = Ef_n(\ln T_0)'$$

$$h_n' = \mu_0[f_n'' + 2r^{-1}f_n' - 2r^{-2}f_n - n(n+1)r^{-2}f_n + 2n(n+1)r^{-2}g_n] +$$

$$+ 2\mu_0^{\boldsymbol{\cdot}}T_0'f_n' + E\left(\alpha_1^{\boldsymbol{\cdot}} - \frac{\alpha_2}{\eta}\right)_0 (T_0')^2 \frac{f_n}{T_0} + 3Y_{T0}(T_0')^2\left(\frac{t_n}{\eta_0}\right)' + Y_{T0}^{\boldsymbol{\cdot}}(T_0')^3\frac{t_n}{\eta_0}$$

$$h_n = \mu_0[rg_n'' + 2g_n' - n(n+1)r^{-1}g_n + 2r^{-1}f_n] +$$

$$+ \mu_0^{\boldsymbol{\cdot}} T_0'[r^2(g_n/r)' + f_n] + h_0^{-1}Y_{T0}(T_0')^2 t_n$$

Использовался тот факт, что при $m = 0$ деформация осесимметрична и, следовательно, $v_\varphi = 0$, а также известные соотношения для полиномов Лежандра $P_n(\cos\theta)$ и присоединенных полиномов Лежандра первого порядка $P_n^1(\cos\theta)$.

Обратившись к (6.8), видим, что в силу соотношений ортогональности вклад в $F_1^{(1)}$ могут дать только члены с индексом $n = 1$, т. е. члены, обусловленные первой зональной гармоникой деформации. При $n = 1$ с учетом того, что

$$T_0'' = -(\eta_0^{\boldsymbol{\cdot}}/\eta_0)(T_0')^2 - (2/r)T_0'$$

уравнения (6.9) с граничными условиями (6.7) и нулевыми граничными условиями при $r \to \infty$ имеют решение

$$f_1 = 0, \; g_1 = 0, \; t_1 = cr^{-2}, \; h_1 = Y_{T_0}\eta_0^{-1}(T_0')^2 t_1, \; c = -a_1(\eta_0 T_0')_{r=1}$$

При этом

$$T_{10} = cr^{-2}\cos\theta \tag{6.10}$$

Полученные результаты находятся, естественно, в согласии с леммой 3: температурное поле (6.10) не вызывает движения газа. В силу леммы 2 обусловленные первой зональной гармоникой деформации температурные напряжения уравновешиваются давлением, действующая на тело сила $\mathbf{F}_1 = 0$. В последнем можно убедиться путем непосредственного интегрирования по телу, учитывая, кроме (6.8), соответствующий вклад нулевого приближения решения на искаженной поверхности.

Итак показано, что если деформация такова, что $n \geqslant 2$, то $\mathbf{v}_1 \neq 0$, но $\mathbf{F}_1 = 0$. Если же $n = 1$, то $\mathbf{v}_1 = 0$, температурные напряжения уравновешиваются давлением, т. е. и здесь $\mathbf{F}_1 = 0$. Сформулированное выше предложение доказано.

Полученные здесь и в п. 3 результаты для единичного тела усиливают негативное отношение к факту существования термострессовой силы, действующей на единичное тело.

7. Концентрационно-стрессовые явления [1]. Рассмотрим теперь аналогичные явления, обусловленные концентрационными напряжениями в бинарной смеси газов при $n = \text{const}$, $T = \text{const}$ (следовательно, коэффициент бинарной диффузии $D_{12} = \text{const}$). При этом пренебрегаем эффектом Дюфура, отсутствующим в случае максвелловских молекул. В общем, этот эффект приводит к слабым изменениям T из-за градиентов концентраций. Естественно, что обратное влияние градиентов температуры на поля концентраций и скоростей будет еще более слабым. Условимся также «основным» компонентом смеси считать первый компонент и будем полагать, что характерные значения $\mu_* \equiv \mu_{11}$, $\rho_* \equiv nm_1$, где μ_{11} — коэффициент вязкости чистого газа из молекул с массой m_1 первого компонента.

