

СТРУКТУРА УДАРНЫХ ВОЛН В ГИПЕРЗВУКОВЫХ ТЕЧЕНИЯХ

Е. Д. Терентьев

(Москва)

На основе уравнений Навье — Стокса рассматривается движение газа в искривленной гиперзвуковой ударной волне в области, где угол наклона ударной волны к вектору скорости невозмущенного потока τ является малой величиной. В разложении искомых функций по степеням τ удерживается такое количество членов, которое позволяет с помощью метода сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений продолжить решение в новую невязкую область. Постановка задачи в новой области обладает той особенностью, что для функций задаются не значения в точке, а тейлоровские разложения в этой точке.

1. Основные оценки и вид асимптотических разложений в области ударной волны при $x \rightarrow \infty$. Рассмотрим гиперзвуковое течение совершенного газа с постоянными удельными теплоемкостями c_p и c_v . Обозначим через ρ_∞ плотность газа в набегающем потоке, а через U_∞ его скорость, направленную вдоль оси x декартовой ($\nu = 1$ в плоском случае) или цилиндрической ($\nu = 2$ в осесимметричном случае), системы координат. Пренебрегая давлением газа в набегающем потоке, положим $P_\infty = 0$, в связи с чем число Маха $M_\infty = 0$. Зависимость коэффициентов вязкости и теплопроводности от энтальпии возьмем в виде степенных функций: $\lambda = \lambda_0 w^\omega$, $k = k_0 w^\omega$. Обозначим через v_x и v_y проекции вектора скорости на оси x и y , через N_{Pr} — число Прандтля и положим $\kappa = c_p / c_v$. В дальнейшем значения как независимых переменных, так и искомых функций удобно задавать безразмерными, используя в качестве основных размерных единиц ρ_∞ , U_∞ и λ_0 . В качестве основной возьмем систему уравнений Навье — Стокса, записанную в безразмерном виде

$$(1.1) \quad \begin{aligned} & \frac{\partial \rho v_x}{\partial x} + \frac{\partial \rho v_y}{\partial y} + (\nu - 1) \frac{\rho v_y}{y} = 0, \quad p = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \rho w \\ & \rho v_x \frac{\partial v_x}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_x}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[w^\omega \left(\frac{4}{3} \frac{\partial v_x}{\partial x} - \frac{2}{3} \frac{\partial v_y}{\partial y} - \right. \right. \\ & \quad \left. \left. - \frac{2}{3} (\nu - 1) \frac{v_y}{y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[w^\omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + (\nu - 1) \frac{w^\omega}{y} \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \\ & \rho v_x \frac{\partial v_y}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial v_y}{\partial y} = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[w^\omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right) \right] + \\ & \quad + \frac{2}{3} \frac{\partial}{\partial y} \left[w^\omega \left(2 \frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{\partial v_x}{\partial x} - (\nu - 1) \frac{v_y}{y} \right) \right] + 2 (\nu - 1) \frac{w^\omega}{y} \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} - \frac{v_y}{y} \right) \\ & \rho v_x \frac{\partial w}{\partial x} + \rho v_y \frac{\partial w}{\partial y} = v_x \frac{\partial p}{\partial x} + v_y \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{w^\omega}{N_{Pr}} \frac{\partial w}{\partial x} \right) + \\ & \quad + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{w^\omega}{N_{Pr}} \frac{\partial w}{\partial y} \right) + \frac{\nu - 1}{N_{Pr}} \frac{w^\omega}{y} \frac{\partial w}{\partial y} + 2 w^\omega \left[\left(\frac{\partial v_x}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial v_y}{\partial y} \right)^2 + \right. \\ & \quad \left. + (\nu - 1) \frac{v_y^2}{y^2} \right] + w^\omega \left(\frac{\partial v_x}{\partial y} + \frac{\partial v_y}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} w^\omega \left[\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + (\nu - 1) \frac{v_y}{y} \right]^2 \end{aligned}$$

Как было установлено в работе [1], для течений с неограниченно большим числом Маха невозмущенная область отделена от возмущенной линией разрыва производных газодинамических функций. Эту линию будем называть фронтом ударной волны. Воспользуемся также оценками для величины газодинамических функций в области структуры ударной волны, когда угол наклона фронта ударной волны к вектору скорости набегающего потока τ мал по сравнению с единицей. Согласно работе [1], имеем

$$(1.2) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 + O(\tau^2) & v_y &= O(\tau), & \rho &= O(1) \\ p &= O(\tau^2), & w &= O(\tau^2) \end{aligned}$$

Эти оценки позволяют определить характерный размер N (N отсчитывается по нормали к фронту ударной волны) области, в которой течение формируется под влиянием вязкости и теплопроводности, т. е. оценить толщину ударной волны. Приравняв порядок главных конвективных и вязких членов во втором уравнении системы Навье — Стокса (1.1), получим

$$(1.3) \quad N = O(\tau^{2\omega-1})$$

Пусть уравнение фронта ударной волны имеет вид

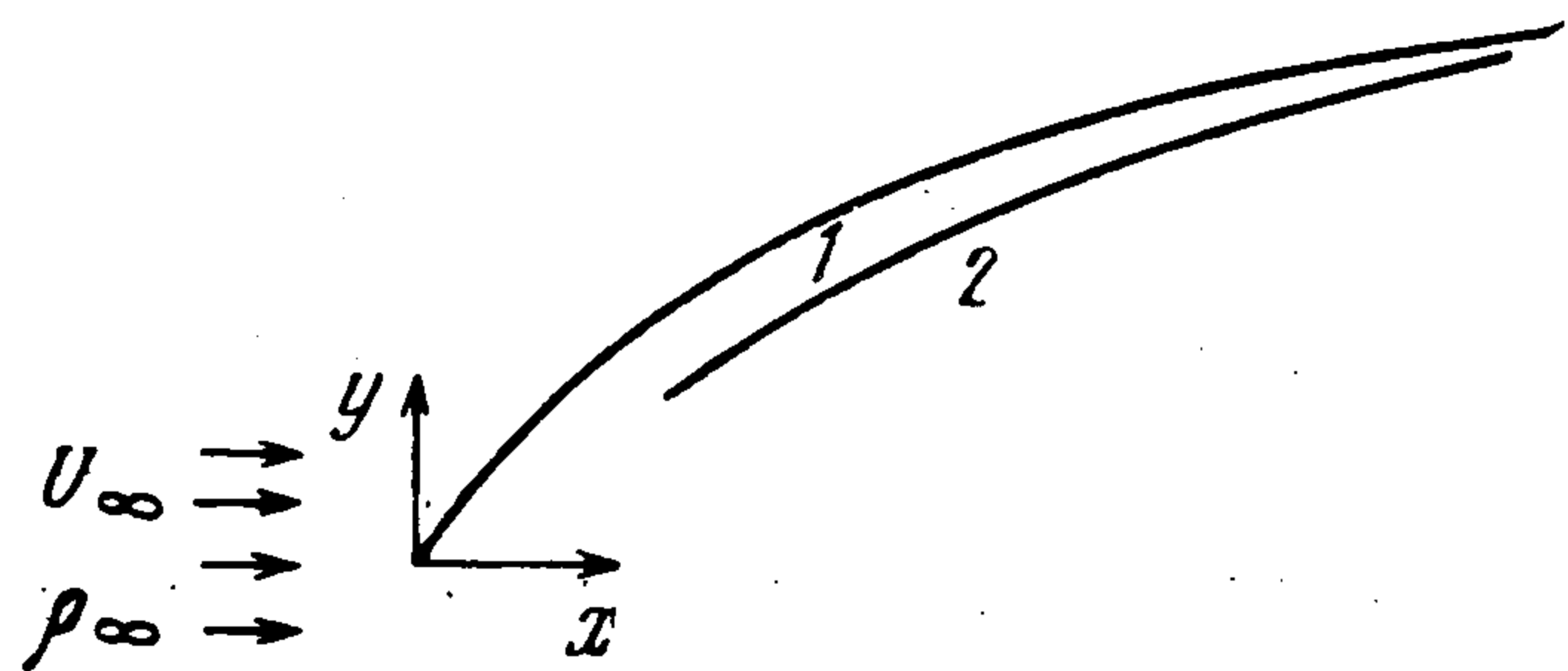
$$(1.4) \quad y = bx^n, \quad n < 1$$

При $x \rightarrow \infty$ угол наклона кривой (1.4) к оси x стремится к нулю, т. е. при больших x справедливы оценки (1.2) и (1.3).

Вместо y введем новую независимую переменную $\xi_1 = (1 - y/bx^n)x^\beta$. Выберем показатель степени β так, чтобы на расстояниях порядка $O(\tau^{2\omega-1})$ от линии (1.4) величина ξ_1 становилась порядка единицы, т. е. не зависела от x . Эта сразу определит показатель β , а именно $\beta = n - (n - 1)(2\omega - 1)$. Таким образом, в качестве переменной, описывающей течение в области структуры ударной волны, следует взять

$$(1.5) \quad \xi_1 = \left(1 - \frac{y}{bx^n}\right) x^{n-(n-1)(2\omega-1)}$$

На фигуре эта область обозначена цифрой 1. Заметим, что если $\beta = 0$, то ξ_1 становится порядка единицы только в случае $y \sim x^n$, когда влияние вязкости и теплопроводности необходимо учитывать во всей области. Если в предыдущих формулах положить $v_x = 1$ и заменить x на t (время), т. е. перейти к нестационарной задаче, то случай $\beta = 0$ будет соответствовать точному автомодельному решению уравнений Навье — Стокса с переменной ξ_1 . Уравнение $\beta = 0$ определит зависимость показателя степени ω в коэффициенте вязкости от n : $\omega = (1 - 2n) / (2 - 2n)$. Это соотношение получается также из анализа размерности независимых постоянных задачи [2]. Относительная толщина ударной волны N/y при $x \rightarrow \infty$ пропорциональна $x^{-\beta}$, т. е. при $\beta > 0$ она стремится к нулю.