Концентрационные напряжения $p_{ij}^{(c)}$ в случае медленных течений будут основного порядка величины, если характерные перепады концентраций порядка единицы [2].

Формально это условие в более общем, чем в [2,12], виде можно записать так:

$$\sum_\alpha |\nabla y_\alpha| \sim 1, \quad y_\alpha = \frac{n_\alpha}{n}, \quad n = \sum_\alpha n_\alpha \tag{7.1}$$

где суммирование производится по всем компонентам смеси, n_α — число частиц сорта α в единице объема. Выражение для $p_{ij}^{(c)}$ методом Максвелла из уравнений моментов бинарной смеси газов из максвелловских молекул было получено в работе [12]. Оно совпадает с результатами работы [13], полученными методом Чепмена — Энскога в первом приближении по полиномам Сонина. Это выражение запишем так (напомним, что $y_1 + y_2 = 1$):

[1] Их можно назвать и диффузионными, ибо эти напряжения выражаются через «навье-стоксовские» диффузионные скорости и их производные, а также по аналогии с такими понятиями, как диффузионное скольжение, диффузионный термоэффект.

$$(7.2)\qquad p_{ij}^{(c)} = \omega\left[\frac{\partial^2 y_1}{\partial x_i \partial x_j}\right] + \psi\left[\frac{\partial y_1}{\partial x_i}\frac{\partial y_1}{\partial x_j}\right]$$

$$(7.3)\qquad \omega = \omega_0(\Delta\rho^*)^{-1}\{M_2 - M_1 + \gamma\,[2\,(M_1 y_1 - M_2 y_2) + y_2 S_2 - y_1 S_1]\}$$

$$\psi = \chi - (\omega\,/\,\rho^*)(M_1 - M_2)$$

$$\chi = \omega_0\gamma(\Delta\rho^*)^{-1}\,[(1-\gamma)\,(S_1 M_2 + S_2 M_1) - 1 + \gamma S_1 S_2]$$

$$\omega_0 = 2\gamma\,(s_{11}{}^{22}\,/\,s_{12}{}^{22})^2,\quad \rho^* = M_1 y_1 + M_2 y_2,\quad M_\alpha = m_\alpha\,/\,(m_1 + m_2)$$

$$\Delta = y_1{}^2 S_1\,(M_2 + M_1\gamma) + y_2{}^2 S_2\,(M_1 + M_2\gamma) + y_1 y_2\,(1 + \gamma S_1 S_2)$$

$$\mu_{\alpha\alpha} = \frac{5kT}{8\Omega^{22}_{\alpha\alpha}},\quad \gamma = \frac{3}{10}\frac{\Omega^{22}_{12}}{\Omega^{11}_{12}},\quad S_1 = (2M_2)^{-1/2}\frac{s^{22}_{11}}{s^{22}_{12}},\quad S_2 = (2M_1)^{-1/2}\frac{s^{22}_{22}}{s^{22}_{12}}$$

$$s_{\alpha\alpha}{}^{22} = {}^1/_2\,(m_\alpha\,/\,\pi kT)^{1/2}\Omega_{\alpha\alpha}{}^{22},\quad s_{12}{}^{22} = {}^1/_2\,(2m_1 M_2\,/\,\pi kT)^{1/2}\Omega_{12}{}^{22}$$

Величины Ω и s имеют тот же смысл, что и в книге [5], коэффициент γ меняется в пределах от 0.6 (упругие сферы) до 0.775 (максвелловские молекулы). Для молекул — упругих сфер и максвелловских молекул соответственно отношение $s_{\alpha\alpha}{}^{22}/s_{12}{}^{22}$ равно $4\sigma_\alpha{}^2\,(\sigma_1 + \sigma_2)^{-2}$ и $(\varkappa_{\alpha\alpha}\,/\,\varkappa_{12})^{1/4}$, где $\alpha = 1{,}2$, σ_α = диаметры сфер, $\varkappa_{\alpha\beta}$ — коэффициенты в формулах для межмолекулярных сил.