Рассмотрим вопрос о продолжении решения из области ударной волны 1 с характерным размером N и $\beta > 0$ в новую область и о постановке задачи в этой новой области. В дальнейших вычислениях, исключая приложение, положим

$$n = 2 / (2 + \nu), \quad \omega = 1$$

Эти значения n и ω не являются особенными для рассматриваемой задачи, однако с физической точки зрения такой выбор n отвечает задаче о гиперзвуковом обтекании конечного тела (в нестационарной постановке — задаче о сильном взрыве). Что касается выбора ω , то он сделан в соответствии с работой [3], в которой в аналогичной постановке изучалось движение в гиперзвуковом следе за телом.

Зададим на поверхности (1.4) следующие условия:

$$(1.6) \quad \rho = v_x = 1, \quad v_y = p = w = 0 \\ \lambda \frac{\partial v_x}{\partial N} = \lambda \frac{\partial v_y}{\partial N} = k \frac{\partial w}{\partial N} = 0$$

Решения в области ударной волны будем искать в виде рядов по степеням x с коэффициентами, которые являются функциями автомодельной переменной ξ_1 . Так как вид разложений искомых функций для плоского и осесимметричного течений различается, то рассмотрим их отдельно. Остановимся сначала на плоскопараллельных течениях. Согласно оценкам (1.2), имеем

$$(1.7) \quad v_x = 1 - \frac{8b^2}{9(\kappa + 1)} x^{-2/3} [U_{11}(\xi_1) + x^{-2/3} U_{12}(\xi_1) + x^{-1} U_{13}(\xi_1)] \\ v_y = \frac{4}{3} \frac{b}{\kappa + 1} x^{-1/3} [V_{11}(\xi_1) + x^{-2/3} V_{12}(\xi_1) + x^{-1} V_{13}(\xi_1)] \\ \rho = \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} [R_{11}(\xi_1) + x^{-2/3} R_{12}(\xi_1) + x^{-1} R_{13}(\xi_1)] \\ p = \frac{8}{9} \frac{b^2}{\kappa + 1} x^{-2/3} [P_{11}(\xi_1) + x^{-2/3} P_{12}(\xi_1) + x^{-1} P_{13}(\xi_1)] \\ w = \frac{8}{9} \frac{b^2 \kappa}{(\kappa + 1)^2} x^{-2/3} [W_{11}(\xi_1) + x^{-2/3} W_{12}(\xi_1) + x^{-1} W_{13}(\xi_1)]$$

Порядки главных членов, определяемые степенями x , в разложениях (1.7) выбраны в соответствии с оценками (1.2), порядки вторых и третьих членов выбраны так, чтобы скомпенсировать в уравнениях Навье — Стокса произведения функций с индексами 11, не вошедшие в уравнения первого приближения. Условия (1.6) можно переформулировать как условия, накладываемые на функции различных приближений в точке $\xi_1 = 0$

$$(1.8) \quad U_{11} = V_{11} = P_{11} = W_{11} = 0, \quad R_{11} = (\kappa - 1) / (\kappa + 1) \\ U_{12} = V_{12} = R_{12} = P_{12} = W_{12} = 0 \\ U_{13} = V_{13} = R_{13} = P_{13} = W_{13} = 0 \\ W_{11} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} = 0$$

$$W_{11} \frac{dU_{12}}{d\xi_1} + W_{12} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dV_{12}}{d\xi_1} + W_{12} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dW_{12}}{d\xi_1} + W_{12} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} = 0$$

$$W_{11} \frac{dU_{13}}{d\xi_1} + W_{13} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dV_{13}}{d\xi_1} + W_{13} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = W_{11} \frac{dW_{13}}{d\xi_1} + W_{13} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} = 0$$

Помимо условий (1.8) потребуем, чтобы при $\xi_1 \rightarrow \infty$ функции первого приближения стремились к постоянным значениям и чтобы ни одна из функций второго и третьего приближений не могла экспоненциально возрастать.

2. Системы уравнений различных приближений и асимптотки их решений при $\xi_1 \rightarrow \infty$. Подставляя разложения (1.7) в систему уравнений (1.1) и интегрируя один раз каждое из них с учетом (1.8), получим

$$(2.1) \quad \frac{\kappa + 1}{2} R_{11} - R_{11} V_{11} = \frac{\kappa - 1}{2}, \quad P_{11} = R_{11} W_{11}$$

$$U_{11} - P_{11} - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^2} W_{11} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^2} W_{11} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = 0$$

$$V_{11} - P_{11} - \frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^2} W_{11} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = 0$$

$$V_{11}^2 - W_{11} + \frac{4}{3} \frac{\kappa^2}{(\kappa + 1)^2} \frac{1}{N_{Pr}} W_{11} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} = 0$$

Система (2.1) состоит из двух конечных соотношений и трех дифференциальных уравнений, причем уравнение для продольной скорости U_{11} отделяется и решается после того, как найдены все остальные функции. Исключив R_{11} и P_{11} , получим систему двух дифференциальных уравнений первого порядка для W_{11} и V_{11} . Эта система эквивалентна системе, возникающей при изучении структуры одномерной ударной волны в вязком и теплопроводном газе, она рассматривалась многими авторами; первое ее изучение было проведено в работе [4]. При $N_{Pr} = 3/4$ уравнения (2.1), как известно [4], допускают аналитическое решение, удовлетворяющее условиям (1.8) и условиям при $\xi_1 \rightarrow \infty$

$$U_{11} = V_{11}, \quad R_{11} = (\kappa - 1) / (\kappa + 1 - 2V_{11})$$

$$W_{11} = V_{11} (\kappa + 1 - V_{11}) / \kappa$$

$$P_{11} = \frac{\kappa - 1}{\kappa} \frac{V_{11} (\kappa + 1 - V_{11})}{\kappa + 1 - 2V_{11}}, \quad \xi_1 = \frac{16\kappa}{9 (\kappa + 1)^2} [(3\kappa + 1) V_{11} -$$

$$- V_{11}^2 - \kappa (\kappa - 1) \ln(1 - V_{11})]$$

При других N_{Pr} решение необходимо строить численно, однако соотношение $U_{11} = V_{11}$ по-прежнему сохраняется, в чем легко убедиться, рассматривая второе и третье уравнения (2.1). Для любых N_{Pr} асимптотики функций первого приближения при $\xi_1 \rightarrow \infty$ имеют вид]

$$(2.2) \quad U_{11} = 1 + TST, \quad V_{11} = 1 + TST, \quad R_{11} = 1 + TST$$

$$P_{11} = 1 + TST, \quad W_{11} = 1 + TST$$

где символом TST, как обычно, обозначены экспоненциально затухающие члены.

Принимая во внимание условия (1.8), систему уравнений для функций второго приближения запишем в виде

$$(2.3) \quad \begin{aligned} \frac{\kappa+1}{2} R_{12} - R_{11}V_{12} - R_{12}V_{11} &= \frac{4}{9} b^2 R_{11} U_{11} \\ U_{12} - P_{12} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{12}}{d\xi_1} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{12} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} - \\ - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dU_{12}}{d\xi_1} - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{12} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} &= \frac{64}{81} \frac{\kappa b^2}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} \\ V_{12} - P_{12} - \frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{12}}{d\xi_1} - \frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{12} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} &= \\ = \frac{16}{27} \frac{\kappa b^2}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} + \frac{16}{81} \frac{\kappa b^2}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} \\ 2V_{11}V_{12} - W_{12} + \frac{4}{3} \frac{\kappa^2}{(\kappa+1)^2} \frac{1}{N_{Pr}} \left(W_{11} \frac{dW_{12}}{d\xi_1} + W_{12} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} \right) &= \\ = -\frac{4}{9} b^2 U_{11}^2 - \frac{16}{27} \frac{\kappa^2 b^2}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} \\ P_{12} &= W_{11}R_{12} + W_{12}R_{11} \end{aligned}$$

Как и в системе первого приближения, в системе (2.3) уравнение для определения U_{12} отделяется. Исключив R_{12} и P_{12} с помощью конечных соотношений, получим для W_{12} и V_{12} систему двух линейных дифференциальных уравнений

$$(2.4) \quad \begin{aligned} -\frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{12}}{d\xi_1} + V_{12} \left(1 - \frac{2P_{11}}{\kappa+1-2V_{11}} \right) - \\ - W_{12} \left(\frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} + R_{11} \right) &= \frac{16}{27} \frac{b^2 \kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} + \\ + \frac{16}{81} \frac{b^2 \kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} + \frac{8}{9} \frac{b^2 U_{11} P_{11}}{\kappa+1-2V_{11}} \\ \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{1}{N_{Pr}} W_{11} \frac{dW_{12}}{d\xi_1} + \frac{2}{\kappa} V_{11}V_{12} + W_{12} \left(-\frac{1}{\kappa} + \right. \\ \left. + \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{1}{N_{Pr}} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} \right) &= -\frac{4}{9} \frac{b^2}{\kappa} U_{11}^2 - \frac{16}{27} \frac{b^2 \kappa}{(\kappa+1)^2} \frac{1}{N_{Pr}} W_{11} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} \end{aligned}$$

Система (2.4) имеет частное решение

$$(2.5) \quad V_{21} = -\frac{4}{9} b^2 V_{11}, \quad W_{12} = -\frac{4}{9} b^2 W_{11}$$

удовлетворяющее условиям при $\xi_1 = 0$ и $\xi_1 \rightarrow \infty$. Точка $\xi_1 = 0$ является особой для системы (2.4), и данные (1.8) однозначно не выделяют решения. Покажем, что дополнительное требование отсутствия экспоненциального роста при $\xi_1 \rightarrow \infty$ позволяет однозначно выделить решение. Рассмотрим однородную систему, получаемую из (2.4) отбрасыванием правых частей, зависящих от функций первого приближения. Несложные выкладки показывают, что первый интеграл однородной системы имеет

$$(2.6) \quad V_{12}' = dV_{11} / d\xi_1, \quad W_{12}' = dW_{11} / d\xi_1$$

С помощью решения (2.6) однородную систему (2.4) можно привести к линейному дифференциальному уравнению первого порядка для функ-