Уравнения сохранения можно привести к виду

$$(7.4)\qquad \nabla\mathbf{v} = -\mathbf{v}\cdot\nabla\ln\rho^*$$

$$(7.5)\qquad \nabla^2 y_1 = [(M_1 - M_2)\,/\,\rho^*]\,(\nabla y_1)^2 + (2\gamma)^{-1}\,(\mathbf{v}\cdot\nabla y_1)$$

$$(7.6)\qquad (y_1 + y_2 M_2\,/\,M_1)\,(\mathbf{v}\cdot\nabla)\,\mathbf{v} + \nabla\Pi_c = \Pi^{(1)} + Y_c\,(\nabla y_1)^2\,\nabla y_1 + (2\gamma)^{-1}\,(\omega^\cdot - \psi)\,(\mathbf{v}\cdot\nabla y_1)\,\nabla y_1$$

$$\Pi_c = p + X_c\,(\nabla y_1)^2 + [(3\gamma)^{-1}\omega - {}^2/_3\mu]\,(\mathbf{v}\cdot\nabla y_1)$$

$$X_c = {}^1/_2\omega^\cdot + {}^1/_6\psi + 2\,(3\rho^*)^{-1}\omega\,(M_1 - M_2),\quad A^\cdot = dA\,/\,dy_1$$

$$Y_c = {}^1/_2\omega^{\cdot\cdot} - {}^1/_2\psi^{\cdot\cdot} + (\omega^\cdot - \psi)\,(M_1 - M_2)\,/\,\rho^*$$

Если вместо y_1 ввести переменные

$$\Omega_c = \ln R,\quad R = y_1 + M_2\,/\,(M_1 - M_2) = \rho^*\,/\,(M_1 - M_2)$$

то уравнения (7.4), (7.5) примут вид

$$(7.7)\qquad \nabla\mathbf{v} = -\,\mathbf{v}\cdot\nabla\Omega_c,\qquad \nabla^2\Omega_c = (2\gamma)^{-1}\,(\mathbf{v}\cdot\nabla\Omega_c)$$

Кроме того, получим аналогичное (1.1) выражение

$$(7.8)\qquad p_{ij}^{(c)} = \omega R\left[\frac{\partial^2\Omega_c}{\partial x_i \partial x_j}\right] + \chi\left[\frac{\partial R}{\partial x_i}\frac{\partial R}{\partial x_j}\right]$$

Граничные условия для v те же, что и в п. 1, только вместо скорости температурного скольжения здесь будет скорость диффузионного скольжения $v_\tau \sim \partial y_1 / \partial x_\tau$ на S. Граничные условия для концентраций могут быть разных типов, в дальнейшем выберем простейшее: концентрации постоянны по поверхности тела, т. е. $y_{1w} = \mathrm{const}$.

В этом случае справедлива лемма, эквивалентная лемме 1. Действительно, вместо (1.9) на S имеем $\Delta\Omega_c = 0$, первый член выражения (7.8) в действующую на тело силу $\mathbf{F}^{(c)}$ вклада не дает и

(7.9) $$F_x^{(c)} = -\frac{2}{3}\chi \int (\nabla y_1)^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS$$

Точно так же находим формулу для $M_x^{(c)}$. Перечислим остальные свойства, аналогичные выявленным выше. При $y_{1w} = \mathrm{const}$ диффузионное скольжение отсутствует, движение газов вызывается концентрационными напряжениями (концентрационно-стрессовая конвекция). Когда $\nabla y_\alpha \ll 1$, ее скорости $v_c \sim Y_c (\nabla y_1)^3$, $p_c \sim -X_c (\nabla y_1)^2$. При одинаковых краевых условиях отношения $v_c / v_T = Y_c / Y_T, p_c / p_T = X_c / X_T$[1]. Качественные результаты п.2—6 переносятся на случай смеси газов, изменятся лишь коэффициенты в выражениях для сил. Вместо (3.3) получим