ции V_{12}'' и получить второе линейно независимое решение

$$(2.7) \quad V_{12}'' = \frac{dV_{11}}{d\xi_1} \int_0^{\xi_1} V_{11} W_{11}^{-2+3\kappa/4N_{Pr}} \left(\frac{dV_{11}}{d\xi_1} \right)^{-2} \exp \left\{ \int_0^{\xi_1} \frac{9}{16} \frac{(\kappa+1)^2}{\kappa} \times \right. \\ \left. \times \left[\left(1 + \frac{4}{3} \frac{N_{Pr}}{\kappa} \right) \frac{V_{11}^2}{W_{11}^2} - \frac{2}{\kappa-1} R_{11}^2 \right] d\xi_2 \right\} d\xi_1$$

Полное решение для функции V_{12} имеет вид

$$V_{12} = -4/9 b^2 V_{11} + C_1 V_{12}' + C_2 V_{12}''$$

Аналогичным образом записываются решения и для функций R_{12} , P_{12} и W_{12} . Используем приведенные в приложении асимптотики функций первого приближения для изучения асимптотических свойств V_{12}' и V_{12}'' . Выкладки показывают, что при $\xi_1 \rightarrow 0$

$$V_{12}' = \begin{cases} \text{const} \neq 0 & \text{при } 3\kappa/4N_{Pr} > 1 \\ \infty & \text{при } 3\kappa/4N_{Pr} < 1 \end{cases}, \quad V_{12}'' \rightarrow 0$$

При $\xi_1 \rightarrow \infty$ функция V_{12}' экспоненциально убывает, а V_{12}'' экспоненциально возрастает. Следовательно, условия при $\xi_1 = 0$ и $\xi_1 \rightarrow \infty$ заставляют положить $C_1 = 0$ и $C_2 = 0$. Аналогично рассматриваются асимптотические свойства U_{12} . В итоге получим решение системы (2.3), удовлетворяющее условиям (1.8) при $\xi_1 = 0$ и условиям отсутствия экспоненциального роста при $\xi_1 \rightarrow \infty$

$$(2.8) \quad U_{12} = -4/9 b^2 U_{11}, \quad V_{12} = -4/9 b^2 V_{11}, \quad R_{12} = 0 \\ P_{12} = -4/9 b^2 P_{11}, \quad W_{12} = -4/9 b^2 W_{11}$$

Формулы (2.3) и (2.8) позволяют установить асимптотическое поведение функций второго приближения при $\xi_1 \rightarrow \infty$, а именно

$$(2.9) \quad U_{12} = -4/9 b^2 + \text{TST}, \quad V_{12} = -4/9 b^2 + \text{TST}, \quad R_{12} = 0 \\ P_{12} = -4/9 b^2 + \text{TST}, \quad W_{12} = -4/9 b^2 + \text{TST}$$

Принимая во внимание условия (1.8), выпишем систему уравнений для функций третьего приближения

$$(2.10) \quad \frac{\kappa+1}{2} R_{13} - R_{11} V_{13} - R_{13} V_{11} = -\frac{\kappa+1}{4} \int_0^{\xi_1} \zeta \frac{dR_{11}}{d\zeta} d\zeta \\ U_{13} - P_{13} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{13}}{d\xi_1} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{13} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} - \\ - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dU_{13}}{d\xi_1} - \frac{4}{3} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{13} \frac{dU_{11}}{d\xi_1} = \\ = -\frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} U_{11} \int_0^{\xi_1} R_{11} d\zeta + \int_0^{\xi_1} \left[\frac{3}{2} \frac{\kappa+1}{\kappa-1} R_{11} U_{11} - P_{11} + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \zeta \frac{dP_{11}}{d\zeta} + \frac{8}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{11}}{d\zeta} - \frac{4}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} V_{11} \frac{dW_{11}}{d\zeta} \right] d\zeta$$

$$\begin{aligned}
V_{13} - P_{13} - \frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{11} \frac{dV_{13}}{d\xi_1} - \frac{16}{9} \frac{\kappa}{(\kappa+1)^2} W_{13} \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = \\
= \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} \left(2 \int_0^{\xi_1} R_{11} V_{11} d\xi + V_{11} \int_0^{\xi_1} R_{11} d\xi \right) \\
2V_{11}V_{13} - W_{13} + \frac{4}{3} \frac{1}{N_{Pr}} \frac{\kappa^2}{(\kappa+1)^2} \left(W_{11} \frac{dW_{13}}{d\xi_1} + W_{13} \frac{dW_{11}}{d\xi_1} \right) = \\
= \frac{\kappa+1}{2(\kappa-1)} \left[W_{11} \int_0^{\xi_1} R_{11} d\xi - 3 \int_0^{\xi_1} (R_{11}W_{11} + \kappa R_{11}V_{11}^2) d\xi + \right. \\
\left. + 4\kappa V_{11} \int_0^{\xi_1} R_{11}V_{11} d\xi - \kappa V_{11}^2 \int_0^{\xi_1} R_{11} d\xi \right], \quad P_{13} = W_{11}R_{13} + W_{13}R_{11}
\end{aligned}$$