(7.10) $$F_x = k_c \int [\nabla (y_1 - y_{1\infty})]^2 (\mathbf{n}\cdot\mathbf{e}_x)\, dS, \quad k_c = \frac{1}{2}(\omega^{\cdot} - \psi)$$

В соответствии с изложенным необходим анализ коэффициентов X_c, Y_c, k_c. Проведем этот анализ для предельных случаев, рассматриваемых обычно при исследовании термодиффузии [14]. Будем предполагать фиксированными m_1, n, μ_{11}, y_1, оставляя в разложениях такое число коэффициентов рядов, чтобы получить «неисчезающие» формулы для Y_c. Делая заключения о знаках, будем иметь в виду указанный выше диапазон значений γ.

а) Изотопные молекулы: массы молекул близки, а сечения одинаковы, т. е.

(7.11) $$M_1 = {}^1/_2 + \varepsilon_m, \quad M_2 = {}^1/_2 - \varepsilon_m, \qquad S_1 = (2M_2)^{-1/2}, \quad S_2 = (2M_1)^{-1/2}$$

Разлагая приведенные выше выражения по $\varepsilon_m \ll 1$, обозначая $\varepsilon_0 = \varepsilon_m / (1 + \gamma)$, найдем

$$\omega = 4\omega_0\varepsilon_0 [\gamma - 2 + {}^1/_2\varepsilon_0 (y_1 - y_2)(4 + 15\gamma - 13\gamma^2) + $$
$$+ \varepsilon_0^2 y_1 y_2 (26 + 25\gamma + 88\gamma^2 - 103\gamma^3) + \mathrm{const}\, \varepsilon_0^2 + O(\varepsilon_0^3)]$$
$$\psi = 2\omega_0 (1 + \gamma)\varepsilon_0^2 [5\gamma^2 - 9\gamma + 16 - \varepsilon_0 (y_1 - y_2) \times$$
$$\times (48 + 75\gamma - 68\gamma^2 + 25\gamma^3) + O(\varepsilon_0^2)]$$
$$X_c \approx {}^5/_3\omega_0\varepsilon_0^2 (\gamma^3 - 10\gamma^2 + 13\gamma - {}^{24}/_5) < 0$$
$$Y_c \approx 2\omega_0\varepsilon_0^3 (5\gamma^4 + 55\gamma^3 - 165\gamma^2 + 133\gamma - 36) < 0$$
$$k_c = \omega_0\varepsilon_0^2 (-5\gamma^3 - 22\gamma^2 + 23\gamma - 8) < 0$$

б) Изобаричные молекулы: массы молекул одинаковы, сечения близки, т. е.

$$M_1 = M_2 = {}^1/_2, \quad S_1 = 1 + \varepsilon_1, \quad S_2 = 1 + \varepsilon_2$$

---

[1] Эти свойства установлены в работе [12]; в формуле для F_k на стр. 117 этой работы описка: перед вторым членом должен стоять знак минус.

При $\varepsilon_1 \ll 1$, $\varepsilon_2 \ll 1$ имеем

$$\omega = 4\omega_0\gamma(1+\gamma)^{-1}(y_2\varepsilon_2 - y_1\varepsilon_1)E, \quad \psi = 2\omega_0\gamma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)E$$

$$E = 1 - \varepsilon_1 y_1^2 - \varepsilon_2 y_2^2 - 2\gamma(1+\gamma)^{-1}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)y_1y_2 + o(\varepsilon^2)$$

$$X_c \approx \frac{\omega_0\gamma(\gamma-5)(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{3(1+\gamma)}, \quad Y_c \approx \frac{2\omega_0\gamma(\varepsilon_1+\varepsilon_2)}{(1+\gamma)^2}\times$$

$$\times\{(\varepsilon_1+\varepsilon_2)[5\gamma+\gamma^2+y_1(7-6\gamma-\gamma^2)-\varepsilon_2(\gamma^2+4\gamma+7)]\}$$

$$k_c \approx -\omega_0\gamma(3+\gamma)(1+\gamma)^{-1}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)$$

Знаки коэффициентов определяются знаками ε_1, ε_2. Если $\varepsilon_1+\varepsilon_2>0$, то $X_c<0$, $k_c<0$, а $Y_c>0$ при дополнительном условии $\varepsilon_2<0$.

в) Массы молекул сильно различаются, но их «диаметры» одинаковы, т. е.

$$M_1 = 1-\varepsilon_3, \quad M_2 = \varepsilon_3, \quad S_1 \approx (2\varepsilon_3)^{-1/2}, \quad S_2 \approx 2^{-1/2}$$

При $\varepsilon_3 \ll 1$ получаем

$$\omega \approx -\omega_0\sqrt{2}(y_1\delta)^{-1}, \quad \psi \approx \omega_0(\gamma+\sqrt{2})y_1^{-2}\delta^{-1}$$

$$X_c \approx \frac{\omega_0[\gamma+(3\sqrt{2}+\gamma)\eta]}{6y_1^2\delta^2} > 0, \quad Y_c \approx \frac{\omega_0\eta}{2y_1^3\delta^3}[\gamma+\sqrt{2}+(\gamma-\sqrt{2})\eta] > 0$$

$$k_c \approx -{}^1/_2\omega_0(y_1\delta)^{-2}[\gamma-(\sqrt{2}-\gamma)\eta] < 0 \quad (\delta = 1+\eta, \ \eta = (\sqrt{2}-1)y_1)$$

Напомним, что характеризующие термострессовую конвекцию коэффициенты знакоопределенны (по крайней мере, для $\mu = T^s$) именно: $X_T>0$, $Y_T<0$, $k_T>0$. Знаки аналогичных коэффициентов для смеси газов X_c, Y_c, k_c, зависят, вообще говоря, от соотношений между массами и сечениями столкновений молекул. Наиболее «устойчив» знак k_c: в выделенных выше случаях $k_c<0$, поэтому здесь электростатическая аналогия справедлива с «обратным знаком».

Поступила 15 III 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.* О некоторых кинетических эффектах в течениях сплошной среды. Изв. АН СССР, МЖГ, 1970, № 3.
2. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.*, О свободной конвекции в газе в отсутствие внешних сил. Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, № 3.
3. *Галкин В. С., Фридлендер О. Г., Царькова Г. Е.* Примеры термострессовой конвекции. Уч. зап. ЦАГИ, 1972, № 5.
4. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.* Обтекание сильно нагретой сферы потоком газа при малых числах Рейнольдса. ПММ, 1972, т. 36, вып. 5.
5. *Чепмен С., Каулинг Т.* Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
6. *Maxwell J. C.* On stresses in rarefied gases arising from inequalities of temperature. Phyl. Trans. Roy. Soc., 1879, vol. 170, p. 231.
7. *Epstein P. S.* Zür Theorie des Radiometers. Z. für Physik, 1929, Bd 54, S 537.
8. *Стреттон Дж.* Теория электромагнетизма. М., Гостехиздат, 1948.
9. *Sone Y.* Flow induced by thermal stress in rarefied gas. Phys. Fluids, 1972, № 8, p. 1418—1423.
10. *Dwyer H. A.* Thirteen-moment theory of the thermal force on a spherical particle. Phys. Fluids, 1967, № 5, p. 976—984.
11. *Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В.* Теоретическая гидромеханика, ч. 2, М.— Л. Гостехтеориздат, 1948.
12. *Галкин В. С., Коган М. Н., Фридлендер О. Г.* О концентрационно-стрессовой конвекции и некоторых свойствах медленных течений смесей газов. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 2.
13. *Шавалиев М. Ш.* Барнеттовское приближение в многокомпонентных газовых смесях. В сб.: Кинетическая теория газов и плазмы. Новосибирск, СО АН СССР, 1971.
14. *Вальдман Л.* Явления переноса в газах при среднем давлении. В сб.: Термодинамика газов. М., Машиностроение, 1970.