Особенностью уравнений (2.10) является то, что они отличаются от уравнений второго приближения (2.3) лишь правыми частями, т. е. решения однородных систем совпадают и в качестве таковых возьмем функции (2.6) и (2.7). Используя решения однородной системы (2.10), несложно построить решение неоднородной системы, удовлетворяющее требованиям при $\xi_1 = 0$ и при $\xi_1 \rightarrow \infty$. Асимптотики этого решения при $\xi_1 \rightarrow \infty$ имеют вид

$$\begin{aligned}
(2.11) \quad U_{13} = -\frac{2\kappa-3}{\kappa-1} \xi_1 + O(1), \quad V_{13} = -\frac{3}{2} \xi_1 + O(1), \quad R_{13} = -\frac{3}{\kappa-1} \xi_1 + O(1) \\
P_{13} = -\frac{2\kappa-1}{\kappa-1} \xi_1 + O(1), \quad W_{13} = \frac{2(2-\kappa)}{\kappa-1} \xi_1 + O(1)
\end{aligned}$$

3. Переход во внутреннюю область и постановка задачи в этой области. Сравним теперь главные члены разложений функции с индексами 13, которые задаются равенствами (2.11) с главными членами разложений функций с индексами 11, определенными в (2.3) (такое сравнение в данной задаче возможно, так как функции второго приближения не входят в систему для функций третьего приближения). Видно, что при $\xi_1 \rightarrow \infty$ произведение $x^{-1}\xi_1$ может оказаться величиной порядка единицы, если даже $x \rightarrow \infty$. Это условие определяет новую автомодельную переменную

$$(3.1) \quad \xi_2 = y / (bx^{2/3})$$

и новую область, обозначенную цифрой 2 на фигуре, в которой ξ_2 порядка единицы. Для построения решения в области 2 воспользуемся методом сращивания внешних и внутренних асимптотических разложений. Исходя из определения (3.1) автомодельной переменной в этой области решение будем искать в виде

$$\begin{aligned}
(3.2) \quad v_x = 1 - \frac{8b^2}{9(\kappa+1)} x^{-2/3} [U_{21}(\xi_2) + x^{-2/3}U_{22}(\xi_2)] \\
v_y = \frac{4}{3} \frac{b}{\kappa+1} x^{-1/3} [V_{21}(\xi_2) + x^{-2/3}V_{22}(\xi_2)] \\
\rho = \frac{\kappa+1}{\kappa-1} [R_{21}(\xi_2) + x^{-2/3}R_{22}(\xi_2)] \\
p = \frac{8}{9} \frac{b^2}{\kappa+1} x^{-2/3} [P_{21}(\xi_2) + x^{-2/3}P_{22}(\xi_2)] \\
w = \frac{8}{9} \frac{b^2\kappa}{(\kappa+1)^2} x^{-2/3} [W_{21}(\xi_2) + x^{-2/3}W_{22}(\xi_1)]
\end{aligned}$$

При $\xi_2 \rightarrow 1$ формулы (2.2), (2.9) и (2.11) дают возможность установить вид искомых функций

$$(3.3) \quad \begin{aligned} U_{21} &= 1 + \frac{2(\kappa-3)}{\kappa-1}(\xi_2-1) + \dots, & V_{21} &= 1 + \frac{3}{2}(\xi_2-1) + \dots \\ R_{21} &= 1 + \frac{3}{\kappa-1}(\xi_2-1) + \dots, & P_{21} &= 1 + \frac{2\kappa-1}{\kappa-1}(\xi_2-1) + \dots \\ W_{21} &= 1 - \frac{2(2-\kappa)}{\kappa-1}(\xi_2-1) + \dots \\ U_{22} &= 1 + \dots, & V_{22} &= 1 + \dots, & R_{22} &= 0 + \dots, & P_{22} &= 1 + \dots, \\ W_{22} &= 1 + \dots \end{aligned}$$

Остановимся на функциях первого приближения. Подставляя разложения (3.2) в систему уравнений (1.1) и удерживая главные члены по x , получим хорошо известную систему дифференциальных уравнений, описывающих сильный взрыв [5-7]

$$(3.4) \quad \begin{aligned} \left(V_{21} - \frac{\kappa+1}{2} \xi_2 \right) \frac{dR_{21}}{d\xi_2} + R_{21} \frac{dV_{21}}{d\xi_2} &= 0 \\ \left(V_{21} - \frac{\kappa+1}{2} \xi_2 \right) R_{21} \frac{dV_{21}}{d\xi_2} + \frac{\kappa-1}{2} \frac{dP_{21}}{d\xi_2} - \frac{\kappa+1}{4} R_{21} V_{21} &= 0 \\ \left(V_{21} - \frac{\kappa+1}{2} \xi_2 \right) \frac{dP_{21}}{d\xi_2} + \kappa P_{21} \frac{dV_{21}}{d\xi_2} - \frac{\kappa+1}{4} P_{21} &= 0 \\ P_{21} = R_{21} W_{21}, & \quad U_{21} = \frac{1}{\kappa+1} \left(V_{21}^2 + \kappa \frac{P_{21}}{R_{21}} \right) \end{aligned}$$

Однако (3.4) является системой дифференциальных уравнений первого порядка, и для нее достаточно знать значения функций в точке $\xi_1 = 1$, поскольку эти значения определяют решение полностью. Между тем вторые члены в разложении (3.3) представляют собой дополнительные условия, налагаемые фактически на производные. Взяв решение задачи о сильном взрыве, можно разложить его в ряд Тейлора в точке $\xi_1 = 1$

$$(3.5) \quad U_{21} = 1 + \frac{dU_{21}}{d\xi_2}(\xi_2-1) + \dots, \quad \dots, \quad W_{21} = 1 + \frac{dW_{21}}{d\xi_2}(\xi_2-1) + \dots$$

Теперь остается лишь сравнить разложения (3.3) и (3.5). Такое сравнение показывает, что производные $(dU_{21}/d\xi_2)_{\xi_2=1}, \dots, (dW_{21}/d\xi_2)_{\xi_2=1}$, действительно, имеют те значения, которые предписаны формулами (3.3). Это совпадение не случайно, оно объясняется аналитическими свойствами решений уравнений Навье — Стокса, которые являются уравнениями эллиптического типа. Ясно, что продолжая вычисления следующих членов разложения искомых функций (1.7) по убывающим степеням x в области ударной волны 1, можно построить тейлоровские разложения функций с индексами 21, 22, ..., определяемых в (3.2) в окрестности $\xi_2 = 1$ в области 2.

Для функций второго приближения в области 2 получается линейная система дифференциальных уравнений, а условия (3.3) позволяют поставить для этой системы задачу Коши. В данном случае три члена разложения (1.7) позволили вычислить для функций с индексами 22 лишь значения функций в точке $\xi_2 = 1$.

В заключении рассмотрения плоского случая отметим, что первые два члена разложений (3.2) в области 2 при $\omega = 1$ и $n = 2/3$ можно искать, заменив линию разрыва производных (1.4) и всю область 1 газодинамической ударной волной (1.4) с условиями Гюгонио на ней.

Основной целью данной работы было не просто вычислить поправки к решению в области искривленной ударной волны [8, 9], а показать, как решение в области ударной волны формирует решение в новой области, где для главных членов влиянием вязкости и теплопроводности можно пренебречь.

4. Течение с осевой симметрией. Для $\omega = 1$ в случае осевой симметрии $\nu = 2$ и $n = 1/2$ переменная ξ_1 , согласно (1.5), будет иметь вид $\xi_1 = [1 - y / (bx^{1/2})]x$. Разложения функций в области 1 запишем в форме

$$(4.1) \quad \begin{aligned} v_x &= 1 - \frac{b^2}{2(\kappa + 1)} x^{-1} [U_{11}(\xi_1) + x^{-1}U_{12}(\xi_1)] \\ v_y &= \frac{b}{\kappa + 1} x^{-1/2} [V_{11}(\xi_1) + x^{-1}V_{12}(\xi_1)] \\ \rho &= \frac{\kappa + 1}{\kappa - 1} [R_{11}(\xi_1) + x^{-1}R_{12}(\xi_1)] \\ p &= \frac{b^2}{2(\kappa + 1)} x^{-1} [P_{11}(\xi_1) + x^{-1}P_{12}(\xi_1)] \\ w &= \frac{b^2\kappa}{2(\kappa + 1)^2} x^{-1} [W_{11}(\xi_1) + x^{-1}W_{12}(\xi_1)] \end{aligned}$$

Здесь, как и при изучении плоскопараллельных течений, порядки главных членов выбраны в соответствии с оценками (1.2), а порядки вторых членов выбраны так, чтобы скомпенсировать невязки в уравнениях Навье — Стокса, образованные главными членами. Однако, в отличие от разложений (1.7), в разложениях (4.1) удерживаются лишь два члена. В точке $\xi_1 = 0$ потребуем выполнение условий (1.8), а при $\xi_1 \rightarrow \infty$, чтобы функции первого приближения стремились к постоянным значениям, и ни одна из функций второго приближения не могла экспоненциально возрастать. Эти требования однозначно выделяют решения U_{11}, \dots, W_{12} . Изучая асимптотики этих решений при $\xi_1 \rightarrow \infty$, приходим к необходимости ввести новую область 2 с характерной переменной

$$(4.2) \quad \xi_2 = y / (bx^{1/2})$$

В отличие от плоскопараллельного течения в осесимметричном течении для введения новой переменной достаточно рассмотреть лишь два члена в разложениях (4.1). При этом для главных членов разложения в области 2, где переменная ξ_2 , определенная равенством (4.2), порядка единицы, получим в качестве предельного условия при $\xi_2 \rightarrow 1$ не только значения самих функций, но и их первых производных.

При постановке задачи в области 2 лишь для главных членов можно ставить условия Гюгонио на линии (1.4); для функций второго приближения эти условия отличаются от условий Гюгонио и получаются из анализа асимптотик функций с индексами 12 при $\xi_1 \rightarrow \infty$.

Приложение. При произвольных значениях ω и n система уравнений для функций первого приближения в области 1 может быть приведена к виду

$$(П.1) \quad \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1 - 2V_{11}} W_{11} - V_{11} + \frac{4}{3} \frac{1}{b^2 n^2} \left[2b^2 n^2 \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^2} \right]^\omega W_{11}^\omega \frac{dV_{11}}{d\xi_1} = 0$$

$$V_{11}^2 - W_{11} - \frac{\kappa}{N_{Pr} b^2 n} \left[2b^2 n^2 \frac{\kappa}{(\kappa + 1)^2} \right]^\omega W_{11}^\omega \frac{dW_{11}}{d\xi_1} = 0$$

с начальными данными $W_{11} = V_{11} = 0$ при $\xi_1 = 0$. Однако эта точка является особой, переходя к фазовой переменной V_{11} легко показать, что эта точка — узел. Поведение функций в ее окрестности зависит от величины $3\kappa / 4 N_{Pr}$. При $3\kappa / 4 N_{Pr} > 1$ имеем (a_V — произвольная постоянная)

$$(П.2) \quad V_{11} = \frac{\kappa - 1}{\kappa + 1} \frac{A_w}{1 - 4N_{Pr} / 3\kappa} \xi_1^{1/\omega} + a_V \xi_1^{3\kappa / (4\omega N_{Pr})} + O(\xi_1^{2/\omega})$$

$$W_{11} = A_w \xi_1^{1/\omega} + O(\xi_1^{2/\omega}), \quad A_w = \frac{(\kappa + 1)^2}{2b^2 n^2 \kappa} \left(\frac{b^2 n N_{Pr}}{\kappa} \right)^{1/\omega}$$

При $1/2 < 3\kappa / 4 N_{Pr} < 1$ в формулах (П.2) первый и второй члены в V_{11} следует поменять местами, в разложении же для W_{11} сохранится прежний вид главного члена. Оценка невыписанных членов как для V_{11} , так и для W_{11} изменится и станет для обеих функций $O(\xi_1^{1/\omega + 3\kappa / (4\omega N_{Pr})})$.

При $3\kappa / 4 N_{Pr} = 1$ главный член разложения V_{11} будет пропорционален $\xi_1^{1/\omega} \ln \xi_1$, а при $3\kappa / 4 N_{Pr} = 1/2$ пропорционален $\xi_1^{1/2\omega} \ln \xi_1$.

При $3\kappa / 4 N_{Pr} < 1/2$ имеем (a_V' — произвольная постоянная)

$$(П.3) \quad V_{11} = \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3\kappa}{4N_{Pr}} \right) 2A_w' \right]^{1/2} \xi_1^{1/2\omega} + a_V' \xi_1^{(4N_{Pr} - 3\kappa) / (6\omega\kappa)} + O(\xi_1^{3/2\omega})$$

$$W_{11} = A_w' \xi_1^{1/\omega} + a_w' \xi_1^{2N_{Pr} / (3\omega\kappa)} + O(\xi_1^{2/\omega})$$

$$A_w' = \frac{1}{2b^2 n^2} \frac{(\kappa + 1)^2}{\kappa} \left(\frac{3b^2 n \omega}{2} \right)^{1/\omega}, \quad a_w' = - \frac{4N_{Pr}}{3\omega\kappa} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{3\kappa}{4N_{Pr}} \right) 2A_w' \right]^{1/2} a_V'$$

Часть этих разложений была известна ранее. Так, при решении автотемпературной задачи о равноускоренном движении плоской пластины с $\omega = 3/2$ в работе [10] были указаны асимптотики типа (П.3). Эти асимптотики были использованы затем [11] для диапазона $1/2 < 3\kappa / 4 N_{Pr} < 1$, который определялся требованием, чтобы член с произвольным коэффициентом был главным в разложении хотя бы одной из функций. Как показывают разложения (П.2) и (П.3), для других диапазонов величины $3\kappa / 4 N_{Pr}$ это не так.

В заключение автор благодарит О. С. Рыжова за советы и внимание.

Поступила 10 VII 1973

ЛИТЕРАТУРА

1. Сычев В. В. О гиперзвуковых течениях вязкого и теплопроводного газа. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 6. М., «Наука», 1967.
3. Сычев В. В. О течении в ламинарном гиперзвуковом следе за телом. In: Fluid Dynamics Transactions. vol. 3, Warsaw, PWN, 1966.
4. Becker R. Stosswelle und Detonation. Z. für Phys., 1922. Bd. 8.
5. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
6. Седов Л. И. Распространение сильных взрывных волн. ПММ, 1946, т. 10, вып. 2.
7. Taylor G. I. The formation of a blast wave by a very intense explosion. II The atomic explosion of 1945. Proc. Roy. Soc. A, 1950, vol. 201, No 1065.
8. Chow R. R., Ting L. Higher order theory of Curved shock. J. Aeronaut. Sci., 1961, vol. 28. No. 5.
9. Bush W. B. On the viscos hypersonic blunt body problem. J. Fluid Mech., 1964, vol. 20. pt 3.
10. Сычев В. В., Аванесова Н. С. О равноускоренном движении плоской пластины в вязком сжимаемом газе. Ж. вычисл. механ. и матем. физ., 1963, т. 3, вып. 6.
11. Шидловский В. П. Автомодельное движение вязкого и теплопроводного газа при внезапном выделении энергии. Изв. АН СССР, МЖГ, 1972, № 3.